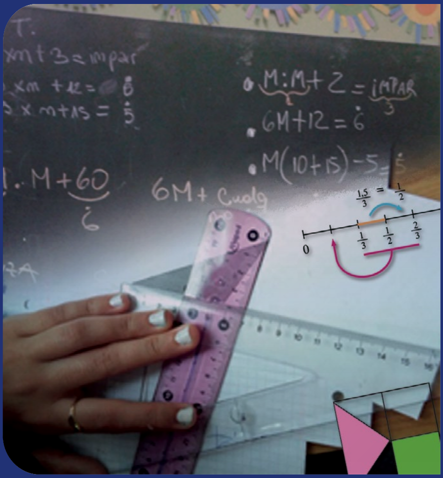


ENTRE DOCENTES I

Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria

Mónica Agrasar y
Graciela Chemello
(editoras de contenidos)

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

>>

Entre docentes I

Entre docentes I

Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria

Mónica Agrasar y Graciela Chemello
(editoras de contenidos)

Valeria Borsani
María Nieves Brunand
Carla Cabalcabué
Sabrina Della Santa
Betina Duarte
Patricia Duarte Lezcano
Cecilia Lamela
Federico Maciejowski
Sabrina Maffei
Cintia Mendoza
Rodolfo Murúa
Carmen Sessa

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Entre docentes I: matemática para el aula de ciclo básico de secundaria / Valeria Borsani ... [et al.]; compilado por Mónica Agrasar; Graciela Chemello - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria, 2021.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-61-5

1. Matemática. 2. Centros de Enseñanza Secundaria. 3. Medios de Enseñanza. I. Borsani, Valeria. II. Agrasar, Mónica, comp. III. Chemello, Graciela, comp.

CDD 510.712

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
Entre docentes I. Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, mayo de 2021

ISBN 978-987-3805-61-5

Índice

Introducción

Mónica Agrasar, Graciela Chemello y Carmen Sessa

Las propuestas que se presentan en este libro recuperan experiencias de trabajo compartido entre los profesores formadores y los profesores estudiantes de la carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica (UNIPE).

Entre la producción de estos materiales y el trayecto formativo de la carrera se teje una trama en la cual es posible destacar dos aspectos complementarios. Por un lado, varias de las ideas que se despliegan en las propuestas encuentran un anclaje en discusiones mantenidas en los seminarios de la carrera; por otro, los productos de este trabajo compartido –elaborado cada uno por equipos compuestos por profesores formadores y profesores estudiantes– son en sí mismos objeto de estudio en el aula de la especialización. En el marco de esta formación, la experiencia de escritura compartida constituyó sin duda una nueva y diferente instancia para los profesores participantes.

Este trabajo colectivo dio lugar a recorridos diversos de los materiales que componen cada capítulo, cuestión que se advierte en el relato de cada propuesta. Las temáticas abordadas se seleccionaron de modo de incluir, para cada ciclo de la enseñanza secundaria, una propuesta por cada bloque de contenidos incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP). El objetivo fue mostrar algunos ejemplos de cómo es posible construir, a partir de un trabajo colectivo, propuestas que apunten a hacer vivir a los alumnos un trabajo matemático genuino.

Construir el relato de cada experiencia les permitió a los integrantes de los grupos volver a pensar en ellas para su difusión, considerando que conocer experiencias realizadas por otros colegas permite advertir las posibilidades y límites de algunas decisiones de enseñanza y tener insumos para diseñar nuevas propuestas adecuadas a distintos grupos de alumnos y alumnas, con saberes y dinámicas propias.

Además de las consignas para los alumnos, en cada capítulo se desarrollan comentarios acerca de las intenciones didácticas que se tuvieron en cuenta al diseñar las actividades, anticipaciones sobre posibles estrategias de los alumnos y algunas alternativas para la gestión docente en el aula.

En varios casos, las propuestas se llevaron al aula. Por lo tanto, contamos con registros de esas experiencias y producciones de los alumnos que muestran el modo en que las actividades planificadas tomaron un rumbo particular y dieron lugar a nuevas decisiones o nuevas preguntas. Las actividades que se presentan permiten ejemplificar una forma de trabajo matemático en el aula y algunos criterios para organizar la enseñanza desde la perspectiva que orienta los NAP. Estos criterios se expresan del siguiente modo:

> Durante el Ciclo Básico de la Educación Secundaria, la escuela ofrecerá situaciones de enseñanza que promuevan en los alumnos y alumnas:
>
> - La confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes.
> - Una concepción de Matemática según la cual los resultados que se obtienen son consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones.
> - La disposición para defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje. [...]
> - La interpretación y producción de textos con información matemática, avanzando en el uso del lenguaje apropiado.
> - La comparación de las producciones realizadas al resolver problemas, el análisis de su validez y de su adecuación a la situación planteada.
> - La producción e interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando

desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales (Ministerio de Educación, 2011: 14).

Esta caracterización de las situaciones de enseñanza que se explicita en los NAP supone una perspectiva desde la cual se busca que las alumnas y los alumnos puedan acceder en la escuela a una práctica matemática genuina. Esto requiere que puedan involucrarse en el estudio de una problemática específica, precisar las condiciones particulares y generales que involucra, generar conjeturas, utilizar e identificar técnicas y nociones teóricas con las que se puede abordar el problema, formular y validar conclusiones y explorar el campo de validez de las mismas, ampliando la mirada sobre el problema y generando nuevas preguntas.

Como docentes, sabemos del cuidado que debemos tener al seleccionar los temas de discusión dentro del aula y al orientar los intercambios entre estudiantes de modo que sean ellos mismos los protagonistas de la tarea, pensando por sí mismos, tomando decisiones, buscando cómo expresar con sus palabras lo que hacen y los resultados que obtienen. Responsabilizarnos por el aprendizaje de nuestros alumnos exige no solo elegir los problemas que proponemos, sino moderar los intercambios de ideas, promover la enunciación de argumentaciones, saber escuchar y reorientar en caso de necesidad, promover reflexiones sobre procedimientos, impulsar la generación de instancias de escritura y validación.

Nuestra palabra aparecerá, de modo oportuno, para aclarar lo que sea indispensable para continuar la tarea y para ordenar y sistematizar las conclusiones, avanzando en formulaciones cada vez más generales, identificando teoría y técnicas que puedan ser utilizadas en nuevos problemas.

El conjunto de decisiones que tomamos determina si la clase es un espacio abierto y colaborativo de búsqueda compartida de nuevos conocimientos o si más bien se trata de una obligación que hay que atravesar viendo cómo algunos hacen mientras otros miran sin entender ni participar.

Cabe aclarar que esta decisión, que supone una toma de posición de cada docente, no es estrictamente individual sino que requiere de un proyecto y condiciones institucionales. Un trabajo de esta naturaleza lleva tiempo. Necesita de acuerdos entre profesores que permitan sostener y acompañar trayectorias orientadas a formar sujetos autónomos, convencidos de su capacidad para estudiar matemática, y no a repetir un conjunto de definiciones y técnicas.

Las propuestas que compartimos muestran experiencias que, orientadas desde la perspectiva que sostenemos, entran en diálogo con las prácticas cotidianas y muestran desarrollos posibles para algunos temas.

El primer capítulo es "Números y letras: lectura y transformación de expresiones numéricas y algebraicas", escrito por Carla Cabalcabué, María Nieves Brunand y Valeria Borsani. La propuesta se inicia con la exploración y análisis de expresiones numéricas para determinar si una cuenta da el mismo resultado que otra o si un resultado va a ser múltiplo de un número, lo que lleva a realizar descomposiciones, utilizar propiedades conocidas y expresar relaciones entre ellos. Luego se avanza con el análisis de expresiones que incluyen letras, también en el contexto de la divisibilidad. No se trata aquí de reemplazar las letras por un número y realizar cuentas, sino de interpretar y transformar escrituras con el objetivo de obtener nueva información sobre una expresión o fundamentar alguna conjetura, avanzando tanto en la construcción de las letras como variables como en el uso de cuantificadores al explorar el dominio de validez de distintas afirmaciones. Finalmente, los alumnos se enfrentan al desafío de generar expresiones que cumplan ciertas condiciones, lo que llevará también a descubrir expresiones equivalentes al analizar la validez de lo que se afirma cuando se producen ciertas transformaciones en una expresión.

Toda la secuencia está atravesada por la necesidad de validar afirmaciones, avanzando desde el uso de ejemplos hacia la consideración de ejemplos genéricos que permiten establecer el carácter necesario de una cierta propiedad a través de un razonamiento sobre ese caso. Contar con algunas producciones de los estudiantes permite identificar el modo en que los alumnos y alumnas van pudiendo avanzar en la formulación y validación de distintas afirmaciones.

En el siguiente capítulo, “Las alturas de un triángulo: la construcción de su definición”, Sabrina Maffei, Rodolfo Murúa y Carmen Sessa invierten el camino muchas veces utilizado en geometría de partir de una definición para usarla luego en alguna construcción o cálculo. Aquí se promueve la construcción por parte de los estudiantes de una definición, a la que se llega como síntesis de un trabajo de exploración y análisis. La propuesta está orientada a que los alumnos comprendan la noción de alturas de un triángulo, identifiquen que los triángulos tienen tres alturas y aprendan a trazarlas. Esto necesariamente lleva a problematizar el uso de la regla y la escuadra en interacción con las nociones de distancia, paralelismo y perpendicularidad.

El trabajo, que se inicia con exploraciones sobre recortes y dibujos, va avanzando en niveles crecientes de generalidad a partir de la revisión de las afirmaciones que se van produciendo –y modificando– a lo largo de las actividades. En esta secuencia, la producción y el análisis de escrituras resulta un factor clave, así como los espacios de discusión colectiva.

Dado que las actividades fueron desarrolladas en un segundo año de una escuela ubicada en Lomas de Zamora, una localidad del conurbano bonaerense, resulta muy interesante poder contrastar las anticipaciones realizadas por los autores con lo ocurrido efectivamente en las aulas. El detalle de las producciones de los alumnos, sus distintos modos de registrar y los intercambios en los espacios de discusión colectiva contribuyen a comprender mejor el modo en el que los estudiantes pudieron ir construyendo la definición y advertir los desafíos que fueron enfrentando.

El tercer capítulo, escrito por Betina Duarte, Patricia Duarte Lezcano y Federico Maciejowski, es “El azar y el manejo de la información a través de la matemática”. La propuesta incluye dos partes, una dedicada a la noción de probabilidad y otra a la interpretación de gráficos estadísticos.

En la primera se presenta un conjunto de experimentos que se analizan sin cuantificar para, luego de arribar a la definición de probabilidad de Laplace, volver sobre ellos cuantificando sucesos y calculando sus probabilidades. Los experimentos incluyen tanto la realización de dos juegos de manera efectiva como el análisis de otros sin haberlos realizado, advirtiendo que para un mismo experimento, ante más casos favorables hay, mayor probabilidad de que un suceso ocurra. Luego, frente a la alternativa de decidir cuál suceso tiene más chance, se encuentra que es posible proponer un cociente para compararlas arribando a una definición mediante un trabajo de “elaboración de teoría” con los estudiantes. Cierra esta parte una propuesta para reflexionar sobre los resultados obtenidos en las actividades anteriores.

En la segunda parte, dedicada a estadística, las propuestas requieren interpretar distintas formas de representar información y, en un caso, armar una tabla de frecuencias que permite asociar los resultados que se obtengan con la probabilidad teórica, ya conocida de la primera parte del capítulo. También se abordan las ideas de moda y media en problemas que dan lugar a discutir sobre el sentido de cada una de esas medidas de posición.

El último capítulo, “Números racionales: sentidos, representaciones y propiedades”, de Cecilia Lamela (coordinadora del equipo), Sabrina Della Santa y Cintia Mendoza, aborda ideas que diferencian a los números racionales de los naturales. Se presentan nuevos significados, nuevas reglas para ordenarlos y una nueva propiedad, la densidad. En esta secuencia también abordan distintas representaciones de los números racionales: como fracción, como decimal –con los casos de números decimales periódicos– y ubicando un punto en la recta numérica a partir de diferentes informaciones.

Desde el inicio aparece la idea de comparar números: racionales con enteros para ubicar unos entre otros, y racionales entre sí, arribando a reglas de comparación tanto para el caso de comparar fracciones como para decimales. Los significados que se presentan (el de medida y el de razón entre magnitudes) no son en general conocidos por los alumnos en la escuela primaria.

En cuanto a la idea de densidad, se propone un juego y varias actividades de evocación de jugadas para arribar a la conclusión de que siempre es posible encontrar otros números antes de otro dado, permitiendo entrar a la idea de que hay una cantidad infinita de números en un intervalo acotado. También en esta propuesta se plantea elaborar una definición, la de densidad, al cabo de un proceso de exploración de la idea.

BIBLIOGRAFÍA

Ministerio de Educación (República Argentina)

2011 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico Educación Secundaria 1º y 2º / 2º y 3º años*, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <http://repositoriorecursos-download.educ.ar/repositorio/Download/file?file_id=1a820389-3f95-4bfb-9d54-a4630322f7c1&rec_id=110570> [consulta: 6 de diciembre de 2019]

CAPÍTULO 1

Números y letras: lectura y transformación de expresiones numéricas y algebraicas

Carla Cabalcabué, María Nieves Brunand y Valeria Borsani

INTRODUCCIÓN

En su tránsito por la escuela primaria, los estudiantes desarrollan una gran diversidad de conocimientos aritméticos. Los números, las operaciones y los problemas que con ellas se resuelven son los objetos con los que trabajan durante este trayecto de formación. Al llegar a la escuela secundaria, esas cuentas dejan de ser el objeto central del trabajo. Las operaciones se convierten en herramientas que permiten introducir al estudiante en ciertas prácticas algebraicas. Los conocimientos aritméticos trabajados y desarrollados a lo largo de la primaria son las bases con las que los estudiantes podrán enfrentar las nuevas tareas que la escuela secundaria va a presentarles. En este sentido, los conocimientos aritméticos son insumos para los primeros trabajos algebraicos que aquí se proponen, tanto en lo referido a las nociones matemáticas como también al tipo de práctica desarrollada.

Esta propuesta aborda de manera articulada el trabajo con los saberes específicos de los ejes "el número y las operaciones" y "el álgebra y las funciones" de los NAP. En particular, se proponen situaciones en las que los estudiantes necesiten:

- Explorar y enunciar propiedades ligadas a la divisibilidad en N (suma de dos múltiplos; si un número es múltiplo de otro y este de un tercero, el primero es múltiplo del tercero, etc.).[...]

- Transformar expresiones algebraicas obteniendo expresiones equivalentes que permitan reconocer relaciones no identificadas fácilmente en la expresión original. [...]
- Producir argumentos que permitan validar propiedades ligadas a la divisibilidad en N. [...]
- Argumentar sobre la validez de afirmaciones que incluyan expresiones algebraicas, analizando la estructura de la expresión (Ministerio de Educación, 2011: 18, 21-22).

A continuación se presenta una secuencia de actividades que pueden desarrollarse de manera sucesiva pero que se organizan en tres partes para permitir un mejor análisis en relación con los saberes puestos en juego en cada una. Para cada actividad se desarrollan comentarios didácticos y reflexiones sobre la actividad en el aula, así como posibles intervenciones que, por supuesto, será necesario poner en diálogo con los saberes y circunstancias de distintos grupos de alumnos.

Luego del trabajo de los estudiantes con un grupo de situaciones, se les propone que revisen las actividades con la intención de que puedan recuperar las conclusiones del grupo, sintetizar el conocimiento que se estuvo discutiendo y reflexionar sobre su proceso de estudio con esas actividades, identificando logros y dificultades (en algunos casos, se presentan ejemplos de esas producciones de los estudiantes en la sección “Experiencia de aula”).

PARTE 1: LEER Y TRANSFORMAR PARA LEER

¿Qué podemos saber sobre el resultado de una cuenta, sin hacer la cuenta?

En este apartado se proponen actividades cuyo objetivo es involucrar a los estudiantes en un trabajo de lectura de información a partir de la escritura de un cálculo. Para ello será necesario apoyarse en propiedades de los números y de las operaciones. Por ejemplo, se propone a los estudiantes que, sin realizar los cálculos que se presentan, analicen si una cuenta da el mismo resultado que otra o si un resultado va a ser múltiplo o divisor de un número. A su vez se inicia un tipo de trabajo que será central en toda la propuesta: transformar una expresión en otra equivalente para leer nueva información.

La primera actividad tiene como objetivo que en el aula circulen diferentes nociones de múltiplo y diferentes formas de estudiar si un número es múltiplo de otro. En particular se espera que se movilice o fortalezca un conocimiento que será importante para abordar actividades posteriores: "Para estudiar si un número es múltiplo de otro, nos podemos apoyar en un múltiplo conocido y cercano al número estudiado".

Los estudiantes suelen recurrir a lo que recuerdan de los criterios de divisibilidad para resolver algunas de las actividades que presentamos a continuación. Sin embargo, no es necesario que se estudien o repasen esos criterios antes de comenzar el trabajo. Para presentar esta actividad, se podría plantear a los alumnos que utilicen lo que ya saben sobre las operaciones y los números para estudiar qué se puede saber del resultado de una cuenta, sin hacer la cuenta.

ACTIVIDAD 1

a) En cada caso, completen con un número para que el resultado de la suma dé un múltiplo de 5:

235.147 + ...   234.534 + ...

b) En cada caso, escriban un número para que el resultado de la suma dé un múltiplo de 8:

160 + ...   165 + ...

658 + ...   2448 + ...

Decidimos comenzar a movilizar y recuperar ideas relacionadas con la noción de múltiplo de un número trabajando con múltiplos de 5, que son fácilmente reconocidos por los estudiantes. Se puede resolver a partir de la idea de que los números que son múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5 y contar cuántos números faltan para llegar al múltiplo de 5 más cercano. A partir de obtener el múltiplo más cercano, también podrían completar con otros números para que todo dé múltiplo de 5.

El punto b) avanza respecto del primero, ya no alcanza con mirar la última cifra del número para tomar decisiones. Es probable que los estudiantes pongan en juego nuevos procedimientos que conllevan diferentes ideas sobre lo que significa que un número sea múltiplo de 8: por ejemplo, "se puede dividir por 8", "está en la tabla del 8", "en la división por 8 el resto es cero", "se puede dividir por 4 y luego por 2", e incluso algunas incorrectas como "termina en 8".

Entonces, para los números 160 y 165, podrían aparecer las siguientes estrategias:

- Para el 160, pueden identificar que 16 es múltiplo de 8 y reconocer que 160 también lo será. O realizar la división $160 \div 8$ y ver que el resto es 0. Otros podrán expresar el 160 como 8×20.
- Para el 165, es posible que algunos también realicen la división. Otros estudiantes, apoyados en que el 160 es múltiplo de 8, pueden sostener que el 165 no lo es porque "el múltiplo de 8 que le sigue a 160 es el 168".
- Otra estrategia que puede surgir es que los estudiantes sumen un número al 160 y luego dividan por 8 al resultado de esa suma.
- Una posibilidad para dar respuesta a estos ítems es que apelen a algún criterio de divisibilidad por 8 que recuerden.

Como mencionamos anteriormente, un objetivo central de esta actividad es comenzar a promover una estrategia que puede ser poco conocida por los estudiantes: apoyarse en múltiplos conocidos para decidir sobre la relación entre otros números. En particular, en esta actividad se puede precisar la afirmación: "si sabemos que un número es múltiplo de 8, podemos ir sumando 8, 16, 24... y obtenemos otro múltiplo de 8". Si bien esta estrategia comienza a desplegarse en el primer punto, es necesario explicitarla para todo el grupo de estudiantes a partir del trabajo con los primeros dos números del punto b). Para eso, se propone realizar una discusión colectiva una vez que los estudiantes hayan trabajado con el ítem a) y con los números 160 y 165 del ítem b), y así poner en diálogo las distintas estrategias. Analicemos una posible “puesta en diálogo” de dos producciones:

PRODUCCIÓN 1

$$\begin{array}{r|l} 165 & 8 \\ \cline{2-2} 5 & 20 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 166 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 20 \end{array} \; \dots \; \begin{array}{r|l} 168 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 21 \end{array}$$

En general, los estudiantes hacen la primera cuenta y usan el resto para descartar que 165 sea múltiplo de 8, pero no suelen apoyarse en esta información para encontrar una posible respuesta al problema. Es probable que prueben con otros números cercanos al 165, los dividan por 8 y tomen como respuesta aquellos números en que el resto les dé 0.

PRODUCCIÓN 2

160 es múltiplo de 8, entonces
165 + 3 = 168 es múltiplo de 8.

En esta producción aparece la idea de que los múltiplos de 8 van de 8 en 8. La estrategia consiste en apoyarse en un múltiplo de 8 conocido (160) para obtener el múltiplo siguiente. Es importante la intervención del docente para ayudar a los estudiantes a hacer explícitas estas relaciones: “¿Por qué al sumar 3 conseguís un múltiplo de 8?”; “¿Por qué 168 es múltiplo de 8?”; “¿Cómo te das cuenta que 168 es múltiplo de 8 si no hiciste cuentas de dividir?”.

En el análisis colectivo de estas dos producciones se puede discutir con los alumnos cómo arribar al 168 sin hacer sucesivas cuentas de dividir. Se pretende que los estudiantes expliquen que para armar otro 8 es necesario sumar 3 al resto 5 (sumar 3 también aparece en la Producción 2).

El análisis colectivo de los diferentes procedimientos y las relaciones matemáticas que cada uno de ellos moviliza ofrece buenas condiciones para que los estudiantes relacionen, confronten, cuestionen o se apropien de la estrategia de un compañero. Para ello es necesario trascender el espacio de una puesta en común de procedimientos para ir hacia un análisis y puesta en diálogo de los mismos. El hecho de que en el aula circulen estrategias diferentes a la de dividir por 8 les permitirá, a algunos estudiantes, abordar con nuevas relaciones el trabajo con el 658 y 2448, como muestran algunas producciones.

EXPERIENCIA DE AULA

Las siguientes producciones de estudiantes de primer año de una escuela pública de La Plata, Provincia de Buenos Aires, ejemplifican nuevas relaciones que se pueden establecer en el trabajo con el 658 y 2448.

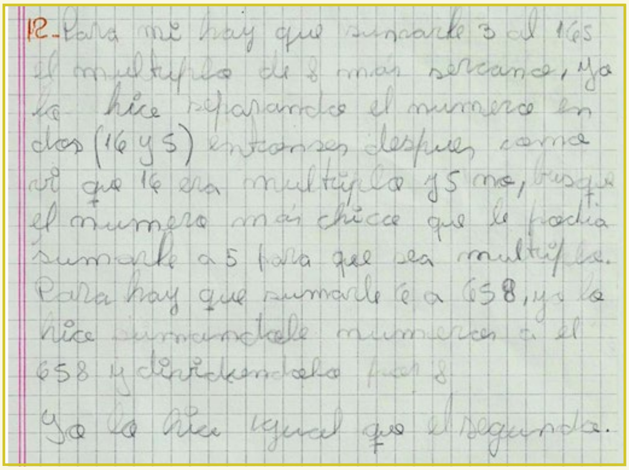
AGUSTINA

EN EL B LE SUME (AL 658) 14, HICE LO MISMO QUE EN EL A (AL 658 LE FUI SUMANDO HASTA QUE SE PUEDA DIVIDIR POR 8) Y EL PRIMER NUMERO, CON EL QUE ME DIO BIEN LA DIVICION FUE CUANDO LE SUME 14 (QUE ME DIO 672)
EN EL C, EL 2448, YA ES MULTIPLO DE 8, PERO COMO DICE QUE HAY QUE SUMARLE, LE SUME 8 (ME DIO 2456) LO DIVIDI A 8 Y ME DIO BIEN.

JUAN MANUEL

A 2448 no habría que sumarle nada porque si multiplicas 80×30 da 2400 y después le sumas 8×6 da 2448

GINO



12- Para mí hay que sumarle 3 al 165
el múltiplo de 8 más sercano, yo
lo hice separando el número en
dos (16 y 5) entonses despues como
vi que 16 era múltiplo y 5 no, busqué
el número más chico que le podía
sumarle a 5 para que sea múltiplo.
Para hay que sumarle 6 a 658, yo lo
hice sumandole números a el
658 y dividiendolo por 8
Yo lo hice igual que el segundo.

Agustina usa el algoritmo de la división para decidir si el número es o no es múltiplo de 8, pero no usa el resto para obtener el número que hay que sumar. Durante la experiencia notamos que Agustina hace las cuentas sin calculadora. En el argumento que escribe sobre el 2448, pareciera que no fue “sumando hasta que se pueda dividir por 8”. Directamente propone sumar 8 para obtener un múltiplo de 8. Aquí pareciera estar poniendo en juego la idea que los múltiplos de 8 “van de 8 en 8”. Sin embargo, para comprobar vuelve a realizar la división. Esto nos ayuda a pensar que, para Agustina, sumar 8 a un múltiplo de 8 es una *estrategia válida* para encontrar el número, pero aún no se ha convertido en un *argumento válido* afirmar que el resultado será un múltiplo de 8.

En cambio, en la producción de Juan Manuel aparece una noción de múltiplo vinculada a la descomposición del número 2448 como producto de dos números donde uno de ellos es un múltiplo de 8 conocido. El análisis colectivo de estas formas de estudiar si un número es múltiplo de 8 podría llevar a Agustina a incorporar una nueva manera de validar que el 2448 lo es. A su vez, Juan Manuel se podría apoyar en la estrategia de Agustina de sumar 8 al 2448 para generar una nueva respuesta. Gino, por su parte, podría apoyarse en la estrategia de Juan Manuel para precisar la idea de “separar en 16 y 5” al 165. Se pretende que con esta actividad se construya este nuevo argumento: “Si a un múltiplo de 8 le sumo 8, el resultado sigue siendo múltiplo de 8 y no necesito hacer la cuenta para verificar”.

Para los estudiantes suele no ser evidente que no haya un único número que se puede sumar. La diversidad de respuestas recolectadas en el análisis colectivo de esta actividad puede ser aprovechada por el docente para indagar sobre las distintas posibilidades. En las actividades siguientes se abordará el análisis sobre cuántas y cuáles son las respuestas que se pueden dar en cada caso.

ACTIVIDAD 2

Decidan, sin hacer los cálculos, cuáles de las siguientes cuentas dan el mismo resultado que 36×21. Expliquen sus respuestas.

a) $36 \times 3 \times 7$

b) $30 \times 6 \times 3 \times 7$

c) $2 \times 2 \times 9 \times 21$

d) 18×42

Esta actividad se propone con la intención de que los estudiantes comiencen a realizar un trabajo de lectura de información de estas expresiones numéricas para argumentar sobre la equivalencia de las mismas. Por expresiones numéricas nos referiremos a expresiones en las que se relacionan números y operaciones, sin letras. Afirmamos que son equivalentes si expresan cuentas que dan el mismo resultado.

Como se mencionó anteriormente, queremos identificar dos tipos de trabajo con expresiones numéricas que serán objeto de estudio en todas las actividades propuestas: por un lado, leer información a partir de ellas y, por otro, transformarlas para obtener nueva información. Por ejemplo, un trabajo sencillo de lectura de información se realiza cuando los estudiantes identifican que 36×21 es equivalente a $36 \times 3 \times 7$, ya que 21 es 3×7 y, entonces, 36×21 equivale a hacer $36 \times 3 \times 7$. Si bien estas equivalencias se fundamentan en la propiedad asociativa de la multiplicación, nuestro interés no está puesto en que los estudiantes expliciten en cada caso la propiedad que están usando. El foco de enseñanza de esta actividad es que se comience a identificar y explicitar que leyendo información de una expresión y realizando un pequeño cálculo –sin realizar el cálculo completo– se puede decidir si da el mismo resultado que otra cuenta.

En el caso de 18×42, una posible argumentación puede darse a partir de identificar la relación de dobles y mitades entre los números involucrados en la cuenta original: 18 es la mitad de 36 mientras que 42 es el doble de 21, por lo tanto si se realiza el producto se obtiene el mismo resultado. Los estudiantes pueden utilizar este tipo de argumentos sin comprometerse con una validación del mismo; en este caso, sería interesante comparar esta producción con aquellas que argumenten la equivalencia mediante la transformación de la expresión 18×42 –descomponiendo multiplicativamente ambos números o alguno de ellos–. Como el propósito de la actividad es decidir si las cuentas son equivalentes a 36×21, la descomposición podría no hacerse en factores primos. Solo se necesita manipular la expresión con la intención de "armar" el 36 y el 21, por ejemplo así: $18 \times 42 = 18 \times 2 \times 21 = 36 \times 21$.

Queremos destacar que, al comenzar el trabajo con esta actividad, los chicos suelen realizar exactamente los cálculos propuestos para responder a la consigna. A partir de esta estrategia –y no antes– será necesario negociar con ellos la condición "sin hacer los cálculos propuestos" para ir promoviendo otro tipo de trabajo. Un buen espacio para esta negociación puede ser el momento de análisis colectivo de las diferentes resoluciones. La discusión en el espacio colectivo puede ayudar a que aquellos estudiantes que aún realizan la cuenta completa incorporen los argumentos de los compañeros que apelaron a la lectura de una parte de la expresión. Se espera que los mismos estudiantes comiencen a instalar frases como: "no necesité hacer los cálculos porque me di cuenta que si multiplico estos tres ($2 \times 2 \times 9$), queda 36×21".

A continuación, se podría proponer una nueva actividad para que los estudiantes produzcan diferentes formas de armar multiplicaciones que den lo mismo que 36×21. La intención es que aparezcan en el aula diferentes descomposiciones multiplicativas. Producir cuentas que den el mismo resultado es un trabajo diferente a "leer" si una cuenta da lo mismo que otra. Leer implica asociar o conmutar los productos de los números que se proponen con el objetivo de armar el 36 o 27; producir conlleva la necesidad de trabajar con los factores de los números en cuestión.

ACTIVIDAD 3

Decidan, sin hacer los cálculos, si los siguientes pares de cuentas dan el mismo resultado. Justifiquen sus respuestas.

a) 21×15 $7 \times 3 \times 5$

b) 18×15 $9 \times 5 \times 2 \times 3$

c) 33×24 $11 \times 12 \times 6$

Para decidir sobre la igualdad de los resultados, es decir sobre la equivalencia de las expresiones, los estudiantes necesitarán recurrir a la lectura o transformación de expresiones. Dependiendo de si operan sobre una u otra expresión, podrán argumentar –por ejemplo– que $7 \times 3 \times 5$ es igual a 21×15, porque "en $7 \times 3 \times 5$ se encuentran 7×3 y 3×5". Este argumento puede ser confrontado en el espacio de discusión colectiva con un argumento que se apoye en la descomposición de 21×15 como $7 \times 3 \times 3 \times 5$.

En el ítem b) suele ocurrir que los estudiantes responden que no dan el mismo resultado. Por ejemplo, afirman que "9×5 no arma al 18 y 2×3 no da 15". Si todos los estudiantes están convencidos de esta respuesta, se los puede invitar a realizar ambas cuentas y que luego intenten explicar por qué dan lo mismo. Como ya destacamos, es posible que aparezcan los nombres de las propiedades pero la idea no es que expliciten la conmutatividad del producto sino que se apoyen en ella, que la pongan en juego para transformar la expresión original y que, así, puedan validar la igualdad.

Por último, para determinar la equivalencia de las expresiones del ítem c) es necesario descomponer algún número en una de las expresiones. Esta novedad respecto de los ítems anteriores suele generar que los estudiantes sostengan que las expresiones no dan el mismo resultado. Sin embargo, la "familiaridad" de las relaciones entre el 33 de una expresión y el 11 de la otra, o del 12 y el 24, quizás ayude a que los chicos se comprometan con la búsqueda de relaciones entre las expresiones. Se puede realizar un ida y vuelta entre las expresiones: al 33 se lo puede pensar como 3×11. El 11 está en la expresión de la derecha, pero el 3, no. Será necesario analizar la expresión de la derecha para poner en relación el 3×24 con el 12×6. Es en este juego entre *lo que se ve* y *lo que se necesita ver* que las transformaciones de las escrituras son necesarias para poder identificar si hay equivalencia entre las expresiones.

ACTIVIDAD 4

Decidan, sin hacer cuentas de dividir, si 48×15 es:

a) múltiplo de 15
b) múltiplo de 6
c) múltiplo de 7
d) múltiplo de 30
e) múltiplo de 20
f) múltiplo de 50

Proponemos una serie de ítems para estudiar algunas características del producto 48×15 que refieren a la noción de múltiplo. Sin embargo, podrían cambiarse por afirmaciones que también incluyan la noción de divisor. Por ejemplo, 20 es divisor de 48×15.

Para resolver cada uno de estos ítems es necesario movilizar diferentes conocimientos sobre la multiplicación y realizar distintas manipulaciones de los números involucrados. En este sentido, no se espera que los estudiantes realicen la factorización de 720 (48×15) en factores primos, sino que puedan tomar decisiones sobre qué números van a descomponer, o qué números van a reagrupar y cómo, para leer la información necesaria para responder.

El ítem a) permite seguir precisando sobre una noción de múltiplo asociada: "Un número es múltiplo de a si se puede escribir como $a \times k$ con k natural". De esta manera, los estudiantes podrán argumentar que 48×15 es múltiplo de 15 porque 15 es uno de los factores del producto. Esta noción de múltiplo es la que permitirá abordar las actividades que siguen.

En el ítem b), los estudiantes suelen explicitar que 48×15 es múltiplo de 6 "porque 48 lo es". Podría pasar que en la clase también surgiera la descomposición del 48 para expresar 48×15 como $6 \times 8 \times 15$; esta última expresión permite leer que 48×15 es múltiplo de 6 y aporta razones al primer argumento aquí presentado. Otra posibilidad podría ser que descompongan ambos números en la búsqueda del 6: por ejemplo, $48 \times 15 = 24 \times 2 \times 3 \times 5 = 24 \times 6 \times 5$.

En el ítem c), ninguno de los dos números es múltiplo de 7 y no puede armarse a partir de la descomposición de ambos números. Al igual que en el ítem anterior, puede ocurrir que los estudiantes argumenten rápidamente que no es múltiplo de 7 porque el 48 y el 15 no son múltiplos de 7, pero que no consideren la opción de que el 7 se pueda armar a partir de la descomposición multiplicativa del 48 y el 15. En este caso, se sugiere como posibilidad que el docente acepte provisoriamente este argumento para ponerlo en discusión más adelante (por ejemplo, al finalizar las discusiones del ítem siguiente o de toda la actividad).

En los ítems d), e) y f) ninguno de los dos números del producto son múltiplos de 30, de 20 ni de 50, pero en los dos primeros es posible realizar una transformación para poder obtenerlos. Los estudiantes podrían resolver estos ítems argumentando, del mismo modo que en c), que "como ninguno de los factores es múltiplo del número pedido, el producto no lo es". En este caso, se sugiere que el docente invite a los estudiantes a confrontar esta idea con algún compañero que afirme lo contrario. O que proponga salirse por un momento de la consigna y realizar, por ejemplo, la división de 720 por 30, corroborar que el resto es 0 y que esto movilice la búsqueda del factor 30 a partir de la transformación de la expresión.

La diferencia entre el ítem d) y e) radica en que para obtener el 30 solo es necesario descomponer uno de los factores (48) y para obtener el 20 es necesario descomponer ambos factores. En cambio, en el ítem f), para responder a la consigna es necesario descomponer el 50 en $5 \times 5 \times 2$, para ver que uno de los factores 5 no aparece al descomponer 48×15. En este caso, y según nuestras experiencias, los chicos suelen decir que al 48×15 "le falta un 5 porque el 15 tiene un 5 y el 48 ninguno".

Luego de analizar colectivamente todos los ítems, se puede revisar la conclusión (provisoria para el docente) a la que se arribó en el ítem c) y plantear: "Ustedes analizaron que si bien el 48 y el 15 no son múltiplos de 30 ni de 20, el resultado de 48×15 sí lo es. ¿No podrá pasar lo mismo en el ítem c)? Sabiendo que 48 y 15 no son múltiplos de 7, ¿se podrá armar el 7 y así asegurar que 48×15 es múltiplo de 7?". En general, los estudiantes realizan diferentes descomposiciones de los números y observan que el 7 "no aparece" y que "no lo pueden armar". Esto puede generar que los chicos se pregunten sobre la posibilidad de descomponer de alguna otra forma y encontrarlo.

Claramente, no es intención de esta propuesta explicitar y demostrar el teorema de factorización única ya que los conocimientos necesarios para establecer y validar dicho teorema exceden aquellos que se abordan en la escuela secundaria. Sin embargo, valoramos que los estudiantes formulen y confronten sus ideas respecto de diferentes factorizaciones y la lectura que se puede dar a partir de diferentes escrituras.

En un documento escrito por Cambriglia, Sadovsky y Sessa (2010) se consideran las interacciones en la clase de matemática como un medio potente de construcción de conocimientos matemáticos tanto personales como colectivos. Para ello, se recortan y analizan algunos fragmentos de clases en las que los estudiantes discuten colectivamente actividades similares a las propuestas hasta ahora en este documento.

En las cuatro actividades anteriores se propuso que los estudiantes analicen diferentes descomposiciones de números en factores no necesariamente primos. Esta tarea la tenían que realizar para tomar decisiones sobre la equivalencia de dos expresiones o para estudiar si el resultado de la cuenta que expresa dicha expresión es divisible por un número. Si bien este tipo de actividades puede dar lugar a que los estudiantes expliciten las propiedades básicas de las operaciones (distributiva, conmutativa, etc.) o para que ejerciten la factorización en factores primos (por ejemplo, los factores primos de $720 = 48 \times 15$), el objetivo del trabajo que se propone en este documento es diferente. La idea central es que los estudiantes se apoyen en las propiedades, que las pongan en juego para transformar una expresión original en otra en las que se pueda leer nueva información que permita resolver el problema. Nos parece importante remarcar que la transformación de una expresión en otra es producto de una toma de decisiones sobre qué "objeto" transformar, por qué es necesario transformarlo y qué tipo de transformación se necesita hacer.

ACTIVIDAD 5

Sin hallar los resultados de los siguientes cálculos, decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen sus decisiones.

a) $2 \times 15.673 + 4$ da como resultado un número par

b) $3 \times 15.673 + 6$ da como resultado un número par

c) $3747 \times 5 + 21$ es múltiplo de 5

d) $3747 \times 15 + 21$ es múltiplo de 3

e) $7 \times 1748 + 147$ es múltiplo de 7

f) $2 \times 1748 + 5 \times 1748 + 147$ es múltiplo de 7

g) $8 \times 217 + 5 \times 217 + 35$ es múltiplo de 7

El objetivo de esta actividad es continuar con el trabajo de lectura de la información que brindan las expresiones. En este caso, la complejidad se presenta porque aparecen involucradas dos operaciones: la suma y la multiplicación. Puede ser una buena oportunidad para revisar con los estudiantes el orden en que deben realizarse estas operaciones.

Los primeros tres ítems pueden ser abordados de diferentes maneras. Por ejemplo, los estudiantes podrían:

- Basarse en propiedades del tipo “par por cualquier número es par” o “par más par da par”.
- Basarse en análisis similares a los desplegados en las actividades anteriores para leer que “3747 × 5” es múltiplo de 5 y que 21 no lo es. Entonces, 3747 × 5 + 21 no es múltiplo de 5.
- Analizar las cifras de las unidades de los productos propuestos en los primeros términos de cada cálculo cuando se estudia la paridad de una expresión o la multiplicidad por 5. Por ejemplo, plantear que como 2 × 3 = 6 (este tres corresponde a la cifra de la unidad del número 15.673), el resultado final será par porque al sumarle 8 terminará en 4.

Para la resolución de los ítems d) y e) no alcanza con mirar la cifra de las unidades. Será necesario apoyarse en lo trabajado en las actividades 1 y 4 para recuperar que, por ejemplo, el primer término de 3747 × 15 + 21 es múltiplo de 3 y al sumarle 21 se está sumando 7 veces 3.

En el ítem f) los estudiantes suelen afirmar que el resultado de la cuenta no es múltiplo de 7; para ello se apoyan en el análisis de cada uno de los términos. Será necesario considerar la multiplicación como suma de números iguales para responder a la consigna. En particular, 2 × 1748 puede expresarse como 1748 + 1748 (2 veces 1748) y 5 × 1748 como 1748 + 1748 + 1748 + 1748 + 1748 para llegar a la conclusión de que se está sumando 7 veces 1748. Es decir, 2 × 1748 + 5 × 1748 = 7 × 1748. Por lo tanto, el resultado de 2 × 1748 + 5 × 1748 es múltiplo de 7. Solo queda analizar si la suma es múltiplo de 7, y del ítem anterior se sabe que 147 es múltiplo de 7, es decir que la suma será múltiplo de 7. Puede resultar interesante analizar junto con los estudiantes la equivalencia de las expresiones de los ítems e) y f).

Un tratamiento similar puede realizarse con el ítem g). La transformación de la expresión –basada en la noción de la multiplicación como sumas reiteradas– permitirá garantizar que $8 \times 217 + 5 \times 217 = 13 \times 217$. Algunos estudiantes podrían afirmar que como 13 no es múltiplo de 7, 13×217 no lo será, sin reparar que 217 es múltiplo de 7. Esta estrategia podría confrontarse con otras que hayan analizado, por ejemplo, los tres términos: “Dado que 217 es múltiplo de 7, 8×217 y 5×217 serán múltiplos de 7. Si se suma 35, que es múltiplo de 7, el resultado final será múltiplo de 7”.

Estos dos últimos ítems proponen un nuevo trabajo en torno a las transformaciones de las expresiones numéricas: considerar a la multiplicación como una suma reiterada. Dichas transformaciones serán retomadas al final de esta propuesta de enseñanza para utilizarlas en expresiones algebraicas.

Si bien los alumnos ya han ido registrando conclusiones, antes de avanzar es posible revisar lo que se estuvo estudiando, hacer un cierre parcial de esta primera parte y sistematizar las conclusiones del trabajo realizado hasta aquí. Por ejemplo, se podría plantear que registren cómo le explicarían a un compañero que “características” del resultado de una cuenta se pueden anticipar sin hacerla, es decir si se puede saber si el resultado será par o impar, múltiplo o no de un número. Para no plantearlo de modo tan general, se puede proponer comparar, por ejemplo, 12×42 y $12 \times 42 + 2$ para decidir si los resultados serán múltiplos de 2, 3, 4, 6 y 7.

Los problemas propuestos hasta aquí pueden resolverse con los conocimientos aritméticos que los estudiantes traen de su paso por la escuela primaria. Se propone un trabajo en torno a la toma de decisiones acerca del resultado de un cálculo, sin realizar el cálculo. Desde el punto de vista del trabajo algebraico, se puede leer información a partir de las expresiones de cálculos y tomar decisiones sin apelar a la cuenta.

La entrada a un nuevo tipo de práctica (algebraica) conlleva aprender a resignar la búsqueda de un resultado (fruto del trabajo aritmético) para extraer relaciones pertinentes a partir de la lectura de una expresión o de la transformación de una expresión en otra equivalente. Esto supone un cambio complejo de práctica que no puede ser abordado si no es en relación con aquello que los estudiantes traen de su paso por la escuela primaria: la práctica aritmética.

PARTE 2: LAS LETRAS COMO VARIABLES

Una letra en una expresión con números, ¿representa un número o muchos números?

En su tránsito por la escuela primaria, es frecuente que los estudiantes trabajen con letras para expresar propiedades generales sobre los números o sobre las operaciones, para representar elementos geométricos o en las fórmulas de perímetros y áreas. Durante los primeros años de la escuela secundaria es habitual que la entrada al álgebra se proponga mediante un trabajo con ecuaciones donde la letra representa una incógnita, un valor desconocido que es necesario encontrar. En general, la enseñanza de las ecuaciones se centra en el desarrollo de la habilidad para aplicar técnicas que permitan “despejar” la incógnita para hallar su valor.

Otra posibilidad es que los primeros encuentros de los estudiantes con el lenguaje algebraico y su manipulación sea a través de problemas que involucren la generalización. Esta es la opción que se toma en la segunda parte de esta propuesta: las letras designan números y pueden ser reemplazadas por cualquier valor con el objetivo de estudiar la validez de algunas afirmaciones aritméticas.

Con el objetivo de que los estudiantes comiencen a vincularse con estas ideas se pretende instalar un trabajo en el que las letras no sean reemplazadas para realizar cuentas y lograr un resultado (como puede ser el caso de las fórmulas de áreas), sino más bien para poder leer información en expresiones con letras y transformar una escritura en otra equivalente con el objetivo de obtener nueva información sobre la expresión o fundamentar alguna conjetura. Cabe señalar que las actividades de esta Parte 2 pueden ser abordadas en el conjunto de los números naturales o en de los enteros.

Para presentar el trabajo, se podría plantear a los alumnos que analicen expresiones numéricas y expresiones con letras para averiguar si una letra representa un número o muchos.

ACTIVIDAD 1

Sin hacer los cálculos, estudien si es posible completar cada uno de los espacios con un número para que la afirmación sea verdadera. ¿Pueden encontrar más de un número? Expliquen sus respuestas.

a) El resultado de $17 \times 53 +$ …… es un número par

b) El resultado de $6 \times$ …… es un número impar

c) El resultado de $5 \times$ …… $+ 11$ es un número impar

d) El resultado de …… $\times 4 + 22$ es un número par

Esta actividad trae un asunto nuevo para los estudiantes: la posibilidad de probar o explorar con diferentes números para decidir sobre la validez de cada afirmación. Se inicia un trabajo en torno de la idea de variable aunque aún sin que aparezcan las letras como un modo de atrapar una generalidad.

Los estudiantes, con un trabajo similar a lo analizado en la actividad 5 de la Parte 1, pueden abordar esta actividad desde la lectura de la información que portan las expresiones junto con alguna transformación; o desde el estudio de las cifras de las unidades del resultado del producto y la suma. Por ejemplo, "el resultado de $17 \times 53 + 3$ es par porque el producto da impar y al sumarle un impar el resultado final es par porque el resultado de 17×53 termina en 1 y al sumarle 3 terminará en 4".

Podrían elaborar, a su vez, estrategias mixtas en las que lean información de las expresiones y también trabajen con las cifras de las unidades. Por ejemplo, para el ítem c): "Cualquiera sea el número que se ponga, el primer término es múltiplo de 5 por estar multiplicado por 5, entonces el número que se obtiene termina en 5 o 0, al sumarle 11 puede terminar en 6 o 1".

Un ejemplo de una estrategia basada en la lectura y transformación podría ser expresar al $6 \times$ …… como $3 \times 2 \times$ ……, y así concluir que el resultado será par porque está multiplicado por 2.

Una vez que los estudiantes hayan abordado –individualmente o en pequeños grupos– todos los ítems, se puede proponer un espacio de discusión colectiva con el objetivo de socializar la diversidad de respuestas que se hayan generado. Con varios valores posibles para cada uno de los ítems, podría proponerse una nueva tarea: "Caracterizar cuáles son todos los posibles valores con los que se puede completar cada expresión para que cumpla la condición pedida". Preguntas como "¿Se puede completar con cualquier número?", "¿Con qué otros números podría completar el ítem...?" o "¿Qué condición debe cumplir un número para que el resultado final sea par/impar?" permitirían avanzar en esta tarea.

Por ejemplo, en el ítem c), los estudiantes podrían afirmar que "se puede completar con cualquier número". Pero para demostrar que estos números son todos, sería necesario validar que tanto los pares como los impares cumplen lo pedido: "Si reemplazo por un número par, 5 × par dará como resultado un número par –o terminado en 0– y al sumarle un número impar (11), el resultado de la suma será impar. En cambio, si se reemplaza por un número impar, 5 × impar da como resultado un número impar y al sumarle 11 será par". Con esta nueva tarea se estaría abordando la *exhaustividad* de las conjeturas producidas por los estudiantes.

Las relaciones matemáticas movilizadas en actividades anteriores son un buen soporte para encontrar algún conjunto de números que cumpla lo pedido y para explicar, de manera coloquial, por qué esos conjuntos sirven como respuesta. Por otro lado, no se trata de atrapar la generalidad de manera formal. Aún no se pretende avanzar hacia una escritura simbólica de esta generalidad, pero sí es importante llevar un registro escrito de las conclusiones.

Otra novedad que trae esta actividad es que las respuestas no están conformadas solo por números sino que necesitan del uso de frases particulares. Por ejemplo, "hay algunos números que cumplen con lo pedido", "no hay ningún número natural que cumple con lo pedido" (ítem b), "cualquier número natural cumple con lo pedido" (ítem d). Es decir, las respuestas a los ítems necesitan del uso de cuantificadores.

Como ya hemos mencionado, la noción de *variable* y el uso de cuantificadores son dos asuntos que se inauguran en esta actividad y que serán objeto de estudio en las actividades siguientes. Esta actividad puede complejizarse con nuevos ítems, por ejemplo:

Estudien si es posible completar cada uno de los espacios con un número, para que la afirmación sea verdadera.

e) …… $\times$ 4 + 9 es múltiplo de 3

f) 7 $\times$ …… + 21 es múltiplo de 7

g) 7 $\times$ …… + 2 es múltiplo de 7

h) 3 $\times$ …… + 36 es múltiplo de 6

Si bien las ideas movilizadas sobre cuantificadores y la noción de variable son similares a las expresadas en los párrafos anteriores, para estudiar con qué números completar ya no sirve la estrategia de analizar las cifras de las unidades. Ahora será necesario leer la información que portan las expresiones en términos de multiplicidad. Para el tercero de estos ítems, posiblemente surjan afirmaciones coloquiales del estilo "cualquier número con el que se complete la primera parte de la cuenta dará un múltiplo de 7 y al sumar 2 no será múltiplo de 7".

ACTIVIDAD 2

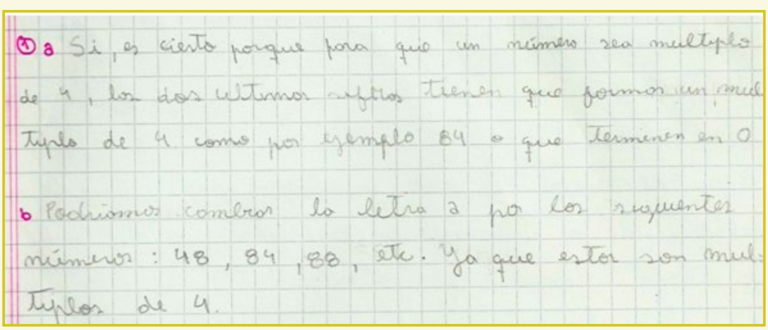
a) ¿Es cierto que si en $16 \times 15 + a$ se reemplaza la letra a por el número 44, el resultado es múltiplo de 4? ¿Y si se la reemplaza por el 154?
b) ¿Con qué otros números podrían reemplazar la letra a para que el resultado de $16 \times 15 + a$ sea múltiplo de 4?
c) ¿Cuáles son todos los valores por los que se pueden reemplazar la variable a para que se obtenga un múltiplo de 4?

Esta podría ser, para los estudiantes, una de las primeras actividades donde aparece una letra formando parte de una expresión a estudiar. El ítem a) apunta a que los estudiantes reconozcan que la letra puede ser reemplazada por un número concreto, mientras que la idea del ítem b) es que, a partir de explorar con diferentes valores de la variable a, identifiquen algunas características de los números que cumplen lo pedido. Vale destacar que se propone un trabajo con la letra asociado a una idea de variable; es decir, la letra es reemplazada por diferentes números y, al hacerlo, se obtienen expresiones numéricas con diferentes propiedades (algunas son múltiplos de 4, otras no). Este es un trabajo diferente de aquel que deviene de considerar ecuaciones en las cuales la letra aparece como un número oculto, a descubrir, o a la manipulación algebraica de expresiones polinómicas, regida por "reglas de tratamiento". Es un trabajo muy básico con las expresiones, para nosotros, pero muy potente para que un principiante construya un sentido para la letra dentro de una expresión algebraica.

En el ítem c) se propone que caractericen el conjunto de valores de *a* para los que la expresión es múltiplo de 4. Se trata de trascender la exploración numérica para formular –y luego validar– una propiedad general. Para resolver esta actividad, los estudiantes pueden desplegar las estrategias que estuvieron utilizando en las actividades anteriores: realizar la cuenta $16 \times 15 + 44 = 284$ y dividir por 4 a este resultado; o apoyarse en el trabajo de lectura de expresiones argumentando que $16 \times 15 = 4 \times 4 \times 15$, por lo tanto es múltiplo de 4, y como 44 es también un múltiplo de 4, $16 \times 15 + 44$ será múltiplo de 4, como se puede observar en algunas producciones.

Las siguientes producciones fueron elaboradas por estudiantes de segundo año de una escuela de la Provincia de Buenos Aires que no trabajaron con todas las actividades que se presentaron anteriormente.

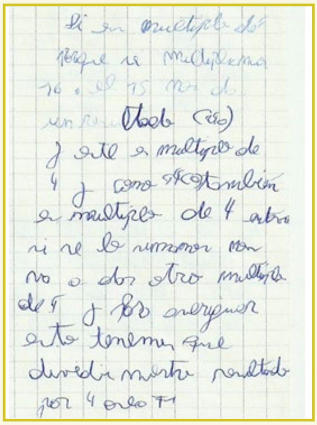
VICTORIA


① a Si, es cierto porque para que un número sea multiplo de 4, los dos ultimos cifras tienen que formar un multiplo de 4 como por ejemplo 84 o que terminen en 0

b Podriamos cambiar la letra a por los siguientes números: 48, 84, 88, etc. Ya que estos son multiplos de 4.

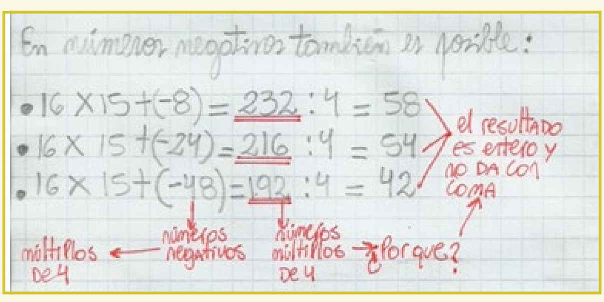
Durante la clase, Victoria aborda el inciso a) haciendo las cuentas con calculadora y obtiene el número 284. Luego usa el criterio de divisibilidad del 4 para afirmar que el resultado es múltiplo de 4. En el inciso b) propone ejemplos precisando que los números que suma deben ser múltiplos de 4 pero no deja registrado cómo controla que el resultado es múltiplo de 4.

Gonzalo[1]



Gonzalo enuncia que si a un múltiplo de 4 le suma otro múltiplo de 4, el resultado será múltiplo de 4. Sin embargo pareciera no considerar que ese sea un argumento suficiente para justificar su producción. Para validarla, realiza la cuenta de dividir.

Santiago



1. Transcribimos textualmente el escrito del alumno con el propósito de facilitar su lectura: "Sí, es múltiplo de 4 porque si multiplicamos 16 o el 15 nos da un resultado (240) y este es múltiplo de 4 y como 44 también es múltiplo de 4 entonces si se los sumamos nos va a dar otro múltiplo de 4 y para averiguar esto tenemos que dividir nuestro resultado por 4, o sea 71".

Esta actividad puede estudiarse en el campo de los números naturales o en el de los números enteros. Santiago reemplaza con algunos números negativos y controla que todos sean múltiplos de 4. Para afirmar si el resultado es múltiplo de 4 realiza la cuenta de dividir y verifica que "el resultado es entero y no da con coma". En esta producción se puede observar que para Santiago el signo igual anuncia el resultado de una cuenta y no una relación de equivalencia, que es el uso que se le da en el trabajo algebraico. Si bien para los docentes esta idea puede resultar sencilla, para los estudiantes puede no serlo, por lo que estas diferencias tienen que ser tenidas en cuenta desde la enseñanza.

Es posible que los estudiantes, al producir estos u otros ejemplos para el ítem b), intuyan una condición general para los valores que puede tomar la variable: "La variable se puede reemplazar por cualquier múltiplo de 4". El ítem c) invita a avanzar hacia la formulación de esta conjetura (que en las producciones anteriores pareciera estar implícita), para luego proponer un trabajo en torno a su validación.

Para movilizar estos análisis se pueden proponer preguntas como: "Los números que ustedes usaron son múltiplos de 4, ¿qué otros números puedo usar?" o "¿Se puede reemplazar por cualquier múltiplo de 4?". Estas preguntas tienen la intención de hacer explícita la idea que si se reemplaza la variable por múltiplos de 4, el resultado de todo el cálculo será múltiplo de 4.

A partir de producciones como la de Gonzalo en el ítem a), se puede plantear una nueva actividad y sumar más preguntas: "¿Será verdad lo que dice Gonzalo, que 'si a un múltiplo de 4 le sumo otro múltiplo de 4, el resultado también es múltiplo de 4'?", o "¿Cómo podríamos estar seguros sin necesidad de hacer la cuenta de dividir?". De manera similar a lo realizado antes para los múltiplos de 3 (ver actividad 5 de la Parte 1), se puede avanzar en una validación de esta conjetura.

Al igual que en la actividad 1, para avanzar hacia un estudio exhaustivo de los valores que puede tomar la variable, se puede proponer que se analice la expresión para valores de la variable que no sean múltiplos de 4. Si se lo considera adecuado, es posible agregar ítems que, manteniendo el foco, movilicen cuestiones un poco más complejas en relación con el estudio del dominio de validez de cierta afirmación.

d) ¿Cuáles son todos los valores por los que se pueden reemplazar la variable a para que la expresión $2 \times 15 + a$ sea múltiplo de 4?
e) ¿Cuáles son todos los valores por los que se pueden reemplazar la variable a para que la expresión $15.787 + a$ sea múltiplo de 10?

Desde el inicio, la siguiente actividad compromete a los estudiantes en el análisis de la exhaustividad: deben estudiar la validez de algunas afirmaciones para cualquier valor de la variable. Los diferentes valores que den a las variables no alcanzan para probar la validez de las afirmaciones. En este sentido, se propone que identifiquen regularidades a partir de la lectura de la expresión algebraica.

ACTIVIDAD 3

a) Si es posible, encuentren tres valores de la variable m para los cuales $2m + 1$ sea impar, y tres valores de m para que no lo sea.
b) Si es posible, encuentren tres valores de la variable t para los cuales $2t + 4$ sea múltiplo de 4, y tres valores de t para que no lo sea.
c) Si es posible, encuentren tres valores de la variable n para los cuales $9n + 3$ sea múltiplo de 3, y tres valores de n para que no lo sea.

Esta actividad permite seguir avanzando en la construcción de un tipo de práctica: reemplazar los valores de la variable para analizar si la expresión numérica que queda determinada cumple –o no– cierta condición. A su vez, también se propone discutir con los estudiantes algunas ideas centrales para validar afirmaciones generales cuyo dominio de validez es infinito:

- Probar con algunos ejemplos que cierta condición se cumple, no es suficiente para probar que la afirmación es verdadera. Hay que garantizar que se están considerando todos los casos.
- Un contraejemplo es suficiente para validar la falsedad de un enunciado.

Las expresiones algebraicas que se incluyen en la actividad 3 presentan, por primera vez en esta secuencia, expresiones en las que la variable aparece dentro de un producto ($2m + 1$). Es probable que el docente necesite explicitar en este momento que $2m$ es otra forma de escribir $2 \cdot m$ o $2 \times m$, ya que podría interpretarse, por ejemplo, que $2m$ es un número entre 20 y 29.

En los ítems a) y c) los estudiantes se enfrentarán con que no pueden encontrar valores de la variable que cumplan algunas de las condiciones pedidas (que den par, en el primer caso, y que no sea múltiplo de 3, en el segundo). Tras varios intentos, quizás comiencen a sospechar que no existen valores de la variable que cumplan con lo pedido. En el ítem b), al explorar con valores pares e impares de t, los estudiantes encontrarán que la expresión es múltiplo de 4 solo para los valores de t pares.

A medida que se comparten con toda la clase algunos ejemplos de cada uno de los ítems, se pueden ir dejando por escrito las conjeturas generales que los estudiantes seguramente irán formulando. Por ejemplo, para a) y c) pueden aparecer formulaciones del tipo "para cualquier valor de la variable, $2m + 1$ da impar", "no existe ningún valor de m que haga que $2m + 1$ dé par" o "para cualquier valor de la variable, $9n + 3$ es múltiplo de 3".

Para el ítem b), por ejemplo, pueden surgir:

- "$2t + 4$ da como resultado un múltiplo de 4."
- "$2t + 4$ no da múltiplo de 4."
- "$2t + 4$ da múltiplo de 4 para algunos valores de la variable" o "$2t + 4$ a veces da múltiplo de 4".
- "$2t + 4$ da múltiplo de 4 si t es múltiplo de 4."

Una vez que todas las conjeturas están escritas en el pizarrón, el docente puede proponer, como una nueva tarea, estudiar cada una de estas conjeturas: es decir, analizar si son verdaderas o falsas y tratar de explicar por qué. Las validaciones de la conjetura que los estudiantes elaboren en el ítem a) pueden basarse en el estudio de finitos casos; esto es, a partir de diez casos en los que se solo se analice la cifra de las unidades del número $2m$ que, sea cual sea el valor de m, termina en 0, 2, 4, 6 u 8. Otros argumentos podrían analizar que $2m$ es par para cualquier valor de m porque está multiplicado por 2 y, al sumarle 1, siempre dará impar.

Para validar que la expresión $9n + 3$ es múltiplo de 3 para cualquier valor de la variable, pueden surgir frases parecidas a las del ítem a). "Como 9 es múltiplo de 3, $9n$ siempre es múltiplo de 3". Otra posibilidad es que transformen la expresión $9n$ en la expresión equivalente $3 \times 3 \times n$, lo que permite argumentar que $9n + 3$ es múltiplo de 3 para cualquier valor de n. También es posible que los argumentos de los estudiantes estén apoyados en explicaciones generales sin usar la letra n. Por ejemplo, "hacer la cuenta $9 \times 2.354.627$ es lo mismo que hacer $3 \times 3 \times 2.354.627$, y va a pasar lo mismo cuando se reemplace a n con cualquier otro valor". Para producir este tipo de explicación a partir de dar un valor determinado a la variable, es importante que los estudiantes no realicen los cálculos para poder leer la información que porta la expresión.

El análisis de la validez de expresiones como "$2t + 4$ da como resultado un múltiplo de 4" o "$2t + 4$ no da múltiplo de 4" es un momento interesante para trabajar la noción de *contraejemplo*, idea que puede resultar poco familiar para los estudiantes: en matemática, para justificar que una afirmación es falsa, basta con encontrar un ejemplo en el que la afirmación no se cumpla.

Luego, el docente podría proponer una nueva tarea que retome la frase "$2t + 4$ a veces da múltiplo de 4", que surge del análisis del ítem b), donde se pregunta por valores de la variable t para los cuales $2t + 4$ es múltiplo de 4. Como ya mencionamos, a partir de la primera exploración, los estudiantes podrían haber elaborado conjeturas tales como "si t es múltiplo de 4 o si t es par, la expresión va a ser múltiplo de 4", y haber brindado argumentos para validarlas. Esta puede ser una buena oportunidad para analizar que si bien ambas conjeturas son correctas, con una (*t* puede ser múltiplo de 4) se obtienen menos múltiplos de 4 que con la otra. Para esto, el docente puede preguntar "si a la variable *t* se le dan valores múltiplos de 4, ¿cuánto tiene que valer *t* para que $2t + 4$ valga 16?". No se espera que los chicos respondan a partir de plantear ecuaciones sino que exploren con diferentes valores de *t*. Tampoco se pretende que los estudiantes validen que con todos los valores pares de *t* se consiguen todos los múltiplos 4. Más bien, se trata de que identifiquen las diferencias entre una y otra conjetura.

Como ya hemos señalado, con las actividades presentadas en este apartado se comienzan a desplegar algunas ideas sobre el concepto de variable y sobre la lectura de información de una expresión que incluye una variable. A su vez, se refuerzan ciertas propiedades sobre múltiplos y divisibilidad que se desplegaron en las primeras actividades. Si bien todas estas ideas se irán enriqueciendo y precisando con el trabajo que se propone a continuación, nos parece importante que queden identificadas en las carpetas de los estudiantes.

Sobre la *noción de múltiplo*, por ejemplo:

- Si se suman dos múltiplos de un mismo número, el resultado será también múltiplo de ese número, no hace falta hacer la cuenta para comprobarlo. Por ejemplo: $480 + 24$ es múltiplo de 4 porque 480 es múltiplo de 4 y 24 también.

Sobre la *noción de variable* y la validez de una afirmación:

- Una afirmación en la que intervienen exclusivamente números puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo: la afirmación "$2 \times 6 + 4$ es múltiplo de 4" es verdadera, mientras que la afirmación "$2 \times 6 + 4$ es múltiplo de 5" es falsa.
- Si en una expresión con números y operaciones hay una letra, esta se puede reemplazar por distintos valores. A esta letra se la llama variable.

continúa en la página siguiente >>

<< viene de la página anterior

- En una afirmación que involucra una expresión con números y letras, hay que analizar para qué valores de la letra es verdadera la afirmación.
- Si se quiere estudiar la validez de una afirmación en la que intervienen expresiones con variables, se pueden dar tres situaciones excluyentes:
  - Que sea verdadera para cualquier valor de la variable, en este caso la afirmación será verdadera.
  - Que sea verdadera para algunos valores de la variable y para otros no, en este caso la afirmación será falsa.
  - Que ningún valor de la variable sirva para lograr que la afirmación sea verdadera, por lo tanto será falsa.

También, a partir del análisis de la exhaustividad de una afirmación general (propuesta en las actividades 1, 2 y 3), se puede registrar:

- Cuando se estudia la validez de una afirmación general, por ejemplo sobre todos los números que cumplen una condición, se necesita analizar cuáles números la cumplen y cuáles no la cumplen. Por ejemplo: en la expresión $15 \times 16 + a$, si se reemplaza a la variable a por un múltiplo de 4, el resultado será múltiplo de 4; y si se reemplaza por un número que no es múltiplo de 4, el resultado no será múltiplo de 4.

ACTIVIDAD 4

Determinen si las expresiones dan como resultado números pares para cualquier valor de m, para ningún valor de m o para algunos valores de m sí y para otros no.

a) $4m + 2$
b) $(2m + 1) \times 6$
c) $(m + 1) \times 5$
d) $(2m + 1) \times 7 + 2$

La intención de esta actividad es que los estudiantes profundicen el estudio de los cuantificadores (para todo valor, para algunos valores, para ningún valor de la variable) asociados al estudio de la validez de afirmaciones generales sobre expresiones algebraicas. Se espera que, apoyados en el tipo de trabajo desplegado en actividades anteriores, exploren asignando diferentes valores a las variables y que, a partir de allí, elaboren conjeturas generales que incluyan los cuantificadores, para luego validarlas.

El análisis del primer y el segundo ítem permite elaborar conjeturas parecidas a las estudiadas en la actividad 3, "4 (o 6) por cualquier número, da par". También, apoyándose en relaciones que se establecieron en actividades anteriores, es posible que escriban "$4m + 2$" como "$2 \times 2 \times m + 2$" y puedan argumentar sobre la paridad de la expresión.

El estudio de los valores de m para los que $(m + 1) \times 5$ es par, puede dar lugar al estudio exhaustivo de los valores de m para los que la expresión es par y de aquellos valores para los que no lo es.

El ítem d) puede resultar novedoso, ya que no hay valores de la variable para los que $(2m + 1) \times 7 + 2$ dé como resultado un número par. Hasta ahora se trabajó con validaciones generales en relación con "cualquier valor de la variable" o "para algunos valores". Este ítem incorpora la necesidad de argumentar sobre una expresión que nunca cumple con la condición pedida.

Como cierre de esta parte en la que se comienza a trabajar con letras como variables, se puede proponer una actividad que permita revisar lo que se estuvo trabajando y, a la vez, identificar qué es lo que los alumnos piensan que es lo importante y debe ser registrado. Esto contribuye a que los alumnos organicen su estudio, identificando lo que han aprendido y las posibles dudas, pero también a que el profesor tome decisiones acerca de cómo continuar con el tema.

Una posibilidad, entre las distintas instancias posibles para el repaso que se desarrollan en el documento "La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática" (Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2005), es la escritura de una breve síntesis, a modo de "machete".

Escriban en parejas, para cada ítem, “un machete” que les recuerde cómo analizar que:

a) El resultado de $6m + 9$ es múltiplo de tres para todo valor de la variable m.

b) El resultado de $6m + 9$ no es múltiplo de 6, sea cual sea el valor de m.

Las siguientes actividades proponen que sean los estudiantes los productores de expresiones con variables que cumplan ciertas condiciones.

PARTE 3: PRODUCIR Y ANALIZAR EXPRESIONES CON VARIABLES

¿Qué se puede cambiar en una expresión sin que cambie lo que se afirma?

Hasta aquí, los alumnos analizaron distintas expresiones con letras y números. En esta última parte de la propuesta, se avanza en la producción de expresiones que cumplan ciertas condiciones, lo que llevará también a descubrir expresiones equivalentes. El desafío que se presenta ahora a los alumnos es analizar si cambia la validez de lo que se afirma cuando se producen ciertas transformaciones en una expresión.

ACTIVIDAD 1

En cada caso, completen la expresión para que sea verdadera para cualquier valor de la variable m:

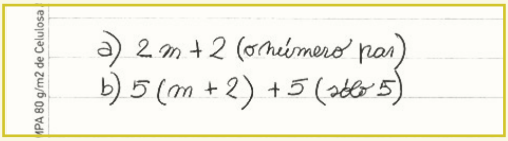
a) $2m + \ldots\ldots$ es par

b) $5 \times (m + 2) + \ldots\ldots$ es múltiplo de 5

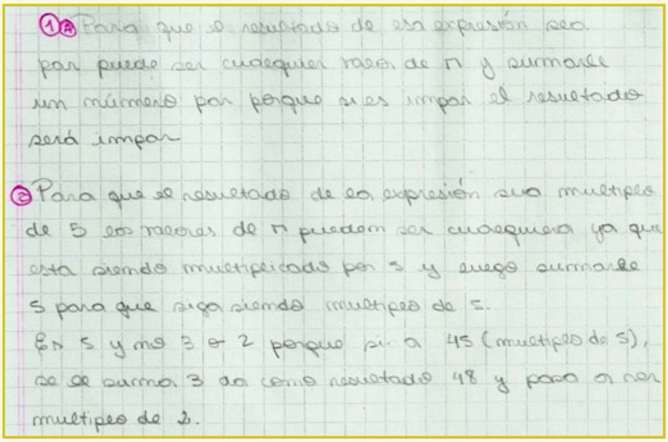
En la actividad 1 de la Parte 2 se propuso a los estudiantes que completaran expresiones numéricas con el objetivo de que cumplieran cierta condición (que sea par, múltiplo de 3, etc.). En este caso, se invita a que completen expresiones con variables, lo que involucra el control de dos condiciones al mismo tiempo: la que refiere a la divisibilidad de la expresión y la que refiere a los valores de la variable (en este caso, para cualquier valor).

A continuación se analizan diferentes producciones de alumnos de segundo año de la Provincia de Buenos Aires:

Rocío


a) 2 n + 2 (o número par)
b) 5 (n + 2) + 5 (sólo 5)

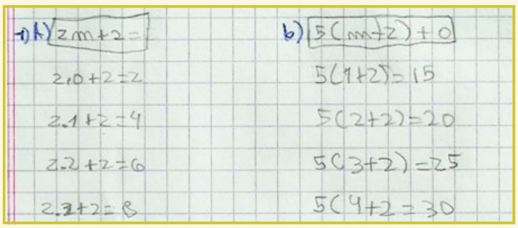
En el primer ítem, Rocío usó el paréntesis para aclarar que se puede completar con cualquier número par y, en el segundo, para aclarar que hay una sola posibilidad. Luego explicó sus decisiones por escrito:


1 A Para que el resultado de esa expresión sea par puede ser cualquier valor de n y sumarle un número par porque si es impar el resultado será impar

2 Para que el resultado de la expresión sea múltiplo de 5 los valores de n pueden ser cualquiera ya que está siendo multiplicado por 5 y luego sumarle 5 para que siga siendo múltiplo de 5.
Es 5 y no 3 o 2 porque si a 45 (múltiplo de 5), se le suma 3 da como resultado 48 y para a ser múltiplo de 2.

En esta explicación, Rocío menciona las características que tienen que cumplir los números que elige como respuesta (los pares) y también caracteriza a aquellos que no sirven como respuesta (los impares). Si bien pareciera haber una validación "circular" de por qué los pares funcionan (porque los impares no), esta explicación puede dar lugar a un trabajo en torno a la exhaustividad de su afirmación. Lo mismo hace en el segundo ítem, donde dice que solo puede completarse con el número 5 y también intenta mostrar que con otros valores no da múltiplo de 5. Aquí, la exploración se reduce a tres ejemplos (5, 2 y 3) que no completan todos los casos posibles. No es una caracterización exhaustiva de los números como la de par-impar que usó en su primer análisis. De esta manera, Rocío pierde el control sobre algunos ejemplos que no están abarcados en los que propone.

TOMÁS[2]



1) a) 2m+2 =

2.0+2=2

2.1+2=4

2.2+2=6

2.3+2=8

b) 5(m+2)+0

5(1+2)=15

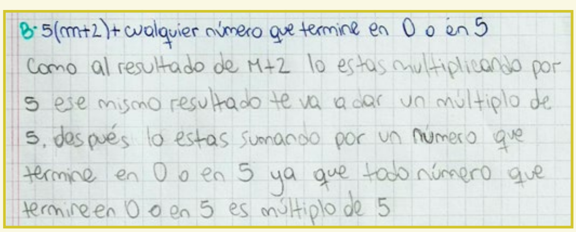
5(2+2)=20

5(3+2)=25

5(4+2=30

Seguramente apoyado en ideas movilizadas en actividades anteriores, Tomás concibe a la letra *m* como una variable que puede ser reemplazada por diferentes valores. Aún necesita realizar las cuentas para corroborar o para explicar que el resultado cumple con las condiciones pedidas.

JULIETA



B: 5(m+2)+ cualquier número que termine en 0 o en 5

Como al resultado de M+2 lo estas multiplicando por 5 ese mismo resultado te va a dar un múltiplo de 5, después lo estas sumando por un número que termine en 0 o en 5 ya que todo número que termine en 0 o en 5 es múltiplo de 5

La explicación que escribe Julieta presenta rasgos de generalidad. En su escrito afirma que, sin importar el valor de *m*, el primer

2. Transcribimos textualmente el escrito del alumno con el propósito de facilitar su lectura: a) 2*m* + 2 b) 5 × (*m* + 2) + 0

término es múltiplo de 5. El análisis de las producciones de Tomás y Julieta podrían ayudar a Rocío a ajustar su respuesta del ítem b), considerando al 0 y otros números que terminen en 0 o 5 como posible número con el que completar la expresión $5 \times (m + 2)$. Del mismo modo, la producción de Rocío, que hace referencia explícita a "para cualquier valor de *m*", puede colaborar a que Julieta explicite esto en su escrito.

Es frecuente que las producciones muestren posiciones diferentes respecto de la formulación y la explicación de un enunciado general. Estas diferencias pueden ser tomadas como punto de partida para el análisis y la discusión con todo el conjunto de la clase. Por ejemplo, se pueden escribir las producciones en el pizarrón y dar unos minutos para que el resto de la clase las analice con una nueva tarea:

- entender cada una de ellas
- decidir si dan respuesta a lo que se plantea
- identificar similitudes y diferencias entre ellas

Entendemos que la discusión colectiva puede ayudar a que todos los estudiantes valoren lo que le aporta una producción a otra y, a su vez, servir para que se fortalezca el trabajo de argumentación atendiendo tanto al análisis de la validez de las afirmaciones como al de la generalidad de las respuestas. La actividad que sigue invita a los estudiantes a producir ellos una expresión que cumpla con ciertas condiciones. Es una actividad difícil, pero valiosa para que los estudiantes exploren con diferentes expresiones, analizando si cumplen o no con las condiciones pedidas.

ACTIVIDAD 2

En cada caso, escriban una expresión con una variable para que la afirmación sea verdadera.

a) La expresión …… da un número impar para cualquier valor de la variable.
b) La expresión …… da un múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable.
c) Ningún valor de la variable hace que la expresión …… dé un múltiplo de 6.

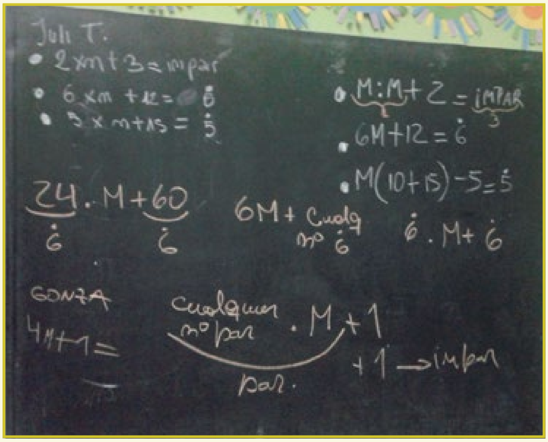
Se propone que en esta actividad haya dos momentos de trabajo bien definidos y diferenciados para los estudiantes: uno en el que en pequeños grupos produzcan expresiones que cumplan lo pedido y otro de análisis colectivo de las mismas, con la intención de estudiar la validez de algunas producciones y compararlas.

Una vez que los estudiantes ensayaron y produjeron expresiones, el docente puede invitar a un representante de cada pequeño grupo de trabajo a escribirlas en el pizarrón para luego ponerlas en discusión. Es importante que en este espacio se genere la posibilidad de analizar, discutir y aprender algo nuevo a partir de otras producciones. Para ello, será importante que el docente:

- Decida previamente qué tipo de producciones serán las elegidas para discutir de forma grupal. Lo ideal para generar un nuevo momento de producción colectiva es que estas sean diferentes entre sí, que algunas sean correctas y otras no, que no sean muy disruptivas para el conjunto de la clase (por más que estén bien).
- Explicite claramente que se trabajará en torno a una nueva tarea: analizar cada una las expresiones algebraicas escritas en el pizarrón, dar una explicación de por qué cumplen o no lo pedido, y completar o modificar aquellas expresiones que resulten incompletas o erróneas.
- Contemple un nuevo tiempo de trabajo, diferenciado claramente de la actividad que se estaba resolviendo en un principio.

Veamos algunos ejemplos de producciones con distintos grados de generalidad y diferentes escrituras para dichas expresiones.

La siguiente imagen muestra las producciones que quedaron escritas en el pizarrón, luego de realizar esta actividad, con el mismo grupo de alumnos cuyas producciones fueron analizadas en la actividad 1 de esta parte.



En este pizarrón, se observan expresiones con distintos grados de generalidad y diferentes escrituras para dichas expresiones. Algunas de estas escrituras son convencionales, en otras aparecen combinados símbolos matemáticos con expresiones en lenguaje coloquial.

En este curso ya se había trabajado con la expresión $2t + 1$, por lo que la profesora les pidió que ensayaran con otras expresiones para completar el ítem a). En el pizarrón se observa que Gonza, para el ítem a), escribió la fórmula $4m + 1$ y que luego agregó que el 4 puede ser reemplazado por cualquier número par. En cambio, Juli T. produjo la fórmula $2m + 3$. Su explicación fue que "como todo número multiplicado por 2 me va a dar par, le sumé un número impar, así me daba como resultado impar". Probablemente, ambos se apoyaron en $2t + 1$ para producir su fórmula: Juli generaliza a partir del 2 y Gonza lo hace a partir del 1.

Entre las producciones para este ítem, se encuentra una que se diferencia de las demás: "M:$M + 2$ = impar". Esta expresión involucra una división utilizando dos veces la variable m. En su explicación, el estudiante explicita que la primera parte de la cuenta dará 1, cualquiera sea el valor de m que se reemplace.

En las expresiones que armaron para el ítem b) se observan diferentes grados de generalidad en sus escrituras: "$6m + 12$", "$6m +$ cualquier número múltiplo de 6". La discusión colectiva puso en diálogo las diferentes producciones, llegando a algunas conclusiones:

- Para elaborar una expresión que dé impar para cualquier valor de la variable m, se puede escribir un número par multiplicado por m más un número impar. Por ejemplo: $4m + 1$ da impar para cualquier valor de la variable m.
- Para elaborar una expresión que dé múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable m, se puede escribir un múltiplo de $6m$ más un múltiplo de 6.
- Para elaborar una expresión en la que ningún valor de la variable m haga que la expresión sea múltiplo de 6, a $6m$ hay que sumarle un número que no sea múltiplo de 6. Por ejemplo: $6m + 13$.

ACTIVIDAD 3

En cada caso, estudien para qué valores de la variable n:

a) $8n + 2n$ termina en 0

b) $3n + 2n + 1$ da par

c) $3n + 3 + n$ es múltiplo de 4

d) $121n + 1$ es múltiplo de 4

e) $5 \times (n + 3) + n$ es múltiplo de 3

Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes comiencen a transformar una expresión algebraica en otra para poder leer, en la nueva expresión, la información que se necesita para decidir cuáles son los valores de la variable para los que se cumple la afirmación. Aparece una idea de equivalencia de expresiones algebraicas apoyada en un proceso de transformación: "dos expresiones son equivalentes si al transformar una, obtengo la otra".

Del mismo modo que en las actividades anteriores, es posible que los estudiantes comiencen con un trabajo de exploración numérica que les permita formular ciertas regularidades y validarlas a partir de leer o transformar las expresiones. En algunas de las aulas en las que se trabajó este problema ocurrió que los estudiantes, inmersos en un trabajo exploratorio, reemplazaron por un valor una n de la expresión y con un valor diferente la otra n del término. Por ejemplo, en el ítem a), cambiaron la primera n por 2 y la segunda por 3, obteniendo: $8 \times 5 + 2 \times 3$. Es una oportunidad para que los estudiantes aprendan que, en cada expresión, la letra n representa el mismo número. Seguramente será el docente quien tenga a su cargo explicitar esta idea.

En el inciso a), es posible que prueben con varios ejemplos y observen que siempre el número obtenido termina en 0. En las actividades anteriores ya fue discutido que probar con ejemplos y realizar los cálculos ayuda a formular conjeturas pero no permite explicar por qué una regularidad ocurre para cualquier valor o para ningún valor de la variable. Es decir, reemplazar por números y realizar los cálculos no permite explicar por qué la expresión $8n + 2n$ termina en cero para cualquier valor de la variable n.

Nuevamente, el recurso del ejemplo genérico puede ser una buena estrategia al alcance de los estudiantes. Por ejemplo, una validación para el ítem a) podría ser:

$$\begin{aligned}\text{Si } n = 3 &\rightarrow 8 \times 3 + 2 \times 3 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + (3 + 3)\\ &\rightarrow 8 \text{ veces } 3 + 2 \text{ veces } 3 = 10 \text{ veces } 3.\end{aligned}$$

Tomando esta producción, el docente puede preguntar al conjunto de la clase si pasa lo mismo si $n = 45.639$. ¿Cómo se puede explicar que $8 \times 45.639 + 2 \times 45.639 = 456.390$?

Del mismo modo, el docente puede proponer realizar este trabajo con las letras y llegar a la conclusión que

$$8n + 2n = (n + n + n + n + n + n + n + n) + (n + n) = 10n.$$

Ambas expresiones son iguales para cualquier valor de la variable. Esto se puede afirmar, ya que las transformaciones se basan en propiedades de los números y las operaciones.

En el ítem b), es posible que algunos estudiantes sumen los tres términos de la expresión (obteniendo $6n$) y respondan que para cualquier valor de la variable la expresión da un número par. Esta producción puede confrontarse con aquellas que controlen que se suma 5 veces el valor de la variable y luego el 1. De nuevo, la noción de producto como sumas reiteradas del mismo número es una idea central para poder comparar las dos estrategias mencionadas anteriormente.

A partir de las transformaciones que los estudiantes tienen que realizar sobre una expresión para obtener otra, aparece un sentido del signo igual (=) diferente al que habitualmente ellos reconocen (anuncio de un resultado). En este caso, el igual da cuenta de que ambas expresiones son iguales “para cualquier valor que tome la variable”, es decir, son *expresiones equivalentes*.

El ítem d) presenta una novedad respecto de los anteriores: para poder decidir el dominio de validez de la afirmación (es decir, todos los valores de la variable que hacen verdadera la afirmación) se necesita transformar el $121n + 1$. La descomposición $120n + n + 1$ puede ayudar a establecer que $120n$ es múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable, pero $n + 1$ no lo será para cualquier valor. La actividad se redirecciona a estudiar qué valores de la variable provocan que $n + 1$ sea múltiplo de 6. Si se considera conveniente, se puede proponer una nueva tarea de producción de expresiones parecida a la actividad 1. Por ejemplo:

Completen las expresiones para que sean verdaderas para cualquier valor de la variable:

a) $2m + \ldots\ldots$ es múltiplo de 4

b) $5 \times (m + 2) + \ldots\ldots$ termina en 0

Algunos estudiantes sostienen que no es posible completar las expresiones para que “sea múltiplo de 4 para cualquier valor de la variable”. Al completar la expresión con un número concreto logran que, por ejemplo, la primera expresión sea múltiplo de 4 para algunos valores de la variable y para otros no. La decisión sobre cómo completar estas expresiones conlleva una dificultad mayor en relación con la actividad 1 de esta parte, ya que se necesita completar con expresiones que también contengan a la variable *m*. La actividad 3, en la que aparecen expresiones con dos o tres términos con la misma variable, puede ser un buen punto de apoyo para abordar esta actividad.

Con el objetivo de avanzar en la sistematización de lo trabajado, se puede proponer a los estudiantes producir en parejas algunas expresiones que cumplan ciertas condiciones y que luego registren las recomendaciones que le darían a un compañero o que anotarían en un machete. En función de los conocimientos del grupo, distintas parejas podrían trabajar con distintos ejemplos y avanzar en una síntesis con enunciados de mayor nivel de generalidad, elaborados por el conjunto de la clase.

ACTIVIDAD 4

a) Escriban dos expresiones con una variable de modo que se verifique que:

   ……… es múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable.

   Ningún valor de la variable hace que ……… sea múltiplo de 6.

b) ¿Qué recomendación le darían a un compañero para ayudarlo a inventar una expresión con una letra que, para cualquier valor que se le dé a la letra, tenga como resultado un múltiplo de 6?

c) ¿Qué recomendación le darían para inventar otra expresión que para algunos valores dé un resultado múltiplo de 6 y para otros no?

Independientemente de los ejemplos que se elijan y de las recomendaciones que elaboren los alumnos, será importante revisar el uso de los cuantificadores, precisar el nivel de generalidad de lo que se afirma y destacar que transformar una expresión en otra equivalente es una estrategia útil para advertir relaciones y determinar para qué valores de la variable se cumple una determinada condición.

REFLEXIONES FINALES

En las actividades anteriores se presentó una entrada posible al trabajo algebraico, apoyado en diferentes conocimientos aritméticos con que los estudiantes llegan a la escuela secundaria. En la Parte 1, si bien solo se utilizaron expresiones numéricas, se promovió un razonamiento con rasgos de trabajo algebraico. En el marco aritmético las relaciones no son relevantes, se esconden u ocultan en el resultado de la cuenta. En el marco algebraico, en cambio, se "leen" las relaciones que ofrece la cuenta o se transforma la cuenta para identificar una nueva relación.

En la Parte 2 se trabajó en torno a la lectura y las posibles transformaciones de expresiones algebraicas, que estuvieron al servicio de la formulación de conjeturas y la validación de las mismas. Para este trabajo fue central la idea de que una letra que forma parte de una expresión puede/debe ser reemplazada por diferentes valores; es decir, las letras se conciben como variables.

La necesidad de validar propiedades que surgen del análisis de las distintas actividades es una de las cuestiones que atraviesa todo el documento. Muchas veces ocurre que en ese intento de validación, los chicos usan ejemplos para explicar algo que observan y que va más allá de los números que ponen en juego en dicha explicación. Es resumen, los alumnos ven en los ejemplos que ellos mismos proponen ciertas regularidades útiles para explicar la propiedad que se está estudiando. Por ejemplo, para explicar que impar + impar = par, los estudiantes pueden argumentar del siguiente modo,

$$1243 + 3245 = 1242 + 1 + 3244 + 1 = 1242 + 3244 + 2,$$

y explicar: "Desarmé al 1243 para que me quede el anterior, que es par + 1; lo mismo hice con el 3245. Después sumé los pares y los unos y me dio par". A este tipo de argumentos se los conoce como *ejemplos genéricos*, porque si bien se basan en un caso particular, ese caso es tomado como representativo de aquello que se quiere explicar.

El siguiente párrafo propone una reflexión sobre dos tipos diferentes de ejemplos para el tratamiento de la generalidad:

> [...] los ejemplos cobran valor cuando –producidos o no por el alumno– están insertos en el marco de una cierta problematización. La función que cumple el ejemplo en la producción de una ley general depende entonces de la actividad realizada alrededor del mismo. En función de esta actividad, el resultado puede ser que el ejemplo juegue un papel importante en el análisis de la validez de una propiedad o, por el contrario, que el alumno no llegue a establecer ninguna regularidad a partir de los ejemplos, o sea que el ejemplo no sea ejemplo de algo.
>
> Muchas veces los alumnos trabajan sobre un caso particular, estableciendo el carácter necesario de una cierta propiedad a través de un razonamiento sobre ese caso. Esto es muy diferente de pensar que es suficiente para afirmar la validez de una propiedad probar que se verifica en algunos ejemplos. ¿En qué reside la diferencia? En el primer caso, hay un razonamiento que permite deducir la necesidad de una cierta ley, aunque ese razonamiento se realice sobre un caso particular; en el segundo, la comprobación es de tipo empírico y no permite acceder a las razones que hacen posible la validez de la propiedad con la que se está trabajando (Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2001: 68).

En su recorrido futuro, los estudiantes seguramente tendrán que aprender a trabajar con ecuaciones. Un trabajo algebraico como el desplegado en esta propuesta, en el que se estudia el dominio de validez de una afirmación que incluye una expresión algebraica y donde las letras representan variables, ofrece buenas condiciones para que los estudiantes comprendan que una ecuación representa una afirmación sobre la que hay que determinar el dominio de validez de la misma.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, Abraham

1994 “Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics”, en *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, nº 3, Vancouver, FML Publishing Association, pp. 24-35.

Cambriglia, Verónica; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen

2010 “Procesos colectivos de generalización”, en III REPEM – Memorias, Santa Rosa, La Pampa, Argentina. <http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2049.pdf> [consulta: 29 de noviembre de 2019]

Chemello, Graciela y Crippa, Analía

2011 “Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?”, en Díaz, Adriana L. (coord.), *Enseñar matemáticas en la escuela media*, Buenos Aires, Biblos, pp. 55-77.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Secretaría de Educación)

2001 “Actualización Curricular. 7º grado. Documento de trabajo”, Buenos Aires, Dirección General de Planeamiento. <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/integrado.pdf> [consulta: 2 de diciembre de 2019]

2005 “Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento nº 2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática”, Buenos Aires, Dirección General de Planeamiento. <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf> [consulta: 2 de diciembre de 2019]

Mason, John

1996 "Expressing Generality and Roots of Algebra", en Bednarz, Nadine; Kieran, Caroline y Lee, Lesley (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht, Kluwer Academic, pp. 65-86.

Ministerio de Educación (República Argentina)

2011 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico Educación Secundaria 1º y 2º / 2º y 3º* años, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <http://repositoriorecursos-download.educ.ar/repositorio/Download/file?file_id=1a820389-3f95-4bfb-9d54-a4630322f7c1&rec_id=110570> [consulta: 6 de diciembre de 2019]

Sadovsky, Patricia

2005 *Enseñar matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Del Zorzal.

Sessa, Carmen

2005 *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, Buenos Aires, Del Zorzal.

CAPÍTULO 2

Las alturas de un triángulo: la construcción de su definición

Sabrina Maffei, Rodolfo Murúa y Carmen Sessa

INTRODUCCIÓN

En la elaboración de esta propuesta se ha considerado el eje "Geometría y medida" que proponen los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para la Formación General del Ciclo Básico de la Educación Secundaria. En particular, para primero y segundo año se propone:

> El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran:
>
> - determinar puntos que cumplan condiciones referidas a distancias y analizar afirmaciones acerca de propiedades de las figuras y argumentar su validez (Ministerio de Educación, 2011).

El objetivo de esta secuencia es dotar de mayor significado a la noción de alturas de un triángulo y discutir en el aula acerca de su trazado. En esta secuencia la definición aparece como una síntesis, como un punto de llegada de un trabajo sobre un tipo de problema, invirtiendo el camino usual de la definición a los problemas de aplicación.

Sostenemos que este modo de organizar los aprendizajes en la escuela permite dotar de mayor sentido para los estudiantes a las definiciones de nociones matemáticas. Esperamos que este capítulo pueda ser un ejemplo de lo que afirmamos.

Desde nuestro punto de vista, el trabajo de los estudiantes en torno a la resolución de una o varias tareas se constituye como el punto de partida de otro trabajo que se dirime en el espacio colectivo y que necesita una fuerte presencia del docente. Preferimos no referirnos a ese espacio con el término de “puesta en común” porque creemos que en este espacio no solamente *se ponen en común* las estrategias de los alumnos, sino que es un momento de *trabajo sobre las resoluciones* que puede incluir compararlas, analizarlas entre todos o generalizar, y donde el docente puede agregar preguntas que no estaban explícitas en el enunciado inicial de la actividad.

En este capítulo sugerimos intervenciones docentes para ese espacio de discusión colectiva. Incluimos también comentarios acerca de las intenciones didácticas que tuvimos al diseñar las actividades, anticipamos posibles estrategias de los alumnos y proponemos ideas para la gestión docente en el aula. Además, incluimos producciones de alumnos y registros de lo ocurrido al desarrollar estas actividades en un segundo año de la Escuela Secundaria nº 69[1] del distrito de Lomas de Zamora. La experiencia se desarrolló en dos clases semanales de dos horas cada una, durante tres semanas.

HACIA LA DEFINICIÓN DE LA NOCIÓN DE ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

La propuesta está orientada a que los alumnos comprendan la noción de alturas de un triángulo, identifiquen que los triángulos tienen tres alturas —una por cada lado que se elija como base– y aprendan a trazarlas.

Las cuatro primeras actividades que presentamos enfrentan a los alumnos con tareas que ponen en juego las tres alturas de un triángulo, aún antes de haber trabajado una definición de ese objeto. Son justamente preparatorias de la definición, en el sentido de que se construyen ahí relaciones que luego

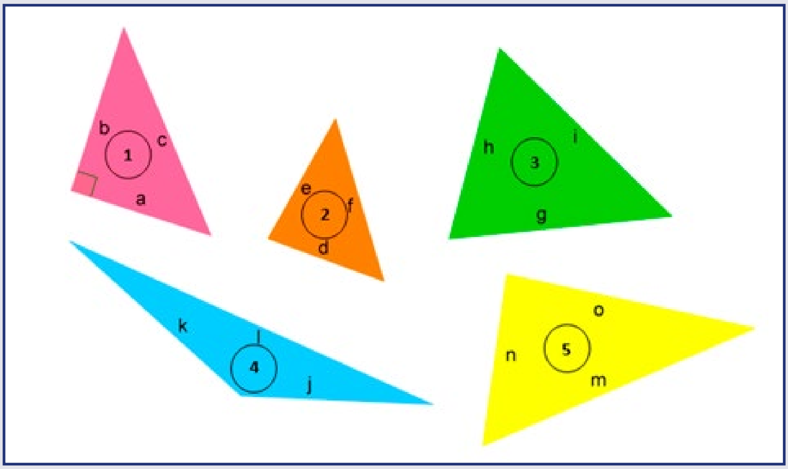
1. Equivalente a 1er año de educación secundaria en las jurisdicciones con nivel primario de 7 años.

se plasman en ella. Por esta razón, no utilizaremos todavía el nombre formal "altura", la intención es preparar el terreno para arribar a la definición de altura de un triángulo relativa a un lado.

ACTIVIDAD 1

Ubiquen, si es posible, estos cinco triángulos (imagen 1) dentro de los renglones. Si lo consideran necesario, pueden apoyar los triángulos sobre ellos. Una vez que se aseguraron que caben entre los renglones, dibujen el borde del triángulo.

1



Esta actividad fue pensada para ser resuelta en pequeños grupos. Cada grupo necesita un juego de triángulos y una hoja en la que hay dos pares de rectas paralelas (renglones) a una distancia de 6 cm, inclinadas con respecto a los bordes de la hoja.

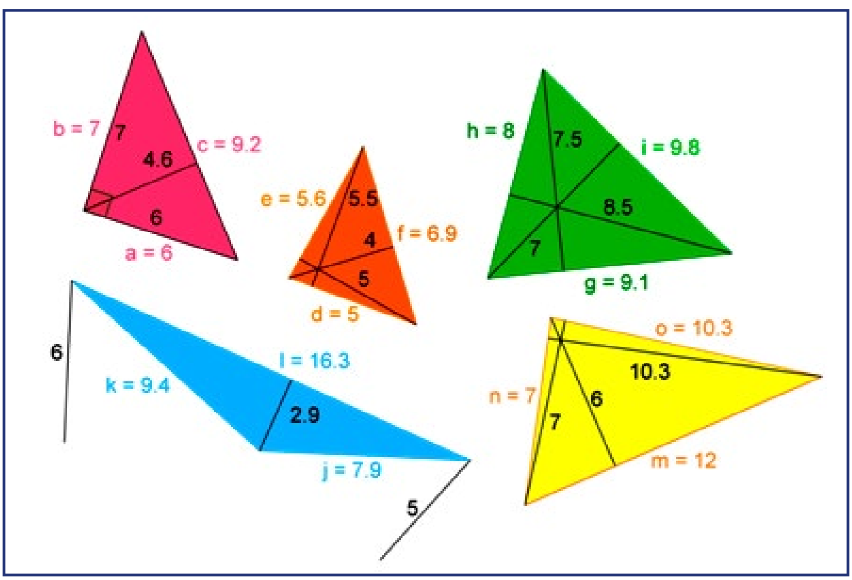
Las medidas de los cinco triángulos pueden ser diferentes, siempre que respeten las características que se explicitan en el análisis, ya que cada triángulo está elegido para trabajar distintas cuestiones relacionadas con sus alturas y con la distancia entre los renglones. También es conveniente preparar un juego de triángulos de mayor tamaño (por ejemplo, triplicando los lados y la distancia entre renglones) para ser usados en el pizarrón del aula al momento de hacer aclaraciones o durante la discusión colectiva.

Se busca que los estudiantes adviertan que, dependiendo de la posición en que se lo ubique, un triángulo puede entrar o no en la banda determinada por dos renglones. Al dar la consiga pensamos que se puede conversar acerca de la característica geométrica que tienen los renglones en una hoja, con la intención de hacer explícito que son paralelos.

A su vez, cada uno de los triángulos propuestos para el desarrollo de la actividad tiene por intención dejar al descubierto alguna relación que será reutilizada en las siguientes actividades. Algunos de esos triángulos pueden ser ubicados de más de una manera, por ejemplo el rosa (1), el naranja (2) y el celeste (4). El triángulo amarillo (5) puede ser ubicado de una sola manera y el verde (3) no entra dentro de los renglones en ninguna posición. Volveremos sobre esto cuando presentemos, un poco más adelante, las anticipaciones de las estrategias que pueden desarrollar los alumnos y las posibles intervenciones docentes.

Consideramos problemáticos a los triángulos verde (3) y amarillo (5). En el primer caso, las alturas tienen medidas mayores a 6 cm. En el segundo, el triángulo entra solamente si se apoya el lado más largo sobre un renglón. Las medidas de las alturas y los lados se explicitan en la imagen que verán a continuación, pero no están disponibles en los materiales de los alumnos.

2



Una posible estrategia puede ser que los alumnos quieran ubicar los triángulos sin apoyarlos en los renglones. En este caso no tendrían inconvenientes en colocar entre los renglones a los triángulos rosa (1), naranja (2) y celeste (4). Otra estrategia puede ser que apoyen los triángulos sobre un renglón. Respecto del triángulo celeste, es muy probable que sea apoyado sobre el lado *l* porque queda más "achatado". En caso de no surgir en la clase, dejaremos para una actividad posterior el hecho de que este triángulo también puede apoyarse sobre el lado *j*.

Una vez terminado este primer momento de trabajo, se organiza una discusión colectiva en torno a lo hecho por cada grupo. Para comenzar se pueden hacer algunas preguntas como: "¿Pudieron ubicar todos los triángulos? ¿Cómo? ¿De cuántas maneras se pueden ubicar para que entren?". Si el docente lo considera necesario, puede acompañar el diálogo dibujando en el pizarrón dos paralelas a una distancia de 18 cm y recortando unos triángulos grandes cuyos lados midan el triple. En esta primera actividad no esperamos argumentaciones haciendo referencia a las medidas de las alturas de los triángulos ya que justamente este conocimiento es algo que se quiere construir. Este tipo de explicaciones serán puestas en juego en la actividad 5, una vez definida la noción de altura de un triángulo. No obstante, sí esperamos que los estudiantes concluyan que algunos triángulos se pueden ubicar entre los renglones en cualquier posición, que otros pueden no entrar en una posición pero sí en otra, y que algunos no entran de ningún modo.

LA UBICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Al discutir si era posible ubicar los triángulos, todos los estudiantes estuvieron de acuerdo que tres de los cinco triángulos –el rosa (1), el naranja (2) y el celeste (4)– se podían ubicar entre los renglones en diferentes posiciones y que era imposible ubicar el triángulo verde (3). Para el triángulo amarillo no hubo unanimidad: si bien los tres grupos fueron cambiando la posición del triángulo, intentando ubicarlo dentro de los renglones, solo uno de ellos lo logró, apoyando el lado *m* sobre uno de los renglones. Los otros dos grupos dijeron que no entraba.

Uno de los alumnos preguntó por qué no podía ser ubicado el triángulo verde. Luego de manipular los triángulos y de ubicar nuevamente entre los renglones aquellos que era posible ubicar, el alumno enunció que la distancia entre renglones y las medidas del triángulo estaban relacionadas: "Hay algo ahí entre los renglones y las medidas de los triángulos”. Para hacerse entender, apoyó cada uno de los lados del triángulo sobre renglón y mostró que el triángulo “no entra”.

ACTIVIDAD 2

a) Dibujen un segundo renglón de manera tal que el triángulo verde quede dentro de los dos renglones y que la distancia entre ellos sea lo más “chica” posible. El triángulo puede estar apoyado sobre el renglón.
b) ¿Cómo hicieron para medir la distancia entre un renglón y el otro?
c) Si ahora se quiere apoyar el triángulo en el lado *h*, ¿cuál sería la distancia mínima entre los dos renglones? ¿Y en el lado *g*?

Esta actividad fue pensada para ser resuelta en grupos y respetando la misma constitución de los grupos de la actividad 1. Se les entrega a los alumnos otra hoja A4 apaisada con un solo renglón dibujado y el mismo triángulo verde utilizado en la actividad 1. El renglón puede estar pintado con un color para diferenciarlo del que tendrán que trazar los alumnos. Además es necesario que dispongan de regla y escuadra.

A los alumnos se les entrega solamente el ítem a), las otras dos consignas serán dadas después de concluido el trabajo en grupos en torno a dicho ítem.

Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan:

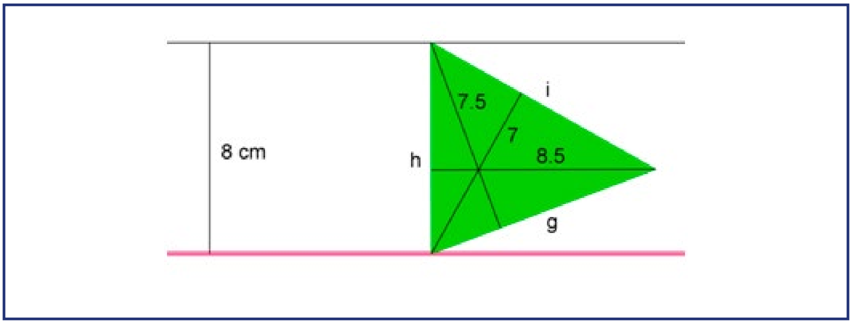
- Discutir que un lado del triángulo tiene que estar apoyado sobre el renglón para que la distancia entre los dos renglones sea mínima e identificar sobre cuál de ellos debe apoyarse.

- Identificar que, según el lado que se apoye el triángulo, la distancia mínima entre los renglones varía.
- Estudiar cómo medir la distancia entre dos rectas paralelas para luego relacionar este concepto con la idea de las alturas de un triángulo.

Suponemos que los alumnos ya saben trazar una recta paralela a otra que pase por cierto punto. Sin embargo, antes de comenzar con la actividad el docente puede preguntar: "Para trazar el segundo renglón tienen que saber cómo trazar rectas paralelas, ¿se acuerdan cómo hacerlo?". Proponemos esta intervención porque el foco de la actividad no está en este asunto.

Una estrategia que puede surgir en la clase para responder el ítem a) es colocar el lado menor del triángulo (lado *h*) perpendicularmente al renglón dado y luego trazar la recta paralela por el vértice que no está apoyado (en la imagen 3 se indican los valores de las alturas para facilitar el análisis pero los alumnos no tienen las alturas trazadas ni sus medidas):

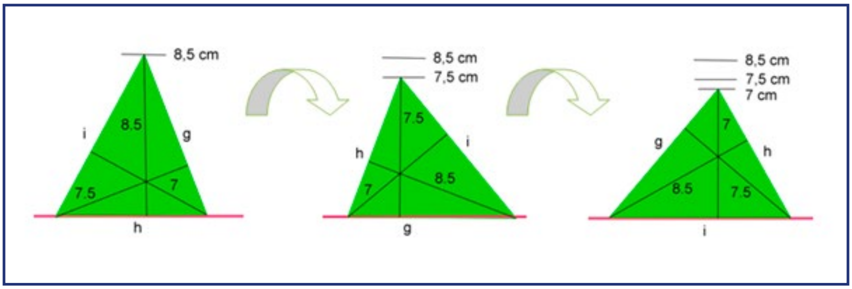
3



Puede ocurrir que aquí el alumno se dé cuenta que si lo rota un poquito, haciendo centro en el vértice que tiene apoyado sobre el renglón, la distancia entre los renglones disminuye. El alumno que se dé cuenta de que el triángulo debe estar apoyado sobre el renglón para que la distancia pedida sea mínima podría ir probando con cada lado (imagen 4) e ir haciendo marquitas en la hoja.

Cuando el docente vaya recuperando las posibles estrategias en el espacio colectivo, puede ir preguntándoles a los alumnos la medida de la distancia

4



entre los dos renglones. Si surge la primera estrategia de poner el lado menor perpendicularmente al renglón, se podría preguntar qué ocurre con la distancia entre los renglones si voy "girando" el triángulo.

Luego de recolectar las medidas a las que llegó cada grupo, se avanza con el ítem b) y se pregunta: "¿Cómo hicieron para medir la distancia entre un renglón y el otro?".

Probablemente, los alumnos contesten con expresiones como "pusimos la regla derecha". En este caso preguntaríamos: "Pero ¿qué significa 'derecha'? ¿No se puede medir torciendo un poco la regla? Si le tuvieran que explicar a alguien como tomar esa distancia, ¿qué le dirían?". Con estas preguntas se pretende ir haciendo explícita la noción de perpendicularidad.

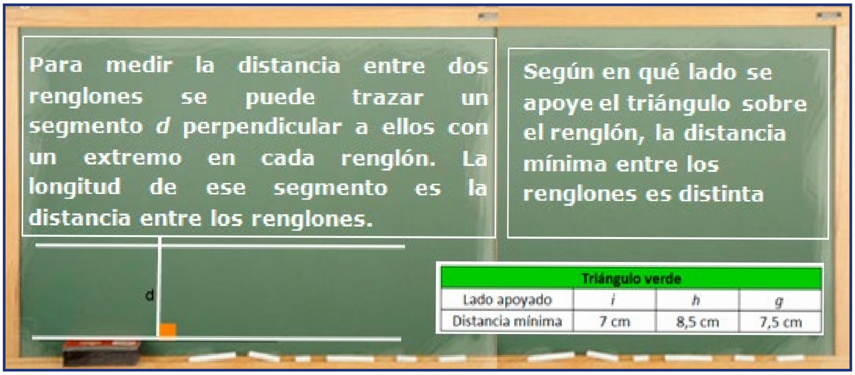
Puede ocurrir que algunos alumnos digan que la distancia mínima es 6,9 o 7,1 cm. En este caso se puede elegir el valor más repetido o el promedio de medidas que se obtuvieron al apoyar el lado *i* sobre el renglón. Habrá que conversar sobre los inevitables errores y aproximaciones que se obtienen al medir con cualquier instrumento.

Se espera concluir que la distancia mínima entre los renglones es de 7 cm y para lograr esa medida mínima el lado *i* del triángulo tiene que estar apoyado sobre el renglón dibujado. Una observación que se podría hacer es que la menor distancia entre los renglones no tiene relación con apoyar el menor lado del triángulo.

Por último, se plantean las preguntas del ítem c): "Si ahora se quiere apoyar el triángulo en el lado *h*, ¿cuál sería la distancia mínima entre los renglones? ¿Y en el lado *g*?".

Al finalizar esta actividad, pueden quedar escritas conclusiones como las de la imagen 5, que incluyen una tabla con medidas. Esta organización de la información en una tabla con tres columnas será un punto de apoyo para que los alumnos identifiquen en actividades posteriores que los triángulos tienen tres alturas, una relativa a cada lado.

5



EXPERIENCIA DE AULA

El trazado de dos rectas paralelas

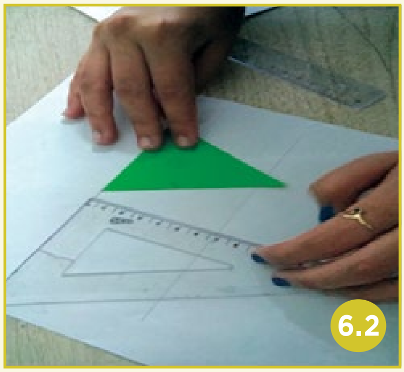
Como en la actividad anterior se les pidió a los estudiantes el trazado de un segundo renglón para que pueda ser ubicado el triángulo verde, conversamos en el aula sobre cómo tienen que ser estos renglones, si por estar "inclinados" dejaban de ser renglones paralelos y qué instrumentos de geometría son necesarios para su trazado. Al preguntar cómo se trazan dos rectas paralelas, un alumno lo explica de la siguiente manera: se traza un segmento, se marcan dos puntos que estén a igual distancia de los extremos y luego se unen esos puntos.

Los estudiantes usaron este camino, pero se encontraron que el segundo renglón no era paralelo al primero. Los puntos marcados no quedaban a igual distancia porque no se aseguraban la perpendicularidad entre el renglón y la regla con la que medían esa distancia. En el pizarrón realizamos este procedimiento exagerando la inclinación de la regla: los alumnos reclamaron que se pusiera la regla "derecha" y discutimos a qué nos referimos cuando queremos colocar la regla "derecha". Así, surgió la necesidad de usar la escuadra.

Para muchos alumnos, el uso de la escuadra y la regla para trazar dos rectas paralelas fue algo nuevo. En el pizarrón no solo se mostró cómo se trazaba sino que se discutió qué aportaba el uso de la escuadra y por qué era necesario usar ese instrumento. Además, se abordaron las nociones de paralelismo y perpendicularidad.

En un grupo se desarrollan dos estrategias diferentes.

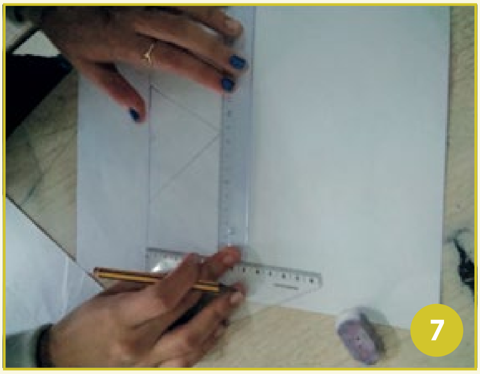

6.1

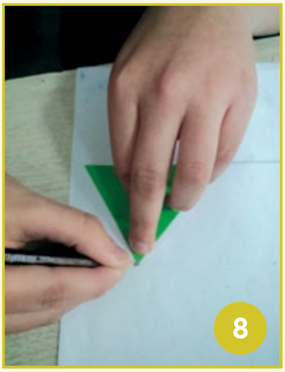

6.2

A la izquierda (imagen 6.1) se muestra a la alumna que, con una escuadra y sin trazar ningún segmento, toma la distancia que hay entre uno de los lados del triángulo y el vértice opuesto. Luego, traza el segundo renglón a una distancia igual a la medida sobre el triángulo. Para corroborar si esa es la mínima distancia posible entre los renglones, apoya el triángulo sobre los dos lados restantes y observa si "entra o no entra", si "se sale de los renglones" (imagen 6.2).

Otra alumna, del mismo grupo, dibujó el triángulo apoyado sobre uno de los lados. Luego colocó la escuadra y la regla (imagen 7) para trazar un segundo renglón. Finalmente, midió la distancia que había entre los renglones.

En otro grupo, los alumnos apoyan un lado del triángulo sobre el renglón y luego marcan el lugar del vértice opuesto a ese lado (imagen 8).



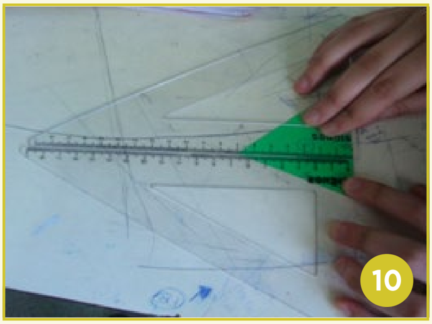


Repiten este procedimiento con los otros dos lados y, a ojo, deciden qué marca está más cerca del renglón. Con regla y escuadra trazan el segundo renglón por esa marca y luego lo miden con la escuadra.

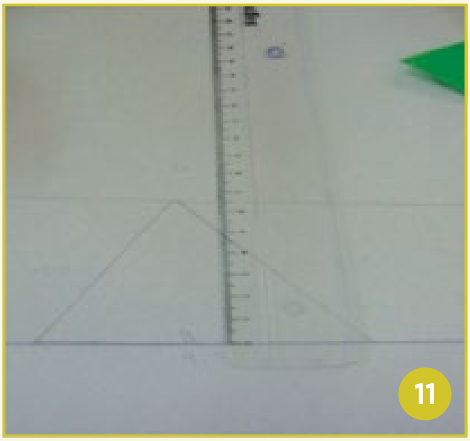
Una dificultad inesperada: el uso de la regla y la escuadra

Al discutir cómo utilizar la regla y la escuadra para completar la tabla del triángulo, surgió un inconveniente no anticipado: cuando los alumnos apoyaban la escuadra para utilizar el ángulo recto, el cero en este tipo de escuadras no está marcado en la base (imagen 9). Por esa razón, la medida a la que arribaban tenía un error considerable.

A un alumno se le ocurrió utilizar dos escuadras, como se muestra en la imagen 10: la escuadra de abajo es la que mide el ángulo recto y la escuadra de arriba, levemente corrida, es la que mide la altura del triángulo relativa al lado en cuestión.



Otro grupo, para evitar este inconveniente, utilizó la regla apoyando la "raya" del cero sobre la base (imagen 11). En el momento no se nos ocurrió intervenir para ver si los alumnos de este grupo reconocían dónde está el ángulo recto que les garantizaba la perpendicularidad de la regla respecto del lado. Como mostraremos a continuación, esta fue la estrategia más utilizada para resolver la actividad 3.



11

La negociación para llenar la tabla

Como habíamos anticipado, debido a los errores de medición, las medidas de las alturas brindadas por los tres grupos fueron diferentes. Para la altura relativa al lado *i* se mencionaron[2] 6,6 cm, 6,7 cm y 6,8 cm. Varios alumnos decían que tenía que ser 6,6 porque era la menor. Hubo que poner en duda este supuesto y conversar sobre los inevitables errores al medir. A pesar de eso, cada grupo quería que fuera "su" medida la que finalmente apareciera en la tabla. Resultó costoso concluir que las tres longitudes podían ser aceptadas y finalmente se llegó a un acuerdo: tomar la medida "del medio", es decir 6,7 cm.

2. En el aula no utilizamos el mismo triángulo que el propuesto en este documento, las medidas de las alturas eran otras.

ACTIVIDAD 3

En parejas, usando el triángulo celeste y una hoja lisa, determinen cuál es la distancia mínima entre dos renglones para poder ubicarlo apoyado en el lado *j*, en el lado *k* y en el lado *l*. Luego completen la tabla:

Triángulo celeste			
Lado apoyado	*j*	*k*	*l*
Distancia mínima			

Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan:

- Retomar la discusión en torno a que un lado del triángulo tiene que estar apoyado sobre el renglón para que la distancia entre los dos renglones sea mínima.
- Identificar la medida de las alturas de un triángulo obtusángulo (en términos de distancia entre renglones).

A diferencia de las primeras dos, esta actividad fue pensada para ser resuelta en parejas. Es una oportunidad para que los estudiantes puedan retomar las estrategias planteadas y el estar de a dos, aumenta la responsabilidad de cada uno en el trabajo.

Es posible que para completar la tabla los alumnos comiencen trazando un renglón y vuelvan hacia el trabajo realizado en la actividad 2, trazando el segundo renglón. También es posible que intenten medir esa distancia entre renglones sin dibujarlos. Pensamos que al ser el triángulo obtusángulo ambas estrategias pueden generar nuevas preguntas.

Si bien en estas tres primeras actividades se planteó la ubicación de los triángulos entre renglones, creemos pertinente que en el transcurso de las actividades se comience a hablar en el aula de rectas paralelas en vez de "renglones".

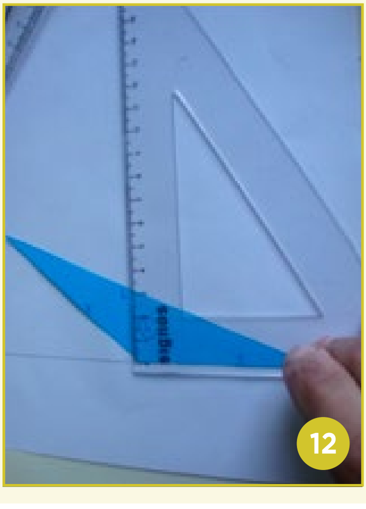
EXPERIENCIA DE AULA

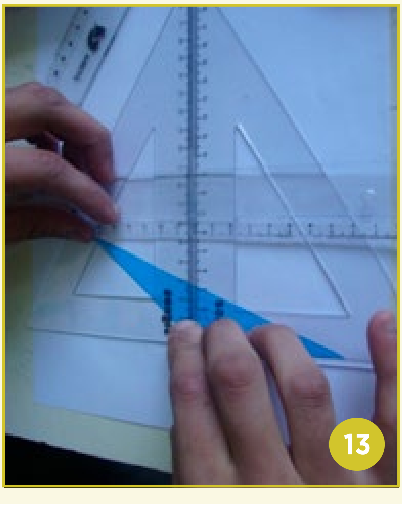
Distintas estrategias para medir las distancias

Al tener una hoja lisa, cada pareja podía utilizar el recurso que quisiese para completar la tabla. Una cuestión que nos llamó la atención es que muchas parejas no dibujaron renglones para identificar las alturas. La primera altura que los alumnos marcaron era la relativa al lado *l* (la interior). Y lo hicieron sin problemas.

Al buscar la distancia mínima relativa al lado *k*, algunos alumnos trataron de medir algo “dentro del triángulo” (imagen 12), aunque rápidamente se dieron cuenta de que había parte del triángulo que “estaba más arriba”.

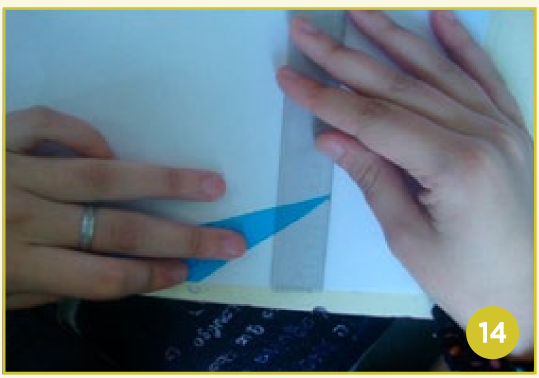
Un alumno, para medir una altura exterior, utilizó dos escuadras y una regla (imagen 13): colocó una de las escuadras apoyando un lado sobre el lado *k*, de manera que el lado reglado le quedara perpendicular a ese lado; la otra escuadra la desplazó levemente, para que el cero coincida con el borde de la primera escuadra. Esta maniobra revela una preocupación por controlar la perpendicularidad y asegurarse precisión en las medidas que busca. Sin embargo, al apoyar la regla sobre el vértice opuesto del triángulo, aparentemente controla el paralelismo “a ojo”.

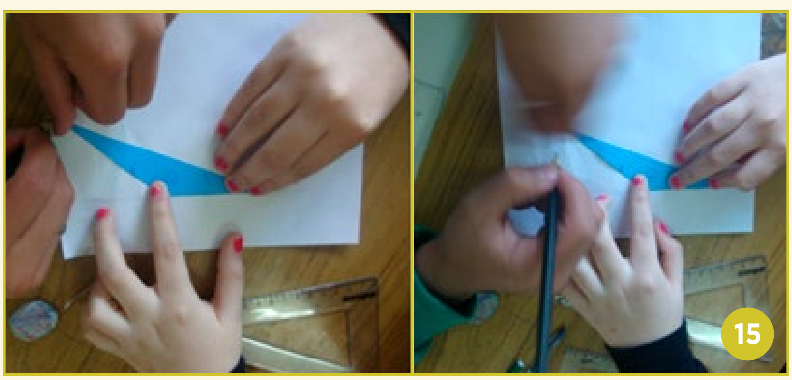




Otra alumna utilizó ingeniosamente el borde de la hoja para apoyar el triángulo y la regla (imagen 14). Al usar el borde de la hoja, pudo tomar medidas de segmentos (no dibujados) que están afuera del triángulo, procedimiento que está muy cerca del trazado de las alturas exteriores de un triángulo obtusángulo.

También hubo una pareja que necesitó dibujar los dos renglones para luego medir la distancia entre ellos. Para el trazado de los renglones se le ocurrió una estrategia muy interesante: primero dibujaron un renglón y luego la alumna iba apoyando el triángulo celeste sobre distintos lugares del renglón y su compañero marcaba con un lápiz el lugar vértice opuesto, teniendo así una marca por cada ubicación del triángulo (imagen 15). En las fotos solo se ven dos ubicaciones del triángulo celeste (por lo tanto, dos marquitas), pero en la clase la pareja ubicó el triángulo en cuatro lugares distintos sobre el renglón.


14


15

Si bien esta estrategia es correcta, los puntos no les quedaban alineados debido a las imprecisiones del marcado. Finalmente, la pareja decidió trazar el segmento paralelo utilizando solo dos marquitas, aunque luego las demás les quedaron fuera del mismo. A diferencia de la estrategia que analizamos antes, estos estudiantes son eficaces para encontrar la medida de la altura correspondiente a ese lado, pero en su construcción no distinguieron ningún segmento entre los muchos que pueden servir para medir la distancia entre las paralelas.

Las alturas exteriores de un triángulo obtusángulo

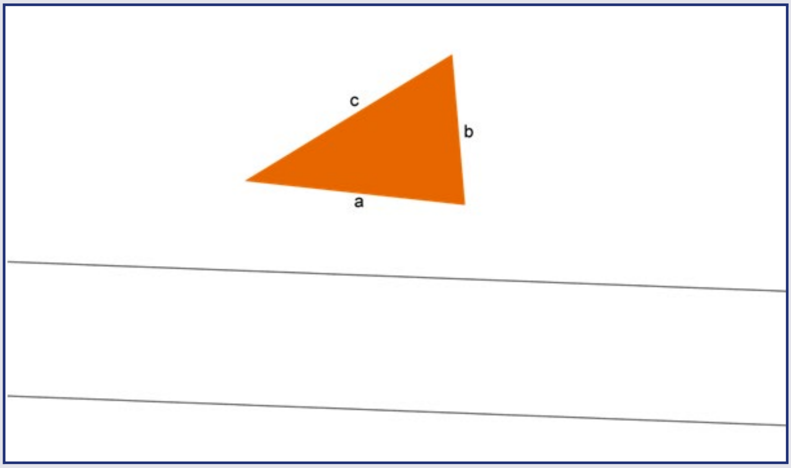
Hay una creencia, quizás justificada, de que para los alumnos es difícil identificar las alturas exteriores de un triángulo obtusángulo. Hemos intentado mostrar cómo al abordar el tema teniendo en cuenta la distancia entre dos rectas paralelas esa tarea se carga de otro significado y posibilita otros abordajes. En nuestra experiencia de aula, como mencionamos al referirnos a las resoluciones de la actividad 3, varios alumnos en un primer momento tenían dudas sobre cómo calcular las medidas de las alturas (para ellos, la distancia entre renglones) relativas a los lados *k* y *j* (las correspondientes a las alturas exteriores). Sin embargo, no tardaron mucho en darse cuenta de que tenían que medir *por fuera* del triángulo.

En la última estrategia mostrada los estudiantes necesitan todavía el trazado de paralelas y si bien atrapan perfectamente la idea de la medida de la altura, no distinguen ningún segmento para calcularla.

ACTIVIDAD 4

En parejas, estudien si se puede ubicar el triángulo entre las dos rectas paralelas apoyando cada uno de los lados sobre una de ellas. Para hacerlo, pueden trazar y medir todos los segmentos que necesiten tanto dentro del triángulo como entre las rectas paralelas. No se puede calcar ni recortar el triángulo (imagen 16).

16



Está actividad está pensada en dos etapas. En la primera etapa, se formarán parejas para discutir el problema planteado. Luego, en una segunda instancia, se juntarán dos parejas para pensar un texto donde tendrán que escribir sus argumentaciones.

Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan:

- Anticipar si un triángulo entrará o no entre dos rectas paralelas prescindiendo de la verificación empírica, es decir, sin poder manipular el triángulo para probar si entra o no.
- Arribar a la noción de altura a partir del trabajo de los alumnos.
- Trazar la altura de un triángulo sin necesidad de ubicarlo entre rectas paralelas.

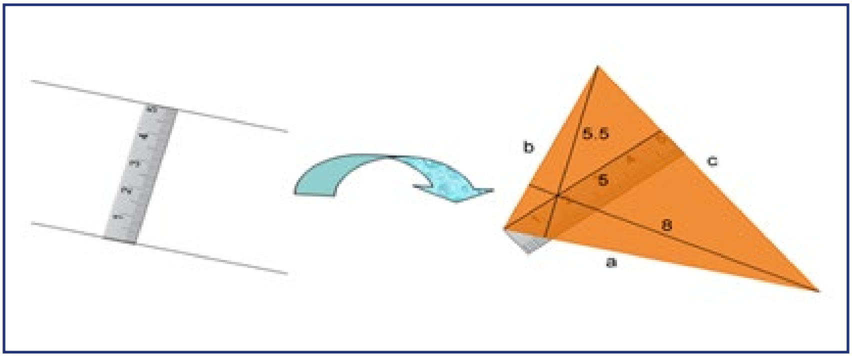
En esta actividad no se les entregará a los alumnos el triángulo recortado. Tendrán que responder las preguntas solamente pudiendo trazar y medir segmentos adicionales dentro (o fuera) del triángulo o entre las rectas paralelas.

Elegimos intencionalmente que la distancia entre las rectas coincida con la menor altura del triángulo. Por esa razón, entra solo apoyado sobre el lado *c*. Suponemos que visualmente (quizás utilicen los dedos, tiritas o una cinta) responderán que el triángulo no va a entrar entre las rectas paralelas apoyado sobre el lado *b,* porque va a "sobrar" triángulo.

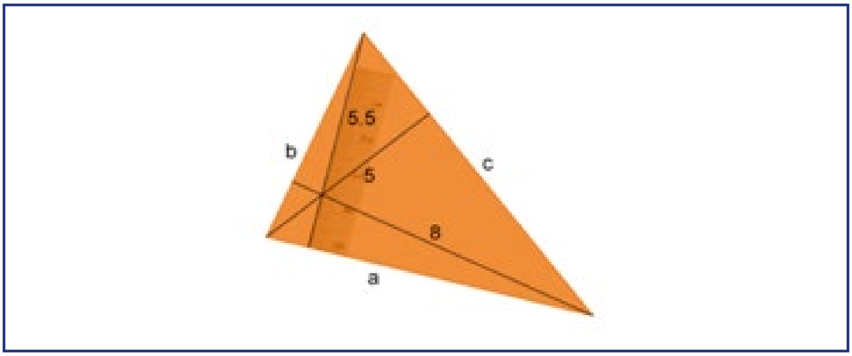
Algunas estrategias que podrían desplegar los alumnos para decidir si el triángulo entrará o no entre las rectas paralelas apoyado sobre los otros lados son:

a) Medir la distancia entre las rectas con la regla y después apoyar la regla perpendicularmente sobre cada lado (imagen 17). Al hacerlo sobre el lado *a*, sobrará triángulo (imagen 18).

17



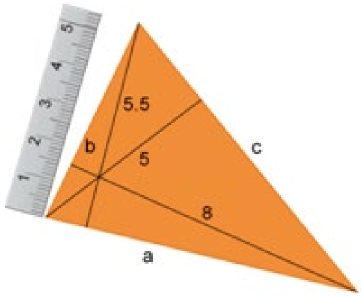
18



Esta estrategia puede surgir sin utilizar la medida de 5 cm. Como mencionamos antes, se puede utilizar un palito o una cinta, hacer una marquita con la distancia entre las rectas paralelas y después trasladar esa medida al triángulo.

b) También se puede comenzar al revés: apoyando la regla perpendicularmente (o una escuadra) al lado *a*, por ejemplo, y tomar la medida de 5,5 cm. Asimismo, puede ocurrir que lo hagan por fuera del triángulo (imagen 19).

19



En la discusión colectiva se analizarán las ventajas de apoyar la regla sobre el lado a hasta tocar al vértice opuesto para luego tomar esa medida, coincidente con la altura relativa a dicho lado. Siguiendo con esta estrategia, después medirían 5,5 cm entre las rectas paralelas, sobrando regla.

c) Por último, puede ocurrir que tomen medidas tanto en el triángulo como en las rectas paralelas y comparen ambas para contestar. Nuevamente, esta estrategia se puede pensar utilizando dos palitos y haciendo las marcas correspondientes.

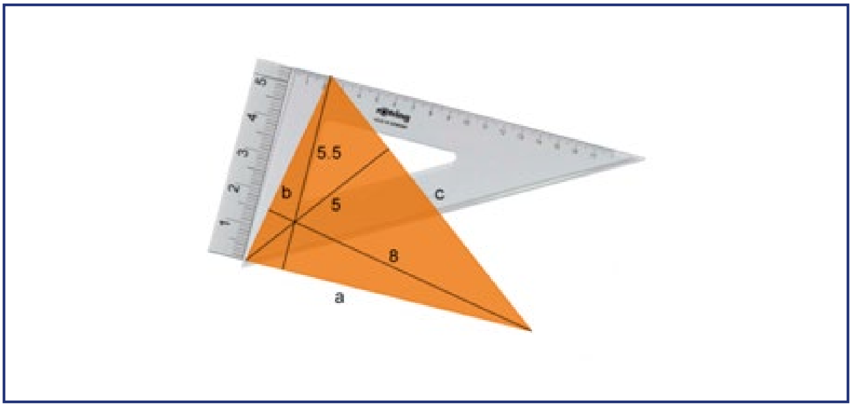
Con cualquiera de estas tres estrategias para anticipar si el triángulo entrará apoyado sobre el lado *c*, los alumnos encontrarán que las medidas son coincidentes. Quizás aquí haya pequeños errores de medición que el docente tendrá que tener en cuenta a la hora de la resolución en pequeños grupos.

En esta actividad se pide una respuesta y una explicación de cómo llegaron a la respuesta. Por lo tanto, en la discusión colectiva se pondrá en juego cómo decidieron si el triángulo entraba o no apoyado sobre cada lado, qué distancias midieron y cómo las midieron. Por ejemplo, en caso de analizar la segunda estrategia, si la regla fue apoyada por fuera del triángulo seguramente se habrá llegado a una respuesta aproximada. Para lograr una medida más exacta, una vez lograda la perpendicularidad entre el lado y la regla se tendría que usar una escuadra hasta tocar al vértice opuesto (imagen 20).

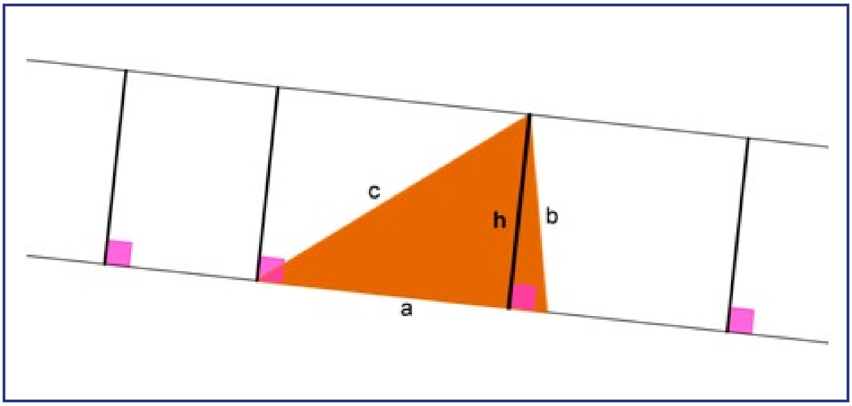
En ese sentido, el docente podría comentar que es más económico medir dentro del triángulo. En caso de no haber surgido entre las estrategias, se puede proponer el trazado del segmento perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto para tomar la medida buscada.

Dado que se trata de apoyarse en el trabajo realizado por los alumnos para arribar a definir el concepto de altura, el docente puede aprovechar el trazado de renglones que estuvo presente hasta aquí para ir hacia la definición. Por ejemplo, puede comenzar con el lado *a* y hacer un dibujo como el de la imagen 21, marcando distintos segmentos perpendiculares a los renglones.

20



21



Luego se puede plantear una pregunta: “¿Todos los segmentos marcados miden lo mismo? ¿Por qué?”. Finalmente, se hará otro dibujo del triángulo sin las rectas paralelas para ir “despegando” la noción de altura al trazado de las mismas.

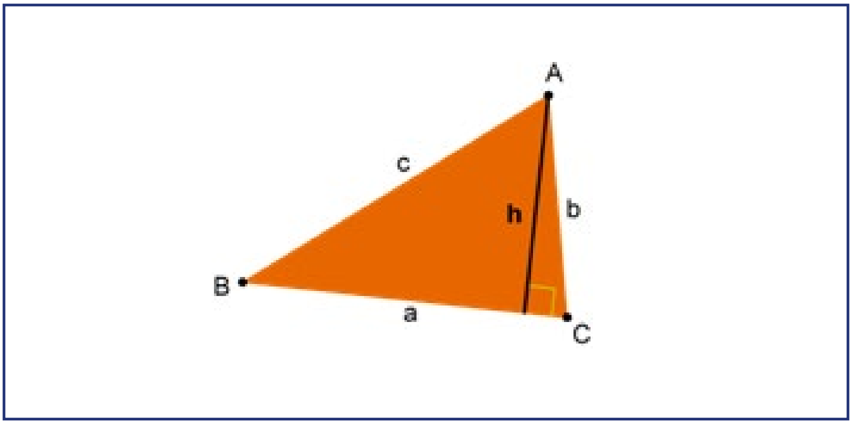
Ahora, el segmento que se puede trazar *sin* las paralelas es el que tiene un extremo en el vértice opuesto al lado a: se puede informar que al segmento h, que tiene un extremo en el vértice opuesto, se lo denomina *altura del triángulo relativa al lado a*. Este segmento:

- Es perpendicular al lado a.
- Tiene un extremo en el lado a y otro en el vértice opuesto.

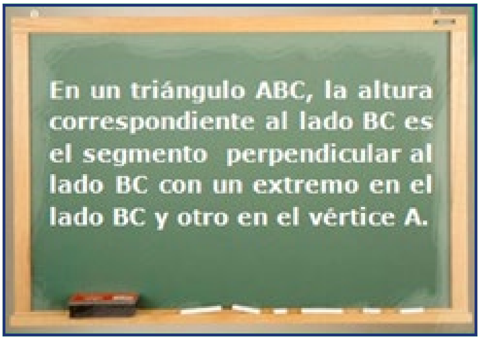
Proponemos poner nombre a los vértices, esto facilitará escribir más adelante la definición general que abarque a los triángulos obtusángulos (imagen 22).

Creemos que es el momento apropiado para dar una definición de altura de un triángulo relativa a un lado (aun cuando esta definición sea provisoria, ya que todavía no se tuvo en cuenta qué es lo que ocurre cuando el triángulo es obtusángulo) (imagen 23).

22



23



Esta definición es provisoria, ya que solo abarca el caso de los triángulos acutángulos. En la actividad siguiente, al considerar los triángulos con un ángulo obtuso, se volverá sobre esta definición para completarla.

ACTIVIDAD 5

a) Peguen el siguiente triángulo y tracen las tres alturas, una relativa a cada lado.
b) Completen la tabla:

Triángulo marrón			
Lado	*A*	*B*	*C*
Medida de la altura			

Para hacer esta actividad, cada alumno recibe un triángulo igual al de la actividad anterior. Al tener que pegar el triángulo, cada estudiante tendrá que identificar que no importa la posición en la cual es pegado. Es posible que algunos estudiantes tracen las paralelas y quizás otros no lo crean necesario. Finalmente, se espera que puedan concluir junto a la docente que todos los triángulos tienen tres alturas, una relativa a cada lado, teniendo en cuenta que hasta aquí no se han presentado triángulos obtusángulos (más adelante se problematizará si esto sigue ocurriendo con cualquier triángulo). Por el momento, se puede aclarar que a veces se dice "el triángulo tiene una altura relativa al lado *c* de 5 cm", queriendo indicar con eso que el segmento altura (perpendicular a *c*, que pasa por el vértice opuesto) mide 5 cm.

Como cierre de la actividad, o un ítem c), se puede proponer la siguiente tarea:

Propongan una medida entre dos rectas paralelas para que el triángulo marrón quepa dentro de ellas apoyando el lado *a* y el lado *c*, pero no apoyando el lado *b*.

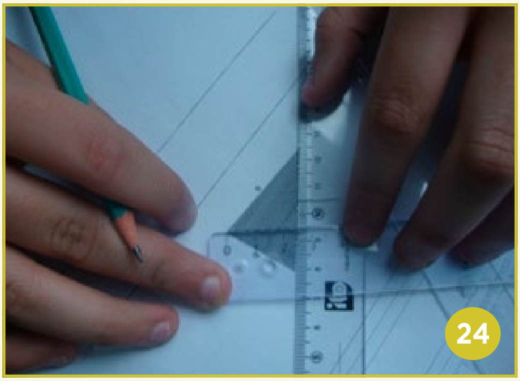
Cabe señalar que, para que esto ocurra, la distancia entre las rectas paralelas tendrá que ser mayor o igual a 5,5 cm y menor a 8 cm.

EXPERIENCIA DE AULA

Las primeras estrategias de los alumnos

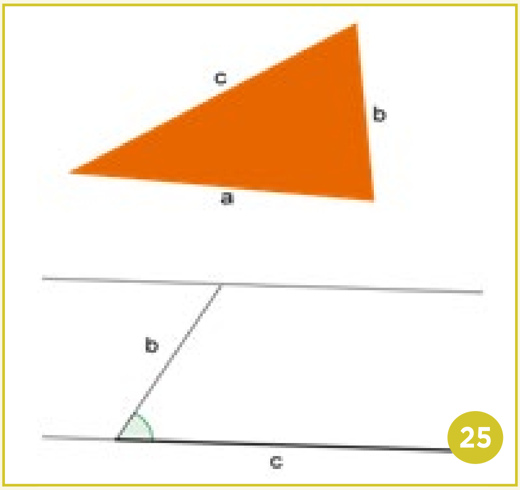
La actividad 4 se desarrolló a lo largo de dos clases y con un triángulo diferente al que figura en el enunciado de este capítulo. En el triángulo que tenían los chicos, el lado *b* medía 2,8 cm, la altura correspondiente al lado *c*, 2,5 cm, y la distancia entre paralelas, 2,5 cm. Con respecto a la pregunta acerca de si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b*, varias parejas decían que no, porque *b* medía 2,8 cm y la distancia entre las paralelas era 2,5 cm.

Con un alumno, Brian, pasó algo llamativo: para decidir si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b*, midió directamente el lado *a*. Consideramos que esto no se debió a un error conceptual sino a un efecto visual, al creer que los lados *a* y *b* formaban un ángulo recto. Suponemos esto porque el mismo alumno identificó bien las demás alturas del triángulo. Por ejemplo, para medir la relativa al lado *c* (imagen 24), Brian apoyó la escuadra sobre la base *c* del triángulo y colocó la regla perpendicularmente, haciéndola pasara por el vértice opuesto para medir su altura relativa.



24

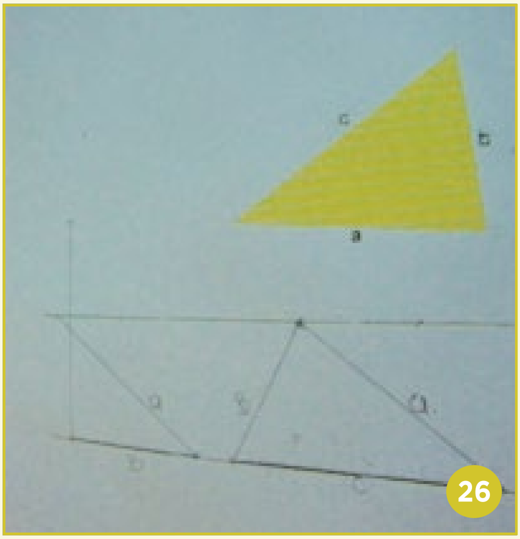
Otro estudiante, Leonel, decidió acerca de si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *c* de la siguiente manera: tomó la medida del lado *c* con una regla graduada y sobre una de las rectas paralelas trazó un segmento con igual longitud al lado *c*; luego tomó la medida del lado *b* con la regla, ubicó el cero de la regla en uno de los extremos del segmento marcado sobre la recta y la movió hasta que cortara a la segunda recta paralela con medida igual al lado *b* (en la imagen 25, mostramos el dibujo que logra). ¡Estaba usando la regla para trasladar medidas, como si fuera un compás! (imagen 25)



25

Luego concluyó que "no puede entrar, porque sería otro triángulo". Aquí es posible que el alumno identificara que el ángulo que formaban *b* y *c* en el triángulo marrón era visualmente distinto al que se formaba entre los renglones. Ante variadas intervenciones nuestras, este alumno seguía opinando que el triángulo no cabía entre las rectas paralelas apoyado sobre el lado *c*. Él veía "claramente" que el nuevo triángulo que se formaba al unir los vértices de *b* y *c* era distinto al original. Quizás en su mente apoyaba los lados *b* y *c* del marrón sobre los marcados en el dibujo y notaba que el tercer lado le quedaba distinto.

Como en la clase habían trabajado hace poco con construcciones con regla no graduada y compás, algunos alumnos preguntaron si se podía utilizar el compás. Se accedió a ese pedido y Ludmila pensó la siguiente estrategia para decidir si el triángulo entraba apoyado sobre el lado *b*: utilizó el compás para trasladar el segmento *b* sobre un renglón. Luego tomó la medida de *a* y la trasladó, pinchando en un extremo del “nuevo” lado *b*, e hizo una marquita en la intersección entre la “circunferencia de radio *a*” (la alumna no trazó la circunferencia entera) y el segundo renglón. Finalmente, tomó la medida de *c* y, pinchando sobre el otro extremo del “nuevo” *b*, se fijó si el triángulo “cerraba bien”, como se puede ver en la figura de la izquierda de la imagen 26. En cambio, como se puede ver a la derecha de la misma imagen, ¡realizando la misma construcción apoyando el lado *c* sí pudo construirlo!



La estrategia nos resultó muy interesante, pero ¿cómo podía validar la alumna que el triángulo que logró hacer entrar apoyado sobre el lado *c* era el mismo que el dado? Suponemos que ella asumía que el triángulo era el mismo porque los tres lados eran iguales, pero en verdad no disponíamos aún de criterios de congruencia de triángulos. Decidimos no desechar esta estrategia y llevar a la próxima clase un triángulo idéntico pero recortado, para que viera si al superponerlo coincidía con el que ella había dibujado. Por otro lado, resolvimos no tomar este procedimiento para la discusión colectiva porque no están involucradas las alturas y además los alumnos no disponen de las herramientas para validar que los triángulos son congruentes.

La escritura como objeto de enseñanza

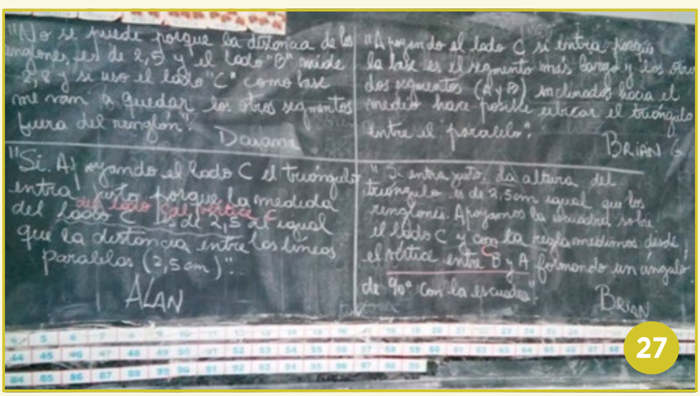
En esta actividad los alumnos tenían que explicar cómo decidieron si el triángulo entraba o no entre los renglones apoyado en cada lado. Al final de la clase retiramos la hoja de cada grupo para leer las explicaciones. En esta primera instancia, las respuestas eran muy vagas, del tipo "si apoyo el triángulo sobre el lado *b* va a sobrar triángulo". Por tal motivo, en la clase siguiente se decidió intervenir indicándoles que expliquen cómo se dieron cuenta, qué procedimiento utilizaron para arribar a esa respuesta. Esto trajo aparejado una dificultad a la cual los alumnos no se habían enfrentado hasta aquí: explicar por escrito un procedimiento. Como era esperable, varios estudiantes tenían imprecisiones a la hora de contar dónde se apoyó la regla, cómo se usó la escuadra, cómo se midió cierta distancia, etc. Cuando les hacíamos notar estas imprecisiones, algunos alumnos se desanimaban un poco debido a la dificultad de la tarea.

Somos conscientes de que explicar una decisión o contar un procedimiento es una tarea compleja, pero sostenemos la importancia de considerarla como objeto de enseñanza en el aula de matemática. Entre otras cuestiones, la tarea de escritura obliga a los alumnos a reorganizar sus ideas, a ser más precisos en el lenguaje y a explicitar las propiedades que fueron puestas en juego. Pero se necesitan varios encuentros con actividades de este tipo para lograr que los estudiantes incorporen la escritura de una explicación como parte de la tarea en matemática. En ese proceso, la actividad de escritura tiene que ir haciéndose más familiar y menos compleja para ellos.

Una decisión docente ante las dificultades en el aula

Luego del primer día de trabajo en el aula con la actividad 4, reflexionamos en nuestro grupo sobre la complejidad de la misma. Por un lado, era la primera vez que los alumnos tenían que justificar algo sin poder manipular el triángulo. Pero además tenían que explicar por escrito y en parejas cómo se dieron cuenta de que el triángulo entraba o no dentro de los renglones, apoyado sobre cada lado. Y finalmente tenían que juntarse con otra pareja, explicarse sus conclusiones y negociar un nuevo escrito definitivo para entregarle a la docente. También, el ponerse de acuerdo, el negociar, el explicarle al otro (y que el otro entienda) son todos objetos de enseñanza que tienen que seguirse trabajando y no deben agotarse en una sola actividad.

Nosotros habíamos retenido una copia de las escrituras por parejas y al notar las dificultades que enfrentaban con la escritura grupal decidimos reorganizar la tarea y pasar a la siguiente instancia: se escriben en el pizarrón cuatro de los escritos elaborados en parejas (imagen 27) y se le entrega a cada alumno un papel para que coloque el nombre de la producción que "prefiere" entre las cuatro. En ese papel no tenía que estar escrita la justificación de su elección. La intención era que todos los estudiantes formaran una opinión de cada uno de los escritos y que estas ideas fueran luego compartidas en el espacio de la discusión colectiva.



Discusión colectiva: del ajuste de las producciones a la construcción de la definición de altura

Las producciones más votadas fueron las últimas dos. La primera producción discutida fue la de Daiana. Para algunos compañeros tenía sentido el argumento utilizado: como la medida del lado *b* es mayor que la distancia entre las paralelas, el triángulo no entra. Era tan fuerte la idea que inclusive los estudiantes que habían contestado que sí entra el triángulo apoyado sobre el lado *c* dudaron. Por lo tanto, decidimos que era necesario que cada uno volviera a su propio trabajo. Se repartieron las hojas con el problema. Con apoyo del triángulo "tamaño pizarrón" que la docente había llevado y de los triángulos chiquitos, se llegó a la conclusión de que sí entra y que la medida del lado *c* no condiciona tal ubicación.

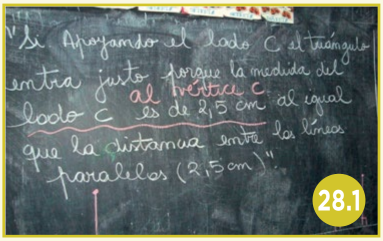
La segunda producción fue la del grupo Brian G. Los dueños de este escrito mencionaron que el triángulo sí entra por la inclinación de los lados. Al leer su explicación fue necesario que ellos aclararan de forma oral a qué se referían con "inclinación", porque no se entendía. Para Brian y Martín (su compañero) el ángulo que forman los lados *a* y *b* es lo que permite que se pudiera ubicar el triángulo entre las rectas.

Luego fue el turno de la producción de Alan. Sus compañeros destacaron que el escrito estaba claro y completo. La docente intervino leyendo frase por frase y haciendo hincapié en si la medida del lado *c* era 2,5.

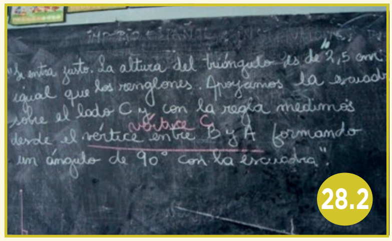
Fue interesante ver cómo tener los escritos en el pizarrón ayudó a contraponer información que en algún momento de la clase todos aceptaban por cierta. Brian M. reconoció en el trabajo de Alan su propio trabajo e intervino para decir que Alan midió desde el lado *c* al vértice opuesto, la altura respecto del lado *c*. Se comparan las dos producciones y, efectivamente, ambos habían medido la altura solo que Alan no utilizó el término "altura".

En el escrito de Brian, el más votado por ser “el más claro y el que explica cómo se hace”, solo es necesario ajustar cómo es llamado el vértice opuesto.

Luego, entre todos hicieron algunos ajustes a estos escritos y la idea de altura quedó “flotando” en el aula. Más aún, como se puede ver en la imagen 28, un grupo utilizó la palabra *altura* para referirse a esa medida de 2,5 cm (imágenes 28.1 y 28.2).



28.1



28.2

La actividad de leer las producciones de otros y decidir cuál les resultaba más clara permitió una vuelta de tuerca sobre el tema de la escritura y volvió a entusiasmar a los estudiantes. En la siguiente clase, para recuperar lo trabajado en la primera, la docente comenzó leyendo las dos últimas producciones y preguntándoles a los estudiantes si recordaban qué ajustes se le habían hecho a cada una y la razón de estas. Se comenzó a evocar el trabajo y nuevamente se acompañó esta actividad con el triángulo “tamaño pizarrón”. A partir del escrito de Brian, elaboraron entre todos la definición de altura: se identificó que era un segmento, que tenía que ser perpendicular al lado y llegar hasta el vértice opuesto. Esa definición de altura se registró en un afiche con la intención de que esté disponible a lo largo de la secuencia y en las carpetas de los alumnos.

Ahí, la docente tomó otra decisión imprevista: que pasaran parejas a trazar las alturas del triángulo en el pizarrón (imagen 29).

Los estudiantes que pasaban a realizarlo eran acompañados por otros que les daban indicaciones desde los bancos. Luego, se les entregó un triángulo recortado igual al usado en la actividad 4 para que los estudiantes lo pegaran y trazaran sus tres alturas.

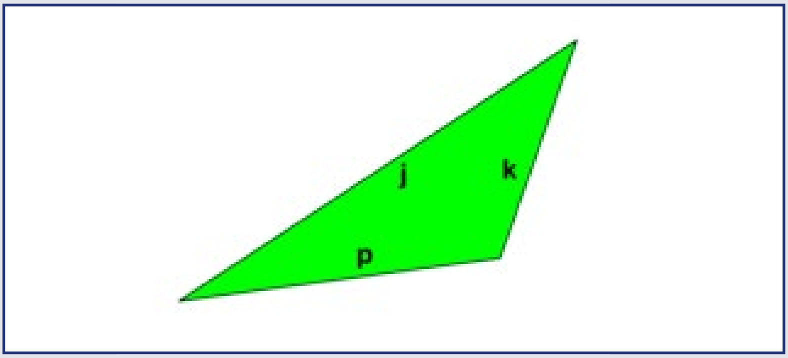
Cabe hacer dos observaciones en relación con esta actividad que se está proponiendo: por un lado, que los alumnos “vean” cómo se traza una altura no implica que puedan hacerlo ellos solos. Más allá de haberlo hecho en el pizarrón, algunos chicos no tenían en cuenta que el segmento tenía que pasar por el vértice opuesto.

Por otro lado, aunque no fue anticipado, el pegado del triángulo antes de trazar las alturas fue acertado. En la clase un alumno preguntó: “¿Cómo lo pego?”. Sus compañeros le respondieron: “¡Como quieras, es lo mismo!”. Un solo alumno lo pegó “horizontalmente”, ya estaba instalado que cualquier lado puede elegirse como base y que a cada lado le corresponde una altura.

ACTIVIDAD 6

Dibujen un segmento que les permita decidir si este triángulo (imagen 30) puede ser ubicado entre dos rectas paralelas que están a una distancia de 2,2 cm apoyando el lado *p*.

30



Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan:

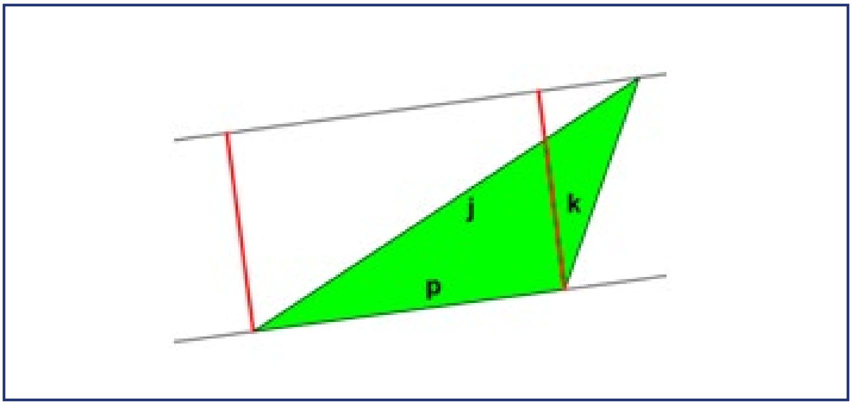
- Identificar que ningún segmento interior que mide la distancia entre las paralelas pasa por el vértice opuesto si tiene el otro extremo en el lado *p*.

- Ajustar la definición de altura para que abarque a los triángulos obtusángulos.
- Identificar las alturas exteriores del triángulo obtusángulo y aprender a trazarlas.
- Problematizar el hecho de que todos los lados de un triángulo pueden medir más que la distancia entre dos rectas paralelas y que sin embargo ese triángulo puede ubicarse entre ellas.

Este triángulo, que tiene que estar dibujado en una hoja lisa, fue elegido con la siguiente particularidad: la altura relativa al lado *p* es de 2,2 cm y todos sus lados son mayores a dicha medida. Elegimos que tenga esta característica porque quizás todavía haya alumnos que crean que la longitud de los lados influye para decidir si un triángulo entra o no entre dos rectas paralelas.

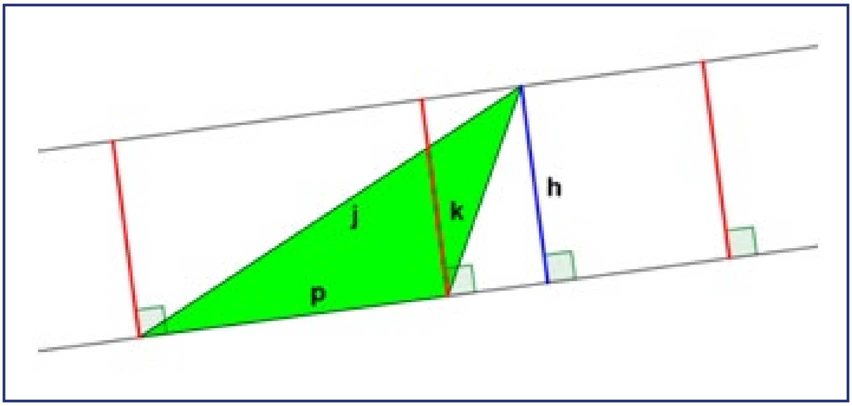
Es posible que para identificar la altura relativa al lado *p* algunos alumnos necesiten del trazado de las rectas paralelas. Además, como en la actividad anterior se definió el concepto de altura, quizás marquen un segmento perpendicular al lado pero que tiene un vértice coincidente con el mismo (imagen 31). Este razonamiento está basado en que hasta aquí todas las alturas eran interiores.

31



En la discusión colectiva, el docente podrá hacer un triángulo semejante al dado en el pizarrón para que un integrante del grupo trace el segmento propuesto (imagen 32). Luego se leerá la definición de altura que quedó escrita en el pizarrón para analizar si hay algún segmento que cumpla con las dos características allí mencionadas. También se podría preguntar: “Para ustedes, ¿cuál de todos los segmentos puede ser la altura relativa al lado *p*?”.

32



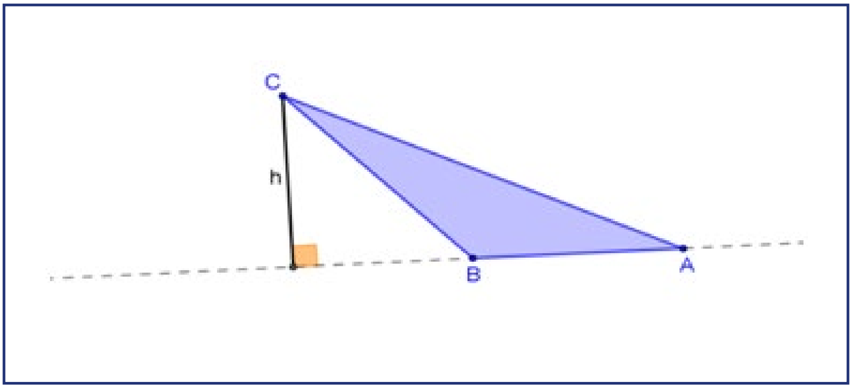
Ningún segmento cumple que sea perpendicular al lado *p* y que además pase por el vértice opuesto. Luego de analizar que ninguno se ajusta a la “definición” de altura, los alumnos podrían responder la pregunta: “¿Qué ajustes le harían a nuestra definición para que alguno de los segmentos marcados cumpla con ella?”.

Finalmente, luego de la discusión sobre los ajustes, el docente puede comentar: “De todos estos segmentos, vamos a tomar como la altura relativa al lado *p* al segmento *h*, que pasa por el vértice opuesto. Como la altura queda afuera del triángulo, se dice que es *exterior*”.

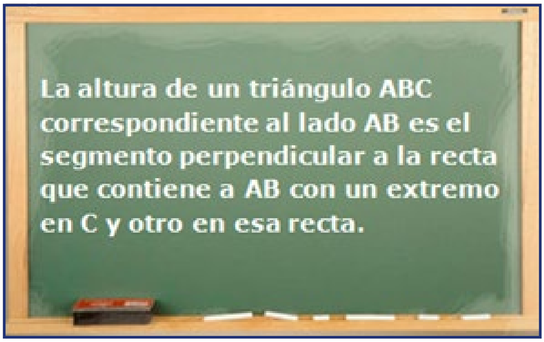
Con los alumnos se puede reflexionar que para trazar el segmento *h* es necesario prolongar el lado pero no es necesario trazar la recta paralela a *p*; para todos los otros segmentos dibujados, esta paralela fue necesaria. Más allá de que no sea necesario hacerlo, resaltamos que para algunos el trazado de las dos paralelas puede ser una ayuda a ubicar el triángulo, les da cierto “sostén”.

Una vez aquí, se está en condiciones de ampliar la definición de altura para cualquier triángulo. Se propone no dibujar la recta paralela que pasa por el vértice opuesto al lado AB con la intención de enfatizar que para trazar la altura es suficiente “prolongar el lado” (imagen 33).

33



34



En el pizarrón (o en un afiche) podría quedar escrito:

Para poner en juego la idea de altura exterior para un triángulo obtusángulo se enunciará una nueva tarea a realizar con el mismo triángulo de la actividad 6.

b) Marquen la altura relativa al lado *k*

Finalmente, como modo de atrapar algunas particularidades, pensamos una nueva actividad con preguntas que vuelven sobre la definición de altura:

ACTIVIDAD 7

a) Si tenemos un triángulo rectángulo, ¿cuáles serían sus alturas?

b) La definición que escribimos en el pizarrón, ¿contempla a este tipo de triángulos o hay que hacer un nuevo ajuste?

Se dejan a disposición hojas blancas para que, si los estudiantes lo consideran necesario, dibujen el triángulo rectángulo, lo que ayuda a volver sobre las ideas construidas.

EXPERIENCIA DE AULA

Algunas estrategias de los estudiantes

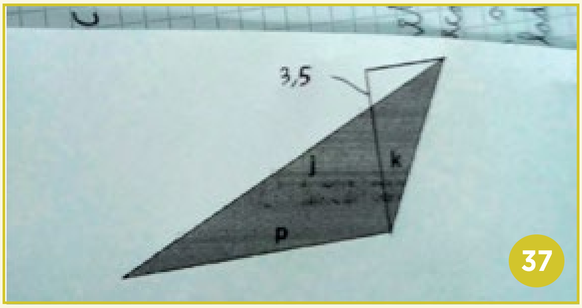
La estrategia de Tamara (imagen 35) muestra que el concepto de altura de un triángulo está presente en su razonamiento. Utilizó el cateto mayor de la escuadra como “la recta que contiene el lado *p*”. No utilizó el ángulo recto que le proporciona la escuadra ya que “a ojo” colocó “perpendicularmente” la regla para trazar el segmento y medirlo. Dicho segmento es exterior al triángulo y mide 3,6 cm. Es una estrategia correcta, aunque si hubiera intercambiado el uso de regla y escuadra, probablemente hubiera logrado mayor precisión en la perpendicularidad del segmento en el cual mide la altura del triángulo.


35

Alan, al igual que Tamara, trazó un segmento exterior al triángulo pero utilizó la escuadra de una manera diferente (imagen 36). No necesitó utilizar la regla porque apoyó el lado *p* del triángulo sobre el cateto menor de la escuadra. El segmento trazado es perpendicular, ya que lo marca gracias al uso del cateto mayor de la escuadra.

36

En la estrategia de Darío (imagen 37) también apareció la noción de altura hasta ese momento construida con los alumnos. Creemos que él intenta que el segmento pedido en el problema cumpla con ambas condiciones, al no ser esto posible, construye dos segmentos: uno perpendicular al lado *p* (segmento vertical, que mide 3,5 cm) y otro con un extremo coincidente con el vértice opuesto (segmento horizontal). Como muestra la imagen 38, utilizó dos escuadras para el trazado de los segmentos perpendiculares y para medir el segmento marcado en el interior al triángulo.



37

38

Discusión colectiva: hacia la ampliación de la definición de altura

Daiana trabajó en el mismo grupo que Tatiana pero con otra estrategia: trazó en el pizarrón la recta que contiene al lado *p* y, con la escuadra, el segmento perpendicular a la recta que pasa por el vértice opuesto; en este caso, exterior al triángulo. Por otro lado, la docente presentó la estrategia de Darío (imagen 37), donde el segmento queda marcado en el interior del triángulo. Fue interesante discutir acerca de que ambos segmentos medían lo mismo porque se podían pensar como lados de un rectángulo. Al preguntar cuál de ellos podría ser la altura correspondiente al lado *p*, los alumnos coincidían que podía ser cualquiera de los dos. En el pizarrón estaban disponibles las dos características relacionadas a la definición de altura correspondiente a un lado del triángulo: que sea perpendicular al lado, en este caso *p*, y que pase por el vértice opuesto. En esta instancia, ambos segmentos están trazados con dos colores distintos (imagen 39): el naranja corresponde al trabajo de Daiana y el amarillo al de Darío. La docente recupera una de las conclusiones de las actividades 4 y 5: "El triángulo tiene tres bases y tres alturas... entonces, vamos a tener que decidir a cuál de los segmentos llamamos altura".

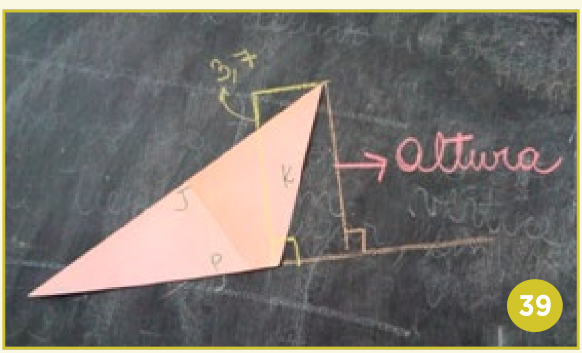
TAMARA. El naranja, porque pasa por la base y por el vértice.
LEONEL. ¿En qué base?
LEANDRO. El amarillo está en la base.
TAMARA. Bueno, está apoyado en la recta que pasa por la base.
DOCENTE. En la recta que contiene a la base, a la recta que contiene al lado, ok. Teníamos dos condiciones...
LEONEL. Pero bueno, es lo mismo... O sea, las dos tienen un defecto. La de acá no pasa por el vértice (*haciendo referencia al segmento amarillo*) y la otra pasa por el vértice pero no por la base (*haciendo referencia al naranja*).

DOCENTE. Como dice Leandro, los dos segmentos miden lo mismo. Y como dice Leonel, a los dos segmentos les falta algo para responder a la definición de altura. ¿Cuál de los dos segmentos les parece que se ajusta un poquito más a la definición que ya tenemos?

ALUMNOS. Entonces Tamara tenía razón, es el naranja.

Las preguntas que sus compañeros le hacen a Tamara le permiten completar su idea, su argumentación. La explicación de Leonel de por qué estos dos segmentos eran "defectuosos" deja expuesto el "choque" con la definición de altura que hasta ese momento circulaba en la clase, algo le falta a cada uno de los segmentos: el de Darío toca al lado pero no pasa por el vértice opuesto, el de Daiana toca el vértice pero no al lado. Es Tamara quién dice que para ella el segmento marcado por Daiana es mejor porque toca a la recta donde está apoyado el lado *p*. Resultó convincente Tamara, ya que muchos estudiantes, al escucharla, se decidieron por el segmento naranja. La docente intervino diciendo que, efectivamente, ese segmento iba a ser la altura correspondiente al lado *p*, que así se decía en geometría.

Luego se preguntó acerca de la diferencia entre los tipos de triángulos trabajados. En el triángulo *acutángulo*, las alturas quedaban trazadas en el interior del mismo mientras que en este tipo de triángulos, los *obtusángulos*, la altura correspondiente al lado *p* es exterior al triángulo.



39

Una vez trazados en el pizarrón de dos segmentos “candidatos” a ser altura, y tras la discusión presentada anteriormente, la docente escribió la palabra “altura” en rosa. La altura correspondiente al lado *p* medía 3,5 cm, tal como lo había expresado Darío en su trabajo. Para la mayoría de los alumnos, el segmento medía 3,6 o 3,7 cm. Como en otras oportunidades, discutimos que podían existir diferencias por errores de medición. Por eso, dimos por válido que la altura pudiera medir 3,7 cm.

El ajuste de la definición de altura para incluir el caso de los triángulos obtusángulos, rectángulos y la necesidad del caso general

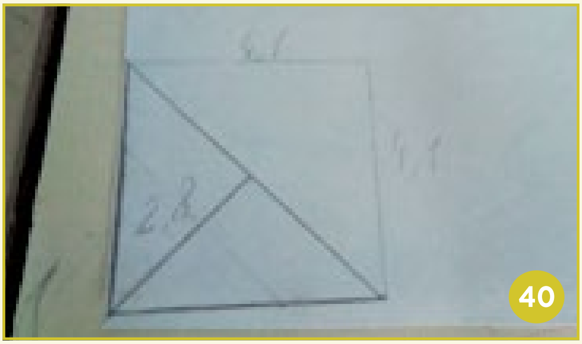
En la actividad 4 se construyó una definición provisoria de altura de un triángulo. La misma se escribió en un afiche para tenerla disponible en el aula. Al momento de ampliar la definición, gracias a lo trabajado en la actividad 5, notamos que el triángulo presente en el problema era uno particular, y que podíamos reescribir la definición de altura de un triángulo de manera más general. Mientras se iba leyendo lo que estaba escrito en el afiche, se redactó la definición definitiva de altura.

Como ya mencionamos, en el mismo espacio de la discusión colectiva se les propuso a los alumnos pensar en el caso de triángulos rectángulos: “¿Cómo se trazan las alturas?”, “La definición que construimos de altura de un triángulo... ¿contempla el caso de los triángulos rectángulos?”. Quedaron a disposición hojas blancas para que, si lo consideraban necesario, los estudiantes dibujaran un triángulo rectángulo.

A partir de estas preguntas se genera un nuevo espacio de trabajo donde los estudiantes comienzan a explorar y a elaborar conclusiones. La intervención del docente es mínima, solo aclara ciertas dudas. Algunos alumnos empiezan trabajando solos y luego consultan a un compañero. Otros se van trasladando por los grupos, compartiendo el trabajo.

La discusión se organizó de la siguiente manera. Primero se presentaron las conclusiones de tres alumnos, Alan, Leonel y Ludmila, en ese orden. Las dos primeras, con una fuerte presencia de lo trabajado anteriormente, enuncian que las alturas del triángulo rectángulo son exteriores. La tercera, en cambio, considera que solo se traza la altura correspondiente al lado más largo del triángulo rectángulo porque las otras dos ya están trazadas.

Alan dibujó un triángulo rectángulo isósceles, como se puede observar en la imagen 40, y respondió que los segmentos que completaron el cuadrado eran las alturas relativas a cada cateto, dos de ellas exteriores. Es posible que lo trabajado con el triángulo obtusángulo haya guiado su razonamiento. La docente intervino recuperando la definición trabajada en clase.



40

Nuevamente, Leonel mencionó que también en este caso el segmento es "defectuoso". Se arriba a la siguiente conclusión: este segmento perpendicular a la base no pasa por el vértice opuesto, por lo tanto no es la altura correspondiente a ese lado. Se descartaron las alturas exteriores de Alan, pero Alan agregó, con razón, que el segmento trazado medía lo mismo que la altura.

Leonel, al igual que Alan, consideraba que la altura correspondiente a uno de los catetos es exterior al triángulo pero su razonamiento era diferente. La dificultad de que la altura y el lado estén superpuestos él la "salvaba" trazando la recta que contiene al lado y desplazando un poco más la escuadra, como muestra la imagen 41.


41

Fueron sus compañeros quienes le hicieron notar que la altura no es exterior, porque si continuaba moviendo la escuadra, el segmento ya no pasaría por el vértice opuesto. Entonces Leonel enunció que este triángulo no tiene alturas. La docente intervino: "¿Es posible que un triángulo no tenga alturas?". Algunos estudiantes respondieron que sí... Entonces la docente preguntó nuevamente: "¿Cuántas bases tiene este triángulo?". Le contestaron que tres. "Entonces, ¿puede tener una sola altura si tiene tres bases?", insistió. En la clase quedó circulando que a este tipo de triángulos también se les tendría que poder trazar tres alturas.

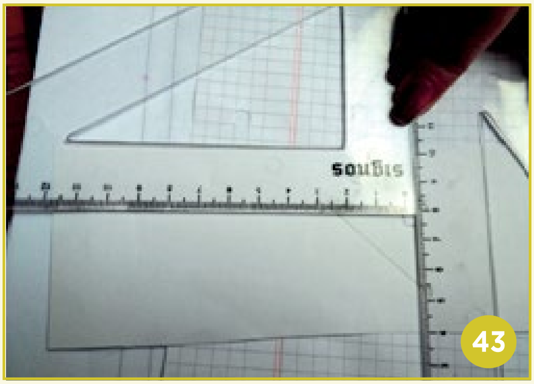
Ludmila comenzó trazando la altura correspondiente a la hipotenusa, que es interna, sin dificultad. Luego apoyó la base de la escuadra sobre uno de los catetos y la deslizó en busca del vértice opuesto. En ese momento, Ludmila enunció que no se podía trazar la altura porque ya estaba trazada, y marcó con la escuadra uno de los lados del triángulo rectángulo (imagen 42).

La docente retomó esta última idea: Ludmila no dijo que no existía la altura sino que no podía marcarla porque ya estaba trazada. Ella

42

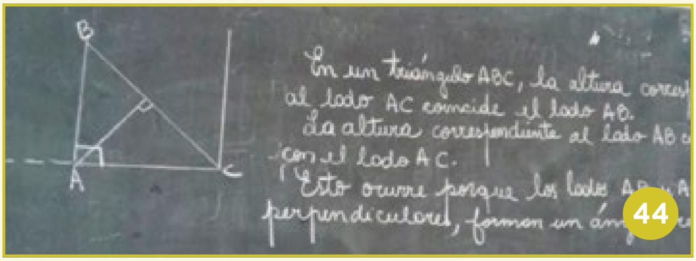
entiende que al apoyar otra escuadra buscando el vértice opuesto llega exactamente al lado perpendicular. Uno de los catetos del triángulo coincide con la altura correspondiente al otro cateto. La docente intervino: "¿Qué piensan de lo que está diciendo Ludmila?".

Se les dieron unos minutos a los alumnos y algunos, como Tatiana, recrearon el trabajo de Ludmila con su propio triángulo (imagen 43). Una vez más, apelar a la definición construida junto a los estudiantes permite repensarla para el caso de los triángulos rectángulos.



43

En esta instancia del trabajo colectivo, no era una dificultad entender que esa altura, que ya estaba trazada para Ludmila, era ciertamente la altura correspondiente a uno de los catetos, ya que ese segmento cumple con ambas condiciones: es perpendicular al lado y llega hasta el vértice opuesto. Todas estas conclusiones fueron escritas con palabras de los alumnos. Como todos dibujaron un triángulo distinto, fue necesario pensar en un triángulo rectángulo “general”. De los mismos alumnos surgió la necesidad de ponerle letras para poder nombrar y escribir de una manera más clara. La imagen 44 muestra el último pizarrón con las huellas de la discusión colectiva. Estudiar el caso particular de los triángulos rectángulos permitió profundizar en la definición que recién se estaba “amasando” en el aula.



ACTIVIDAD 8

Revisen las respuestas de la actividad 1 y expliquen por qué el triángulo amarillo entra solamente apoyado sobre uno de sus lados.

Esta actividad está pensada para que cada estudiante elija como resolverla: de manera individual, en parejas o en pequeños grupos. Se trata de volver sobre cuestiones que en su momento fueron explicadas desde la manipulación de los triángulos y que ahora pueden argumentarse involucrando la noción de alturas de un triángulo.

La actividad 1 presentaba cinco triángulos con alturas de distintas dimensiones y una banda entre dos renglones. La tarea consistía en explorar si se podían ubicar los triángulos entre esos renglones. En aquella instancia, los alumnos no tenían las herramientas para argumentar por qué algunos triángulos entraban o no entre dos renglones dados. La discusión colectiva giró en torno a un trabajo relacionado con la manipulación de los triángulos. Los alumnos iban rotando el triángulo, apoyaban un lado sobre el renglón y decidían si entraba o no.

Retomar esa tarea ahora tiene la intención de que los estudiantes puedan utilizar como argumento el concepto de altura de un triángulo. En este caso, el triángulo amarillo solo entra si se lo apoya sobre el lado *m*, ya que la altura correspondiente a dicho lado coincide con la distancia entre los renglones.

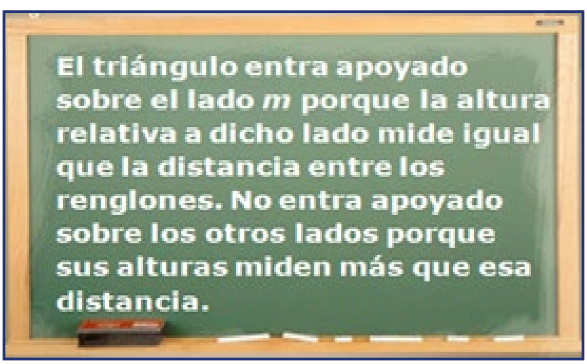
Para ello el docente tiene que tener disponibles los triángulos y las hojas utilizadas en la primera actividad. Oralmente también se puede recuperar el trabajo realizado, pero es posible que algunos estudiantes pidan las hojas porque necesitan tomar contacto con el problema manipulando nuevamente el triángulo o midiendo la distancia entre los renglones. A otros quizás les baste con preguntarle al docente la medida entre renglones, a modo de dato.

Aunque haya estudiantes que encuentran que el triángulo amarillo solo entra apoyando el lado *m* sobre uno de los renglones a través de la manipulación del triángulo, es importante resaltar en el aula que en esta nueva actividad se pide una explicación, razones que permitan asegurar que solo entra apoyando el lado *m*.

El triángulo utilizado es acutángulo, por lo tanto se espera que el trazado de sus alturas no genere una dificultad. Una vez marcadas y medidas, los alumnos están en condiciones de asegurar que solo entra apoyado sobre el lado *m* y la razón es que la altura correspondiente a dicho lado coincide con la distancia entre los renglones.

Es factible que los alumnos que no necesitan más que conocer la distancia entre los dos renglones, tracen las tres alturas del triángulo y comparen sus medidas con la distancia dada por el docente. Después de la discusión colectiva, y como cierre de la actividad, se espera llegar a un escrito como el siguiente:

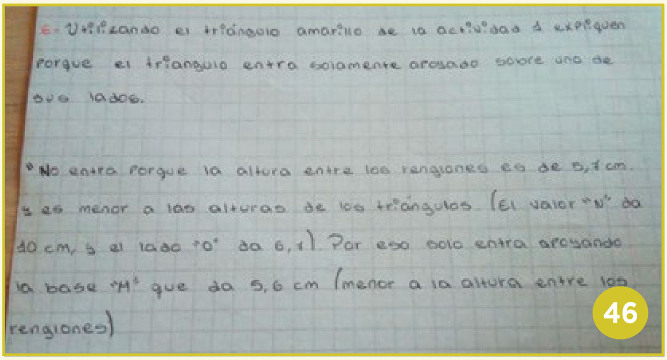
45



EXPERIENCIA DE AULA

Registros de las carpetas de los alumnos: la escritura de los argumentos

A continuación, presentamos los trabajos de tres grupos distintos. El primero comienza explicando por qué el triángulo no entra apoyado sobre los lados *n* y *o*. Se puede observar en el escrito (imagen 46) que llaman a la altura correspondiente al lado *n* como "el valor de *n*" y a la altura correspondiente al lado *o* como lado "*o*", algo que ya había ocurrido en la actividad 4. En su argumentación está presente la noción de altura de un triángulo, aunque todavía sea una dificultad hablar de ella.

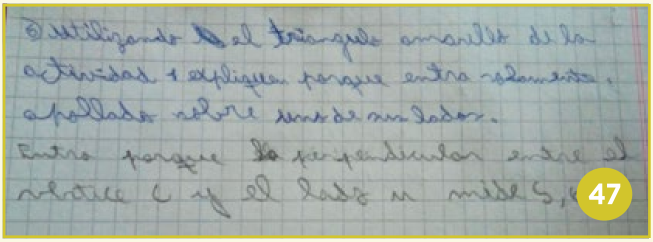

6- Utilizando el triángulo amarillo de la actividad 4 expliquen porque el triángulo entra solamente apoyado sobre uno de sus lados.

* No entra porque la altura entre los renglones es de 5,7 cm. y es menor a las alturas de los triángulos (El valor "n" da 10 cm, y el lado "o" da 6,1) Por eso solo entra apoyando la base "M" que da 5,6 cm (menor a la altura entre los renglones)

46

El segundo grupo (imagen 47) solo se interesó en argumentar por qué sí entra el triángulo apoyado en un solo lado. En su escrito no está dicha la palabra altura pero sí se hace referencia a su definición, ya que hablan del segmento perpendicular al lado *m* con extremos en el vértice *C*. Luego de la lectura, sus compañeros les preguntaron qué es *C*, ya que en el triángulo no se usa esa letra. Los integrantes de este grupo se dan cuenta de que algo había que cambiar, ellos lo redactaron siguiendo literalmente la definición de altura que tenían en la carpeta.

El tercer grupo pegó en su escrito el triángulo amarillo donde se observan las alturas trazadas y las medidas de las mismas (imagen 48). En su escrito, enuncian que si se apoya el lado *m* sobre el renglón, el triángulo "entra justo"; pero si se lo apoya sobre el lado *n*



47

o el lado *o* sobresale de los renglones porque "las alturas son más grandes". En la discusión, los integrantes de este grupo aclararon que las medidas de las alturas correspondientes a los lados *n* y *o* son mayores que la distancia entre los renglones. La docente intervino, preguntando qué significaban las últimas anotaciones: $N = 10$; $O = 6{,}8$ y $M = 5{,}6$.[3] Todos los alumnos entendían que hacían referencia a las alturas correspondientes a esos lados porque habían tomado esas medidas y coincidían. Se discutió que solamente nosotros entendíamos esta anotación, porque habíamos realizado esta actividad, pero que era necesario completarla para que cualquier persona al leerlo pudiera entender a qué nos estábamos refiriendo.


48

Finalmente, cada grupo ajustó su escrito a partir de lo trabajado en la discusión colectiva.

3. El triángulo utilizado en el aula tenía otras medidas que el incluido en este documento.

REFLEXIONES FINALES

Diseñamos estas actividades considerando al aula de matemática como un espacio de construcción colectiva donde cada estudiante tiene la oportunidad de recuperar y resignificar saberes abordados en otros momentos de su escolaridad, y desplegar estrategias, mientras construye nuevos conocimientos. Los comentarios en torno a la experiencia en el aula y las producciones de los estudiantes que incluimos pretenden mostrar un modo posible en que esto se despliegue.

Muchas veces el trabajo de nuestros alumnos nos sorprende y supera las propias anticipaciones, haciéndose necesario realizar ajustes de lo planificado sobre la marcha y tomar decisiones imprevistas. Este caso no fue la excepción. En la experiencia de aula se advierte que la docente se encontró modificando y organizando el desarrollo de la clase de una manera distinta a la anticipada.

Más allá del análisis particular de lo acontecido en el aula con cada actividad, queremos ahora señalar algunas cuestiones vinculadas con el quehacer matemático que se presentaron en nuestra experiencia, algunas no anticipadas al momento de diseñar los problemas. Todas ellas requirieron un tiempo de trabajo en el aula bien invertido, porque va consolidando mejores condiciones para seguir trabajando en el futuro:

1) El uso de la escuadra para el trazado de rectas paralelas: para algunos alumnos, su utilización fue algo nuevo; para otros, una herramienta de medición un tanto "imperfecta" que requirió el uso de hasta tres de ellas para medir un segmento de manera más certera.
2) La "negociación" en torno a los resultados de una medición con instrumentos: cada vez que se completaban las tablas, había que ponerse de acuerdo y decidir cuáles eran las medidas que se iban a escribir. Los estudiantes necesitaban acordar para colocar esa medida en la tabla. Incluso, algunos alumnos se tomaban el trabajo de medir los segmentos de sus compañeros con sus propios instrumentos de geometría para comparar las medidas.

3) Las dificultades con la escritura: creemos que proponer actividades que involucren producciones escritas por parte de nuestros alumnos es enriquecedor. Pero su incorporación a las tareas de la clase de matemática tiene que ser paulatina y gradual. Pedirles a nuestros alumnos la escritura de procedimientos y argumentos en la actividad 4 los enfrentó con una tarea difícil. No obstante, esa tarea les posibilitó reorganizar el pensamiento, retomar y reformular conceptos trabajados. El trabajo colectivo posterior sobre las escrituras fue una manera de abordar desde otro lado, y entre todos, la complejidad de lograr un escrito que explique.

   La actividad 8 permitió una vuelta sobre la escritura: los estudiantes apelaron a la noción de altura para incorporarla en el armado de argumentos matemáticos, despegándose un poco de la manipulación de los triángulos y el trazado. Agreguemos que si el trabajo de escritura se realiza junto a otro u otros, intercambiando ideas y puntos de vista, aumenta su potencialidad.

4) El espacio de la discusión colectiva como un espacio de construcción de conocimiento con los otros: para nosotros fue un espacio pensado antes, durante y después del desarrollo de la clase. Antes de la clase diseñamos el problema y anticipamos posibles respuestas e intervenciones, pensamos también que asuntos íbamos a querer discutir y retomar entre todos, a propósito de las resoluciones de los estudiantes. Durante la clase, en el aula, hubo que decidir –entre otras cosas– el orden en que se presentan y discuten las estrategias de los alumnos, tomar decisiones frente a producciones no previstas, concretar qué de lo producido iba a quedar registrado en el pizarrón a modo de conclusiones. En los momentos posteriores al desarrollo de la clase, en tanto, analizamos lo ocurrido a la luz de las anticipaciones y objetivos y, eventualmente, decidimos incluir alguna nueva actividad o pregunta, o modificar el diseño de alguna actividad posterior.

5) La construcción de una definición: gracias a lo trabajado en las tres primeras actividades, los alumnos lograron formular una definición de altura provisoria vinculada al triángulo acutángulo en la actividad 4. Esta definición se convirtió en el argumento matemático que permitió refutar

algún razonamiento o validar otro a la hora de ampliar la definición para que contemple el caso de los triángulos rectángulos y obtusángulos.

Pensar el trabajo en matemática como una trama en la cual se articulan nociones, tipos de actividades y técnicas permite planear la enseñanza sin privilegiar unas sobre otras. Esperamos que este documento dé pie para reflexionar sobre eso a partir del ejemplo particular que presentamos. Queremos volver a enfatizar que todas las actividades diseñadas comparten la intención didáctica de involucrar a nuestros estudiantes en la tarea matemática a la cual se los convoca. Suponemos compartida esa intención con nuestros colegas lectores y posiblemente tendrán otros ejemplos de escenarios diseñados por ellos con el mismo propósito.

Por último, asumiendo como compartido también el objetivo de entrar en diálogo con las ideas de nuestros alumnos, pensamos que al presentar aquí sus producciones ofrecemos la posibilidad de detenerse a estudiarlas con un tiempo que las demandas del aula no nos permiten tener en nuestra tarea diaria.

Por todo eso esperamos que este documento pueda servir como insumo para "pensar la clase" y seguir trabajando para la formación de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Ministerio de Educación (República Argentina)

2011 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico Educación Secundaria 1º y 2º / 2º y 3º* años, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <http://repositoriorecursos-download.educ.ar/repositorio/Download/file?file_id=1a820389-3f95-4bfb-9d54-a4630322f7c1&rec_id=110570> [consulta: 6 de diciembre de 2019]

CAPÍTULO 3

El azar y el manejo de la información a través de la matemática

Betina Duarte, Patricia Duarte Lezcano y Federico Maciejowski

INTRODUCCIÓN

La relevancia del desarrollo del pensamiento probabilístico en la formación de los individuos es un señalamiento que converge tanto desde el campo de la educación matemática, como desde el propio campo de la matemática. El mundo en el que nos movemos es fluctuante: la mayoría del tiempo tomamos decisiones en situaciones de incertidumbre.

El matemático Luis Santaló, un doble referente del campo de la matemática y del ámbito de la educación, señala la importancia de la formación estadística y probabilística como parte de la formación básica y común de los ciudadanos que conviven con encuestas de opinión, información sobre el *rating* de programas, las chances de obtener un auto por sorteo, los indicios del posible éxito de un candidato en las próximas elecciones, la información que diarios y revistas ofrecen a través de gráficos estadísticos y una infinidad de cuestiones cotidianas donde las probabilidades y la estadística están presentes aunque, en ocasiones, invisibilizadas (Santaló, 1995).

La matemática nos ofrece herramientas para estudiar fenómenos con la precisión que nos aportan escenarios donde impera la certidumbre y la determinación, pero también nos habilita a entrar en el mundo de lo incierto a través de métodos de estimación. Motivados por estas ideas diseñamos una propuesta para un aula del ciclo básico que creemos que puede adaptarse a distintos años, dependiendo de los alumnos y del proyecto de enseñanza. En ella consideramos tratar el significado de la probabilidad y algunas nociones básicas de la estadística.

Los estudiantes tienen en general una idea intuitiva y provisoria acerca de "lo probable". Esperamos que este conjunto de actividades que presentamos sirvan para hacer explícitas esas concepciones, cuestionarlas y hacerlas avanzar hacia una zona donde la matemática pueda aportar a un mejor manejo de la incertidumbre.

Si bien es cierto que la presencia de la estadística y de las probabilidades en los diseños curriculares está planteada desde hace tiempo, la experiencia que tenemos y el contacto con profesores nos hacen pensar que la probabilidad de llegar a un aula de una escuela secundaria y presenciar una clase donde estos temas estén siendo tratados es baja.

Las razones de esto se vinculan tanto con la historia de la enseñanza de la matemática como con la historia de la propia disciplina. Por eso, invitamos a los docentes a recorrer esta propuesta para replantearse dicho escenario y poder llevar al aula una secuencia inicial para la enseñanza de la estadística y la probabilidad a través de problemas que se conectan con el cotidiano de los estudiantes.

PARTE 1: PROBABILIDAD (ENTRE LO SEGURO Y LO IMPOSIBLE, LO PROBABLE)

Al jugar, ¿con cualquier elección tenemos la misma chance de ganar?

La intención de las primeras actividades de esta secuencia es presentar a los alumnos sucesos de distinta naturaleza: imposibles, probables y seguros. Por otro lado, también se propone distinguir entre un experimento y sus posibles resultados.

Analizar resultados y elegir chances

ACTIVIDAD 1

A continuación se lista un conjunto de experimentos en una primera columna. En otra columna, junto con cada experimento, aparece un resultado. Les pedimos que indiquen cuáles, de todos ellos, son a su criterio resultados seguros y cuáles imposibles. Por ejemplo, si pensamos en el experimento de tirar un dado y que como resultado salga un número natural de un solo dígito, ese resultado es seguro.

Ahora les toca a ustedes...

Experimento	Resultado	Clasificación
Tirar un dado y mirar el número que salió	Sale un número natural de un solo dígito	Seguro
Arrojar un dado y mirar el número que salió	Sale un número divisible por 11	
De un mazo de 48 cartas, sacar dos al azar y anotar qué cartas salieron	Salen cartas distintas	
Tirar 3 monedas y mirar el lado que salió en cada una de ellas	Se obtienen tres caras	
Seleccionar un alumno de tu curso y preguntarle el número de calzado	El número es mayor a 25	
Observar una partida de ajedrez y contar los movimientos del ganador	La cantidad de movimientos es 2	
Buscar con los ojos cerrados un par de medias de tu cajón de medias y mirar lo que sale	Sacas un elefante	
Observar una partida de ajedrez y contar la cantidad de movimientos que hizo el ganador	La cantidad de movimientos es 17	
Abrir un libro en la página 7 y contar la cantidad de letras "A" que tiene el primer párrafo	La cantidad de letras "A" es 26.	
Seleccionar 8 personas de tu curso y preguntarles qué día de la semana nacieron (lunes, martes, etc.)	Hay dos que nacieron el mismo día de la semana	

Esta actividad tiene varias intenciones. Por un lado, se busca que los alumnos utilicen sus nociones personales de lo que significa que algo sea seguro o imposible y así clasifiquen estos resultados. Por otro lado, la presentación elegida (una tabla) tiene como objetivo distinguir con claridad en este primer problema entre la idea de experimento y la de resultado de un experimento, ya que muchos alumnos no lo suelen distinguir. Para reforzar esto hemos repetido algunos experimentos presentando distintos resultados.

Otra cuestión es que se presentan experimentos con resultados que no son seguros ni imposibles. Esto dará una oportunidad al docente para introducir la noción de *probable*, asociada a resultados de experimentos**.** De esta manera, se espera que todos aquellos resultados que no son marcados como *imposibles* ni *seguros* empiecen a ser considerados como *probables*.

ACTIVIDAD 2

a) Para cada uno de los siguientes experimentos, completen la tabla con un resultado imposible, uno probable y uno seguro.

Experimento	Resultado imposible	Resultado probable	Resultado seguro
Tirar un dado y mirar el número que salió	Que salga un 8	Que salga un múltiplo de 2	Que salga un número menor a 7
De un mazo de 48 cartas, sacar dos al azar y anotar qué cartas salieron	....	....	....
Arrojar una moneda hacia arriba y contar el tiempo que tarda en caer	....	....	....
Seleccionar un alumno de tu curso y preguntarle el número de calzado	....	....	....

b) A partir de la siguiente tabla, inventen experimentos para que el resultado que lo acompaña no sea seguro ni imposible. Es decir, que sea un resultado probable. La primera línea, por ejemplo, podría completarse con el siguiente experimento: “Tomar una carta al azar de un mazo y mirar el número que salió". Les proponemos que piensen otro.

Experimento	Resultado probable
	Sale un número divisible por 11
	El número es mayor a 25
	Tarda una semana
	Es un número natural de un solo dígito

Esta actividad continúa con la distinción entre experimento aleatorio y sucesos aleatorios. A su vez, permite afianzar las ideas de resultado imposible, probable y seguro. Será interesante observar cómo resultados con una redacción similar pueden ser probables, imposibles o seguros, dependiendo del experimento al cual están vinculados.

En un momento de síntesis, a partir de los ejemplos se podrá presentar y/o escribir colectivamente una idea y también una definición de:

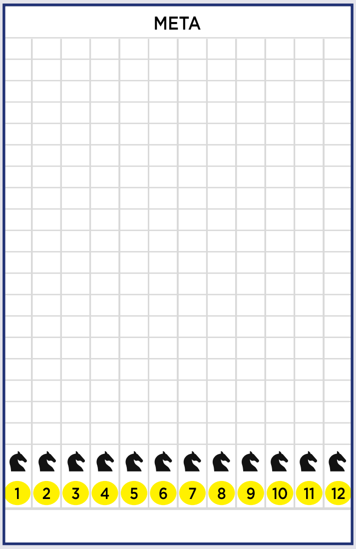
a) Experimento aleatorio
b) Resultado seguro, probable e imposible

A continuación, se propone una actividad que requiere que los chicos jueguen en la clase. Se espera que a partir de la experimentación (jugar varias veces al juego) los estudiantes puedan construir intuitivamente la idea de que hay sucesos más probables que otros. Las conclusiones obtenidas podrían funcionar como un buen recurso para tomar una decisión en el marco de otro juego que se propone en la actividad 4.

ACTIVIDAD 3: LA CARRERA DE CABALLOS

Explicación del juego:

Se juega entre dos participantes. Cada jugador elige un caballo y marca con un color el número que lo identifica. No pueden tener el mismo caballo (si no se ponen de acuerdo, cada uno lanza un dado y elige primero quien obtenga el número mayor).



Se lanzan los dos dados y se suman los números que salen. El caballo cuyo número coincide con esa suma avanza un casillero. Gana la partida el jugador cuyo caballo llega primero a la meta. Cuando esto ocurre, la partida finaliza.

Un escenario posible para trabajar en el aula sería el siguiente:

1) Inicialmente, el docente lee el instructivo del juego o lo reparte en forma escrita a los estudiantes.
2) Luego, el docente pide a los estudiantes que elijan un caballo ganador. Una vez hecha la elección, se realiza una partida grupal en el pizarrón a modo de entrada en el juego. Tanto las apuestas de los chicos como los resultados de la partida quedarán registrados en el pizarrón. Es posible que algunos elijan el caballo número uno y luego comprueben que este caballo no tiene forma de avanzar. Esta situación se podrá vincular con lo discutido en los problemas anteriores: en este caso, “obtener 1” es un resultado imposible en el experimento “tirar dos dados y calcular la suma de los números obtenidos”.

3) Se propone luego el juego en parejas. Antes de comenzar, cada estudiante vuelve a elegir un caballo ganador y consigna su elección en la hoja repartida. Las parejas de alumnos juegan una partida completa y marcan los resultados de su juego, es decir, marcan en la hoja el avance de cada caballo (por ejemplo, utilizando cruces o puntos). Este juego de a dos se puede repetir un par de veces. Será interesante que los alumnos registren todas sus elecciones y todos los resultados de la partida. El tiempo estimado para cada una de estas partidas es de diez minutos aproximadamente.
4) A continuación se organiza un momento de discusión grupal. Una vez que los estudiantes han completado un par de partidas se puede detener el juego en parejas y poner en común a qué han llegado. El docente podrá preguntar si el caballo ganador fue siempre el mismo o si hubo distintos resultados y tomar un registro de lo que ocurrió en todos los grupos. Se espera que los caballos 6, 7 y 8 ganen un mayor número de veces en comparación con los caballos 2 o 12.

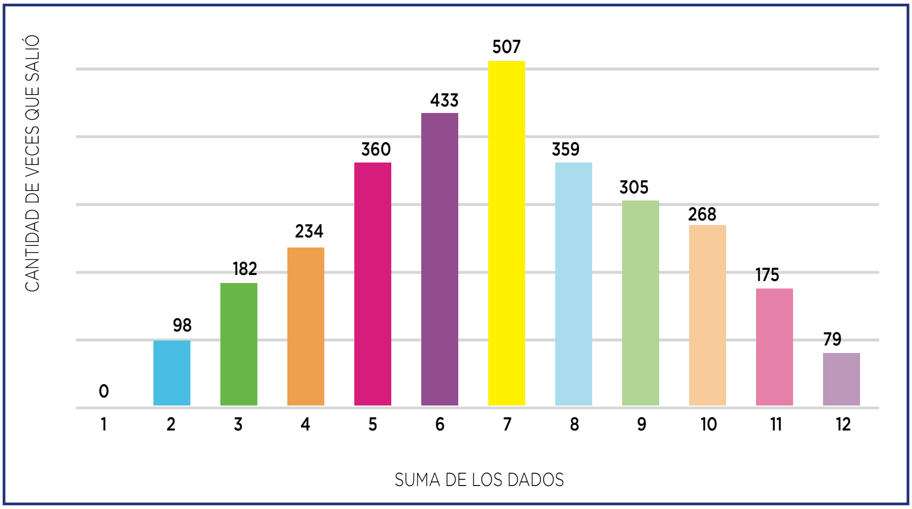
   Ante este escenario los estudiantes podrán confirmar, por sus propias experiencias o al conocer los resultados obtenidos por sus compañeros, que ciertos caballos ganan más veces que otros. Se espera que vayan observando que la mayoría de las veces gana uno de los caballos de la zona central. No hay intención de avanzar sobre la cantidad de casos favorables para cada caballo, pero al mismo tiempo pensamos que si la clase se lo está planteando, el docente puede entrar en esta cuestión indagando los argumentos que esgrimen los estudiantes para decidir una mayor chance de ganar de un caballo que de otro. Será conveniente dejar para más adelante (en suspenso) la especificidad del cálculo.
5) Se toma registro de los datos obtenidos por todos los grupos. Esta recolección tiene como objetivo hacer evidente la cantidad de veces que salió cada una de las sumas al considerar el total de veces que se tiraron los dados en toda la clase. Para representar este bloque de datos será necesario diseñar un diagrama de barras. El profesor puede organizar el diagrama

en el pizarrón mientras los alumnos tienen a su disposición los pequeños diagramas de juego, que resultan similares al que se construye.

En esta fase de la actividad el interés se desplaza del juego y se centra en la ocurrencia de cada resultado posible para la suma de dos dados. Proponemos que la recolección de datos se realice de un modo claro pero informal, sin entrar en las definiciones de diagrama de barras o de pictograma. Más adelante se podrá tomar esta experiencia como pie de apoyo para hablar de formas de representación de la información.

Los alumnos que ya jugaron sus respectivos juegos podrán comparar sus esquemas de jugadas con el diagrama del pizarrón, lo que les dará la idea de la diferencia que hubo entre las ocurrencias de las distintas sumas.

Cuadro 1. Diagrama de barras diseñado a partir de los datos de toda la clase



Se podrá concluir que los números centrales tienen mayor ocurrencia que los números de las puntas o que los números que están más cerca del 7 salen con mayor frecuencia que los que están más alejados. También, aunque dependiendo de las experiencias de la clase, se podrá concluir que el 7 es el que tiene la mayor chance de aparecer.

La intención de este juego ha sido la de continuar trabajando con las ideas de sucesos imposibles y sucesos más o menos probables dejando para otro momento el estudio matemático de por qué un caballo u otro podría avanzar más rápido. En otras palabras, se trabaja con la noción de *no equiprobabilidad de sucesos*, pero cabe señalar que no estamos pensando en presentar esta denominación a los estudiantes.

ACTIVIDAD 4

El siguiente juego es un bingo con dados. La cantidad de jugadores no puede ser superior a cuatro y para empezar a jugar cada uno tiene que elegir cualquiera de los cartones que figuran a continuación.

Cartón 1		
7	9	2
3		4
12	6	8

Cartón 2		
6	7	8
2		3
10	11	12

Cartón 3		
11	9	5
4		2
3	10	12

Cartón 4		
7	9	5
8		3
6	10	4

Explicación del juego:

Se tiran dos dados y se suman los números que salen. Si el resultado de la suma se encuentra en el cartón, el jugador que tenga dicho cartón tapa el número que ha salido. Gana el jugador que primero completa una fila o una columna de su cartón.

Les proponemos pensar:

a) Qué cartón creen que tiene más chance de ganar.

b) Qué cartón creen que tiene menos chance de ganar.

Expliquen, en cada caso, el criterio que utilizaron para realizar la elección.

Sugerimos organizar un tiempo de trabajo grupal como inicio del problema. Algunas de las cuestiones que pueden surgir al revisar los números que componen cada cartón son:

- El cartón 3, que tiene a los números 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 y 12 será prontamente descartado pues los números que en él aparecen son los que en el juego anterior han sido considerados como los que tienen menos chance de aparecer.
- Si bien los otros tres cartones tienen los números "favoritos" (6, 7 y 8), hay uno de ellos –el cartón 1– que no los posee alineados, por lo cual queda en desventaja con los otros dos cartones.
- Para decidir entre los dos cartones que quedan, es importante ver que el elemento en común entre ambos es que cada uno tiene el trío de números 6, 7 y 8 en una fila y en una columna respectivamente. Por lo tanto, en una primera impresión, podrían ser pensados como indistintos, bajo el argumento de que ambos tienen la tríada de números con mayor posibilidad de salir (la experiencia de los caballos debería abonar a esta idea).

El juego de la actividad 3 ya había permitido ver que también hay otras sumas que salen con distinta "frecuencia" (aunque la palabra frecuencia tenga aquí una connotación informal) y los alumnos podrán pensar que suman chances de ganar con otros números, aunque sean menos probables que la tríada 6, 7 y 8. Considerando esta situación, no resulta interesante zanjar en este momento todas estas discusiones, por lo que tal vez los estudiantes concluyan que el segundo y el cuarto cartón son los que tienen más chance de ganar el juego.

Sin embargo, existen argumentos para decidirse por el cartón que no tiene los números 2, 11 y 12, pues de este modo se tienen números que están más cerca del siete y por lo tanto cada línea o columna tiene más chance de completarse. Por lo tanto, esperamos que los alumnos elijan el cartón 4 como el de mayor chance de ganar.

Para cuantificar lo probable

A continuación se proponen dos actividades previas a cuantificar lo probable. Tienen la intención de que los estudiantes vuelvan a identificar que algunos sucesos son más probables que otros, pero ahora sin recurrir a la experimentación. En esta oportunidad, se podrá tener en cuenta que ante más casos favorables hay mayor probabilidad de que un suceso ocurra.

ACTIVIDAD 1

Siempre que llegan del colegio, Ciro y sus tres hermanos se pelean por jugar con la compu. Todos quieren ser primeros en usarla. Como no se puede, su mamá les propone un juego para decidir: se elige una carta al azar de un mazo de cartas españolas[1] y aquel que haya anticipado alguna característica de esa carta será el primero en jugar. En caso de empate, se repite el juego.

LUCIANA. Si sale una carta de copas juego primera.
LOURDES. Si sale una carta de oros, juego yo.
CIRO. Si sale el 9 de espadas, juego yo.
MARIANA. Si sale una carta distinta a la que dijeron todos los demás, juego primero.

a) ¿Quién creen ustedes que tiene más chance de ser el primero en jugar?
b) ¿Quién tiene menos chance de jugar primero?

El espacio muestral del experimento que se propone analizar en esta actividad (siendo el experimento sacar una carta de un mazo de cartas españolas y ver qué carta sale) viene dado por el contexto del problema, ya que se sabe que el mazo tiene 48 cartas distintas y que esos son los distintos resultados que pueden

1. Esto es, numeradas del 1 al 12 y con los palos oros, copas, espadas y bastos.

obtenerse al sacar una carta. De esta manera, se espera que los estudiantes comprendan que cuántos más casos favorables tiene un determinado resultado (aunque no se utilice esta denominación y se mantenga un lenguaje coloquial), tiene más chance de ocurrir y, por lo tanto, una mayor probabilidad.

El momento de la discusión colectiva será adecuado para que el docente mencione que podemos comparar las distintas cantidades de casos favorables porque siempre estamos frente a un mismo total de resultados posibles.

La siguiente actividad es previa a la definición de *probabilidad* de Laplace. En este momento, se espera que los estudiantes, aún sin disponer de la fórmula para hacer un cálculo exacto de probabilidades, puedan ordenar un conjunto de sucesos desde los menos probables hasta los más probables apelando al conteo.

ACTIVIDAD 2

Se tira una moneda cuatro veces y se registra si sale cara o cruz. Por ejemplo, podemos anotar así: CXXC. Eso que significa que la primera vez salió cara, la segunda y la tercera salió cruz, y la cuarta volvió a salir cara.

a) Registren todos los resultados que pueden aparecer.
b) Consideren la siguiente lista de resultados posibles y agrupen los que creen que tienen la misma chance de ocurrir:
   i. que no salga ninguna cara
   ii. que todos los resultados sean iguales
   iii. que salgan exactamente dos caras
   iv. que salgan solo tres caras
   v. que salga exactamente una cruz
   vi. que salga cruz únicamente la primera vez
   vii. que salga lo mismo la primera, segunda y tercera vez
c) Ordenen los resultados anteriores desde los que tienen más chance de ocurrir o son más probables hasta los que tienen menos chance o son menos probables.

El pedido de registrar todos los resultados del ítem a) tiene la intención de que los chicos tengan en cuenta el universo de posibles resultados. No obstante, es factible que algunos alumnos no adopten naturalmente la escritura CXXC ya que es una convención. Es por eso que al comienzo se ha dado un ejemplo.

En el trabajo colectivo, el docente podrá indagar en primera instancia cuántos resultados encontró cada grupo y, en el caso de no haber acuerdo en la cantidad total de posibilidades, podrá incentivar la búsqueda de una forma ordenada de armar los distintos casos. Si aun así hay posibilidades no consideradas, el docente podrá utilizar un diagrama de árbol como herramienta para determinar todos los posibles resultados de un experimento similar, pero tirando tres veces una moneda, y proponer a los estudiantes adaptar esta herramienta al caso que se está estudiando.

En los ítems b) y c) se reinvierte la idea de que la probabilidad de un suceso es mayor en la medida en que tenga más casos favorables ante el mismo universo de casos posibles. Como ya se ha señalado, se espera que los alumnos puedan dar una respuesta a estas cuestiones sin que se haya introducido aún la definición de *probabilidad*. Para que esta tarea sea viable es que se les ha pedido previamente listar todos los resultados que pueden ocurrir ya que esta vez el espacio muestral no está “disponible” de la misma manera que en la actividad anterior.

Elaborar teoría con los estudiantes

Las ideas que se han puesto en juego durante estas actividades generan buenas condiciones para definir la probabilidad de un suceso “utilizando” la definición clásica de Laplace. Retomando las primeras actividades, el docente podrá recuperar las ideas discutidas e introducir la noción de *experimento aleatorio*, o sea aquel en el que se pueden esperar distintos resultados: algunos podrán ser imposibles, otros seguros y otros probables.

Cada uno de los resultados puede cuantificarse mediante un número. Esto resulta útil si queremos comparar los resultados y decidir cuál tiene más chance (el docente podrá retomar los argumentos desarrollados por los alumnos en el problema de la moneda). La cuantificación podría realizarse contando la cantidad de casos que hay. Por ejemplo, en el problema de la moneda podemos asignar el valor UNO al resultado "que no salga ninguna cara", ya que hay una única oportunidad de que eso ocurra con la secuencia XXXX.

Del mismo modo podemos asignar el valor UNO al resultado "que salga un 9 de espada", como dice Ciro en la actividad 1, cuando van a sacar una carta del mazo. Ahora bien, si tuviéramos que comparar estos dos resultados e inclinarnos por el que tiene más chance de ocurrir, ¿estaríamos indiferentes entre ambos? Esta cuestión llevará a la clase a pensar más allá del único caso favorable para cada experimento y pensar en todos los casos posibles.

El argumento se puede tensar un poco más proponiendo la siguiente pregunta: ¿tenemos la misma chance de sacar el número 4 en una lotería que tiene cien números que de sacar un 4 en una lotería que tiene 100.000 números?

Esta idea lleva a la necesidad de proponer un cociente para poder comparar distintos experimentos y distintos sucesos posibles en ellos. Es el momento de definir la probabilidad como una medida que considera *casos favorables* versus *casos posibles*.

Así, dado un experimento aleatorio y un suceso determinado (se recordarán los sucesos ya estudiados) se define:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

El docente podrá ahora tomar algunos ejemplos sencillos para considerar su probabilidad dentro de los experimentos desarrollados.[2]

Ahora, ¿qué valor se le asigna a un suceso imposible? Apoyados en los primeros problemas, se podrá ver que los sucesos imposibles son aquellos que

2. Se sugiere no tomar el experimento que indaga sobre la "suma de dos dados" ya que la determinación de todos los casos posibles genera discusiones en el aula que requieren ser abordadas con mayor detenimiento. Para retomar este experimento se propone una actividad optativa al final de esta parte.

no tienen casos favorables. Por ejemplo, se ha visto que "si tiramos un dado, no hay forma de que salga el número ocho ni que salga un número divisible por once". También se ha visto que "si tiramos dos dados no hay forma de que salga uno". A todos estos sucesos le asignamos la probabilidad cero.

Del mismo modo, ¿qué valor se le asigna a un suceso seguro? En el caso de tener un suceso seguro, ocurre que el número de casos favorables es el mismo que el número de casos posibles, por lo tanto, se le asigna la probabilidad 1.

Puede ser un buen momento para hablar de los experimentos y los resultados de las actividades 1 y 2 de esta parte, pero ahora en términos de probabilidades.

ACTIVIDAD 3

En una kermés, luego de jugar, hay que superar un nuevo desafío para poder elegir un premio de entre todos los que hay en la vitrina. De lo contrario, lo elige el empleado. Las personas pueden elegir el desafío que quieren entre las siguientes posibilidades:

a) Sacan una carta de un mazo de 48 y eligen premio si sacan una carta de espadas.
b) Tiran cuatro veces una moneda y eligen premio si sale exactamente una cara.
c) Sacan una carta al azar de un mazo de 48 cartas y eligen premio si sale un 3.
d) Tiran un dado y eligen premio si sale un número par.
e) Sacan una bolilla de un bolillero con bolillas numeradas del 1 al 8 y eligen premio si sale una bolilla con un número impar.

¿Qué opción les conviene elegir?

Ante la tarea de elegir la opción que representa la mayor probabilidad, es posible que los estudiantes piensen que el suceso más probable es el que tiene asociada la mayor cantidad de casos favorables. Sin embargo, esta estrategia deja de ser válida por tratarse de experimentos diferentes, con distinta cantidad de casos posibles. Solo es factible comparar las probabilidades de esa manera cuando la cantidad de casos posibles es la misma –por ejemplo, sí se podría afirmar que es más probable ganar en la opción a) que en la c)–. Para promover estas ideas hemos propuesto situaciones en las que habiendo más casos favorables, de todos modos no son más probables. Así, también hay resultados que tienen una cantidad distinta de casos favorables y, sin embargo, tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Otra posibilidad es realizar el cociente entre los casos favorables y los casos posibles. En ese caso, se podrá observar que 0,5 es la probabilidad mayor y corresponde a las opciones d) y e). De esta manera, es indiferente elegir una u otra. El docente podría destacar la presencia de tres sucesos que tienen la misma cantidad de casos favorables y, sin embargo, no tienen la misma probabilidad. También que hay resultados que tienen distinta cantidad de casos favorables pero tienen igual probabilidad. La intención es volver a destacar la importancia de considerar un número que tenga en cuenta la relación *casos favorables* versus *casos posibles.*

Sin recurrir al cociente, pero analizando la expresión fraccionaria de casos favorables sobre casos posibles, se podría analizar qué probabilidades son menores, iguales o mayores que $\frac{1}{2}$. También se podrían escribir números fraccionarios equivalentes a cada una de las probabilidades pero con denominador 48 y luego compararlos. En resumen, podemos decir que el número racional adquiere un nuevo sentido: representa una probabilidad. Así, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{24}{48}$ y 0,5 representan lo mismo en términos de probabilidades.

La intención de las siguientes actividades es volver a estudiar los experimentos propuestos en actividades anteriores pero aprovechando la posibilidad de cuantificar la probabilidad de un determinado suceso mediante la definición de Laplace. Es decir, en estas actividades no solo se podrá analizar qué suceso es más o menos probable sino también cuál es la probabilidad de cada resultado.

Notamos que si bien son dos problemas clásicos, tienen la particularidad de poner a los estudiantes a reinvertir ideas que se fueron construyendo a lo largo de la secuencia.

ACTIVIDAD 4

Parte **I.** En la actividad en la que Ciro y sus hermanos pelean por jugar con la compu, se analizó quién tiene más y menos chance de ser el primero en jugar. Podrías decir ahora, ¿qué probabilidad tiene cada hermano de jugar primero en la compu?

Parte II**.** Pensemos, de manera general, en un mazo de cartas españolas (sin comodines) del que se saca una carta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3?

b) ¿Y de que salga una carta de bastos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3 de bastos?

d) ¿Es cierto que la probabilidad de que sea una carta con un número par es igual a la probabilidad de que sea una carta con un número impar? ¿Por qué?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta con un número de un solo dígito? ¿Y la de que salga un número mayor que 13?

La intención de la primera pregunta es volver a analizar la actividad 1 pero en términos de probabilidades. Será interesante analizar cómo los valores obtenidos permiten establecer un orden en lo probable, este orden se podrá comparar con el establecido previamente a partir de la intuición. El contraste entre uno y otro permitirá cuestionar la intuición puesta en juego en su momento.

En el ítem c), los estudiantes podrían pensar que la probabilidad es la suma de las probabilidades calculadas en a) y b). En este caso, se podrá analizar si tiene sentido que, por ejemplo, sea más probable obtener un tres de bastos que obtener un tres. La determinación de los casos favorables al tres de bastos sobre el total de posibles permitirá asignar la probabilidad buscada.

En d) no es necesario calcular la probabilidad de cada suceso sino que se podría analizar que la cantidad de casos favorables es la misma para ambos sucesos siendo el experimento el mismo. Será interesante que el docente pueda considerar este hecho con los alumnos. Se podrían dar otros ejemplos dentro del mismo experimento de extracción de una carta de un mazo. Por ejemplo, se podría pensar en la probabilidad de "sacar una carta de oros" versus "sacar una carta de espada", etcétera.

ACTIVIDAD 5

Parte I. En el experimento que se estudió en la actividad 2, algunos resultados tenían la misma probabilidad de salir, ¿cuál es esa probabilidad?

Parte II. Se tira una moneda cuatro veces y se registra si sale cara o cruz.

a) Calculen la probabilidad de:
   - i. que salga cara únicamente la segunda vez.
   - ii. que salga siempre cruz.
   - iii. que haya salido al menos una cruz.
   - iv. que haya únicamente tres tiradas coincidentes.

b) Escriban dos resultados de este experimento cuya probabilidad sea 0,5.

En este momento esperamos que los alumnos utilicen la fórmula de Laplace para calcular las probabilidades. Es posible que este cálculo traiga a consideración algunas ideas previas a la introducción de la fórmula de Laplace.

ACTIVIDAD 6

A partir de nuestra experiencia con la actividad de la carrera de caballos, hemos visto que al tirar dos dados y sumar los números obtenidos se puede obtener un número entre 2 y 12, y, además, que algunos de esos números son más probables que otros. Por ejemplo, pudimos ver que los números centrales (6, 7 y 8) son los que aparecen con mayor frecuencia y por lo tanto son los resultados que tienen más chance de salir. Te proponemos estudiar las siguientes preguntas teniendo en cuenta el número que "mide" la probabilidad de cada resultado:

a) ¿Es cierto que la probabilidad de que los dados sumen 6 es igual a la probabilidad de que sumen 8? En caso afirmativo, ¿cuál es esa probabilidad?

b) ¿Cuál es el número que "mide" la probabilidad de que al sumar los números de los dos dados se obtenga un 7 como resultado?

Luego de jugar a la carrera de caballos, recolectar información de todas las tiradas y confeccionar el diagrama de barras que representa a dicha experiencia, los estudiantes han visto en varios experimentos que el número 7 sale con mayor frecuencia que el resto de los números. La propuesta ahora es avanzar e indagar por qué esto sucede, incentivando a los alumnos a contar los casos favorables del 7 (las distintas posibilidades para obtener esa suma) y compararlas con los casos favorables del resto de los números resultantes de la suma de los dos dados.

Se espera que los alumnos piensen que el 7 tiene seis combinaciones posibles (1-6; 6-1; 2-5; 5-2; 4-3 y 3-4) mientras que el resto tiene menos combinaciones posibles. Por ejemplo, el 6, otro número con muchas chances de salir, tiene cinco posibilidades (1-5; 5-1; 2-4; 4-2 y 3-3) y el 5 tiene cuatro posibilidades (3-2; 2-3; 4-1 y 1-4).

Es muy común que surjan complicaciones al momento de determinar las distintas posibilidades que tiene cada número. Para algunos estudiantes no es tan evidente que, por ejemplo, el 1-6 y 6-1 son dos posibilidades distintas y a partir de esta intuición digan que el 7 y el 6 tienen la misma cantidad de posibilidades (1-6; 2-5; 3-4 y 1-5; 2-4; 3-3, respectivamente). Esto no permite responder por qué el 7 sale más veces que el 6. Estas dos estrategias probablemente se pondrán en juego en las resoluciones de los chicos y estarán presentes en la discusión colectiva. Será interesante el análisis conjunto de los diferentes argumentos.

Para avanzar sobre estas cuestiones, el docente podrá discutir con sus alumnos las distintas posibilidades para números que tienen pocos casos favorables. Por ejemplo:

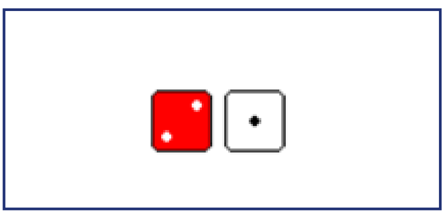
"Existe una única manera de obtener un 12, cuando en los dos dados sale un 6, es decir, cuando sale 6-6 (6 en un dado y 6 en el otro). ¿Es cierto que la probabilidad de obtener un 12 es igual a la probabilidad de obtener un 2? ¿Y que la probabilidad de obtener un 2 es igual a la de obtener un 3? ¿Por qué?”

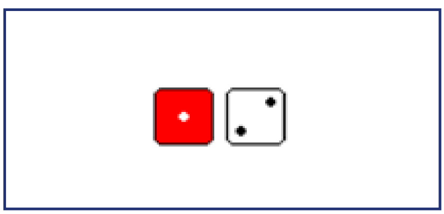
De esta manera, podrá analizarse que para obtener un 2 también existe una única posibilidad, por lo que la probabilidad coincide con la del 12. Esta manera de comparar las probabilidades se apoya en que se trabaja bajo la misma cantidad de casos posibles (por tratarse de un mismo experimento) y en la convicción de que no hay otras maneras de “formar” un 12 o un 2.

Luego, al proponer la comparación de la probabilidad del 2 con la del 3, se pondrá en juego la pregunta: “¿Se diferencia el 2-1 del 1-2?”

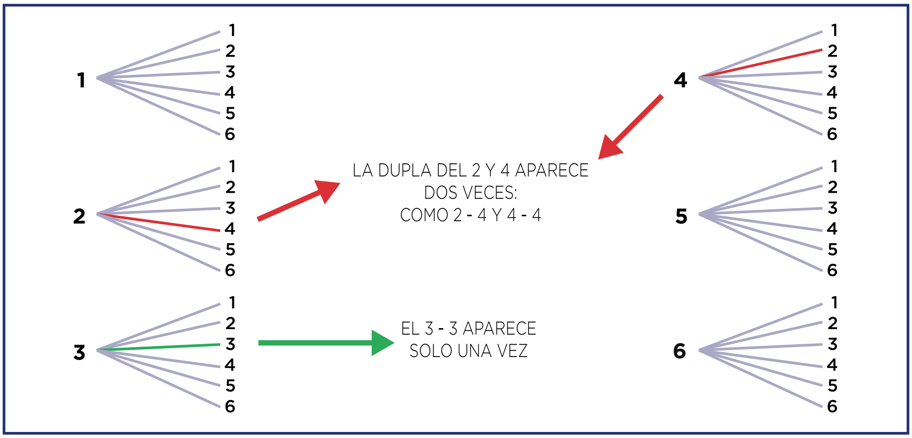
Esta discusión permite poner el foco en la problemática señalada anteriormente pero con la ventaja de tratarse de “pocos” casos favorables (para algunos alumnos, el 3 tendrá un caso favorable mientras que otros quizás piensen que son dos).

En forma alternativa, el docente podrá proponer pensar en dados de diferentes colores y preguntar, por ejemplo, ¿es lo mismo obtener un 2 rojo y un 1 blanco, que obtener un 1 rojo y un 2 blanco? La intención de esta intervención es aportar una forma de pensar la situación en la que se puede visualizar por qué tiene sentido distinguir entre el 1-2 y 2-1 (1 rojo-2 blanco y 2 rojo-1 blanco corresponden a situaciones distintas que podrían darse al tirar dos dados).





Luego de analizar esta diferencia, es posible que algunos alumnos extiendan esta idea a otros casos en los que no tiene sentido realizar tal diferenciación (no tiene sentido para los casos 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 y 6-6). En este momento, el docente podría recuperar el trabajo realizado antes y relanzar la idea de escribir de manera ordenada las distintas posibilidades que surgen de lanzar dos dados. En esta oportunidad también se podría recurrir a un diagrama de árbol:



Por último, también se podrían presentar otras alternativas para discutir la cantidad de casos favorables. Por ejemplo, proponer pensar en tirar los dados por separado (primero uno y luego el otro) o al mismo tiempo pero en lugares diferentes. Además puede presentarse otra manera de escribir las distintas posibilidades que surjan de lanzar dos dados a partir de una tabla de doble entrada:

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

PARTE 2: ESTADÍSTICA (LEER INFORMACIONES Y CONSTRUIR OTRAS)

¿Qué caballo ganará? ¿Cuánto lloverá este mes? ¿Cuántas vacunas pedir?

Las primeras actividades permiten considerar el número de veces que ocurre un resultado en un experimento aleatorio y analizar o producir diferentes registros de esa información: tablas de frecuencias, diagramas de barra, pictogramas. Luego se avanza en la construcción de las nociones de *mediana* y *moda*, y a su pertinencia en el estudio de las situaciones propuestas.

ACTIVIDAD 1: PARTE I

Caro y Nico disponen de los siguientes gráficos, que armaron mientras jugaban a la carrera de caballos:

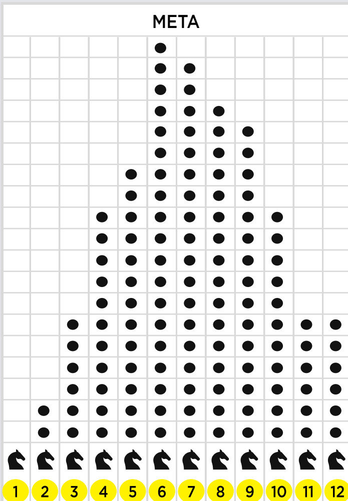


Gráfico de la partida nº 1

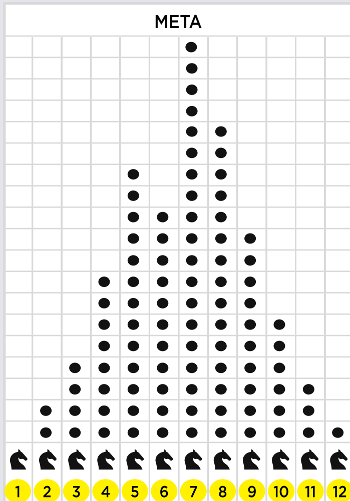


Gráfico de la partida nº 2

a) ¿Cuál fue el caballo ganador en cada partida? ¿Cuál obtuvo el segundo puesto, es decir, cuál de todos los caballos no ganadores avanzó más? ¿Cuál de los caballos avanzó menos en cada partida?

b) ¿En cuál de las partidas se tiró más veces el dado hasta que algún caballo ganó?

c) ¿Hubo empates en la partida nº 1? ¿Y en la partida nº 2? Si la respuesta es "sí", les pedimos que digan cuáles fueron los caballos que empataron.

d) Decidan cuál de las siguientes tablas informa lo que sucedió en la primera partida que jugaron Caro y Nico.

Tabla 1

Nº de Caballo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de veces que avanzó	0	2	6	11	13	19	20	16	15	11	6	6

Tabla 2

Nº de Caballo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de veces que avanzó	0	2	5	10	13	20	17	15	14	10	5	5

Tabla 3

Nº de Caballo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de veces que avanzó	0	2	5	10	13	20	18	16	15	10	6	6

Tabla 4

Nº de Caballo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de veces que avanzó	0	2	6	11	13	20	18	16	15	11	6	6

Esta actividad retoma el contexto de la carrera de caballos, pero apuntado principalmente a la interpretación de un pictograma. Se muestran dos pictogramas que son el resultado de dos partidas que una pareja de estudiantes jugaron. A partir de ellos, se realizan distintas preguntas que permiten el análisis/lectura de los pictogramas.

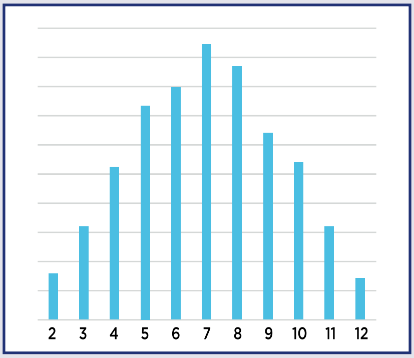
Por último, se proponen unas tablas de frecuencias para que los alumnos comparen con el primer gráfico y hagan un trabajo de lectura gráfico-tabla. Es un primer problema donde se podría trabajar "punto a punto", aunque es posible armar otras estrategias (por ejemplo, descartar la tabla 1 porque no coincide el ganador o descartar la tabla 3 ya que no se cumple que el caballo 3 y el 11 avanzaron lo mismo: la tabla que corresponde es la 4). A continuación, se propone una nueva situación en la que la lectura "punto a punto" no es adecuada para poder decidir.

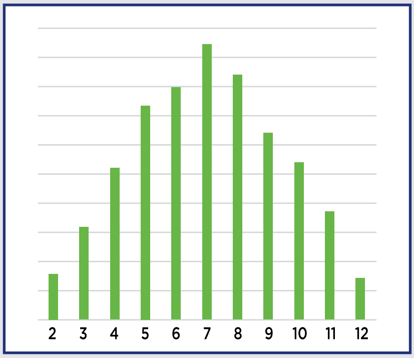
ACTIVIDAD 1: PARTE II

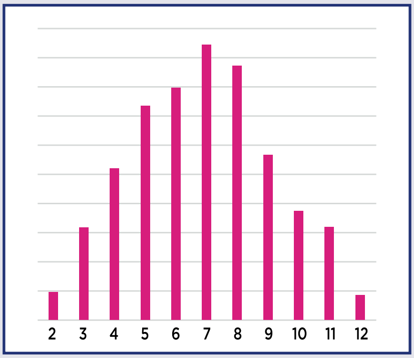
En el curso de Caro y Nico todos los jugadores reunieron en una gran tabla los datos que habían registrado durante las partidas jugadas.

Suma de los dados	Cantidad de veces que salió
1	0
2	80
3	160
4	262
5	368
6	400
7	472
8	436
9	320
10	270
11	160
12	72

Les pedimos que consideren estos tres gráficos y decidan cuál de ellos representa la información que surge de la tabla. Aunque no es posible identificar en ellos el número de veces que salió cada suma, se sabe que todos los gráficos fueron realizados con la misma escala. Por lo tanto, a igual altura, igual número de veces que salió una suma.







La intención es que los alumnos comparen las alturas de todos los gráficos en forma conjunta y hagan evidente en ellos algunas características que aporta la tabla. Por otra parte, comienzan a trabajar sobre diagramas de barras (si bien ellos no los producen, los tienen que estudiar). Aquí se espera un análisis cualitativo de los diagramas. Como se mencionó anteriormente, este problema está pensado para que no sea posible una lectura "punto a punto". Es necesario ver las relaciones de la tabla y a partir de eso elegir el gráfico correcto, que es el azul. Cada gráfico a descartar tiene dos características que posibilitan su descarte:

- En el rojo, la altura de los valores 3 y 11 son iguales (como en la tabla) pero no son el doble de la altura del 2. Además, la altura del 10 es más cercana a la del 11 que a la del 4.
- En el verde, la altura de los valores 3 y 11 no coincide. Además, el valor ganador se aleja mucho del segundo puesto. La tabla hace evidente que la distancia entre primero y segundo puesto y entre segundo y tercer puesto son similares, mientras que el gráfico muestra que el segundo queda cerca del tercero.

En un momento de síntesis, la actividad hasta aquí desplegada da referencia suficiente como para presentar las nociones de *pictograma*, *diagrama de barras* y *tabla de frecuencias absolutas*. Los ejemplos presentados permiten contar con referencias de cada una de las formas de agrupamiento de la información. Se podrá avanzar en nuevas producciones pedidas a los alumnos sugiriendo algunos cambios a las ya disponibles.

ACTIVIDAD 2

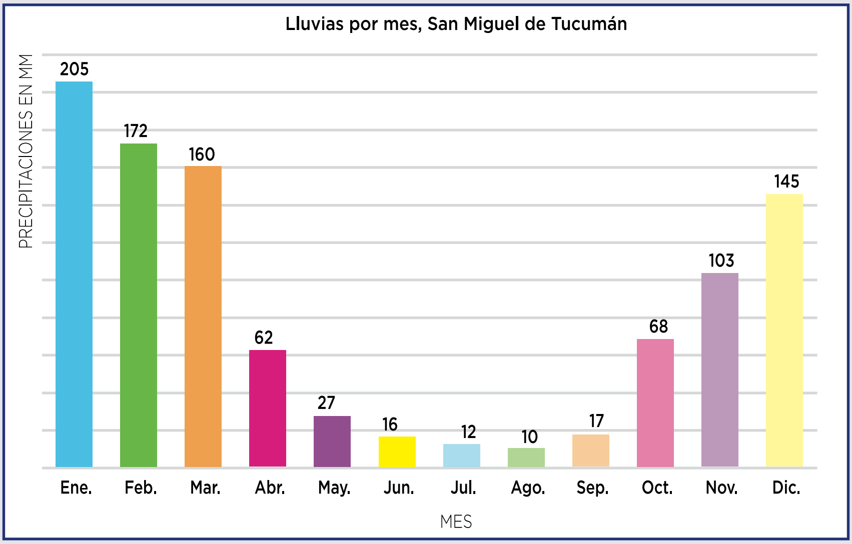
a) En grupos, realicen el siguiente experimento: *Tirar un dado y registrar el número que sale.*
   Repitan 500 veces este experimento.
b) Organicen los datos que obtuvieron en una tabla de frecuencias.
c) Construyan un gráfico para mostrar la información que se observa en la tabla que realizaron en el ítem b).

Un escenario posible para este trabajo es organizar la clase en grupos de cinco alumnos, de manera tal que las quinientas tiradas se puedan repartir entre los integrantes de cada grupo. La intención de la actividad es, por un lado, que los estudiantes construyan tablas de frecuencias absolutas y gráficos, retomando las ideas trabajadas con las actividades anteriores. Por otro lado, se espera que los estudiantes, al realizar el gráfico, se den cuenta que todas las barras quedan parecidas. Esto permitirá realizar una comparación con el gráfico seleccionado en la actividad anterior. El docente podrá retomar la idea (presente en el problema de los caballos) de que aquellos números que tienen las barras más altas poseen más probabilidades de salir que aquellos números que tienen las barras más bajas. Como en este nuevo experimento las barras quedarán similares, entonces podremos suponer que todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

Si bien esto podría resultar intuitivo para los chicos, será interesante poner en diálogo estas conclusiones (basadas en la experiencia) con un análisis teórico del experimento, que podrá apoyarse en la definición de Laplace (la probabilidad de cada resultado es la misma, pues es $\frac{1}{6}$).

ACTIVIDAD 3

El siguiente gráfico representa el total mensual de lluvia caída en cada mes a lo largo de un año en San Miguel de Tucumán.



a) ¿En qué época del año predominan las lluvias?

b) ¿Cuál es el mes de mayor caudal de lluvias?

c) Esbocen un gráfico de barras, similar al anterior, que corresponda a una localidad del hemisferio sur

i. con veranos secos e inviernos lluviosos;

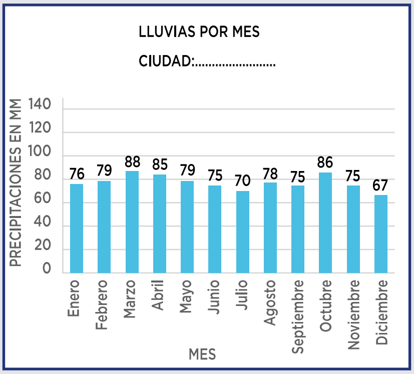
ii. con sequía en marzo-abril y con la misma precipitación anual que San Miguel de Tucumán;

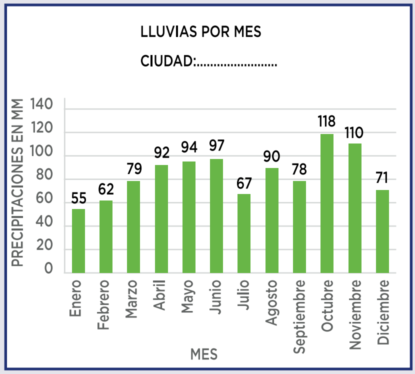
iii. con lluvias parejas a lo largo de todo el año y con la misma precipitación anual que San Miguel de Tucumán.

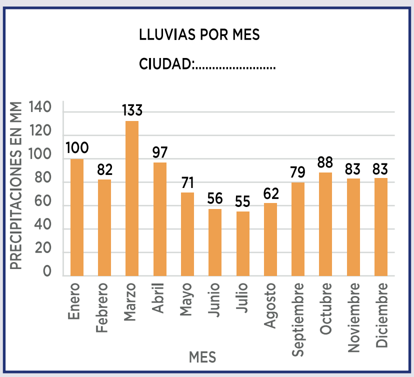
En esta actividad se busca que los estudiantes interpreten la información que se les presenta en un gráfico de barras en el contexto de las precipitaciones mensuales de una ciudad a lo largo de un año. A partir de esta lectura de información e interpretación, en el ítem c) se les pide a los alumnos que produzcan nuevos gráficos que deberán cumplir con una característica general. Notamos que, en cada caso, no existe un único gráfico que responda a lo pedido. Es esta una oportunidad para analizar en forma comparada varias producciones apelando a extraer de ellas aquello que es vital en cada gráfico y cómo se lo visualiza.

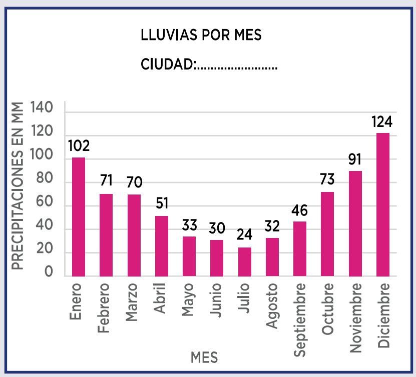
ACTIVIDAD 4

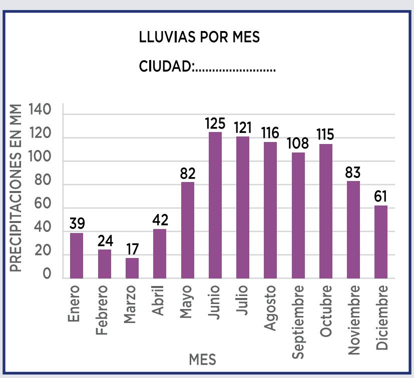
A continuación les presentamos cinco gráficos que informan sobre las precipitaciones mensuales de diferentes ciudades: Montevideo, Milán, Gualeguaychú, Caracas y Estambul. Les pedimos que indiquen a qué ciudad corresponde cada gráfico en función de los datos que tienen sobre las lluvias de cada una de ellas.











a) Gualeguaychú presenta todos los meses al menos 40 mm.
b) Caracas y Montevideo tienen la misma precipitación anual.
c) Milán presenta la mayor precipitación anual.
d) Caracas acumula, en el segundo semestre, más del 50% de sus precipitaciones anuales.
e) En el segundo semestre, las precipitaciones mensuales en Estambul aumentan progresivamente mes a mes.

Los estudiantes tendrán que identificar qué información es necesaria para poder identificar el gráfico de cada una de las ciudades y para ello será necesario reelaborar la información que disponen en los gráficos en relación con las características que se mencionan. Se espera un análisis global de esa información pero también un análisis parcial. Por ejemplo, resulta necesario sumar las precipitaciones mensuales para saber cuál es la precipitación anual pero también determinar el total de precipitaciones que se acumulan en el segundo semestre y su relación con el total anual.

En algunos casos, la lectura de la información "puntual" que brinda cada gráfico permite identificar a qué ciudad le corresponde o permite descartar algunos de ellos. Por ejemplo, podría identificarse el gráfico de Estambul, ya que hay un único gráfico que verifica que "en el segundo semestre las precipitaciones aumentan progresivamente mes a mes". Esta estrategia no permite identificar el gráfico de Gualeguaychú si solo se considera la información "presenta todos los meses al menos 40 mm". Sin embargo, se podrían descartar dos de los gráficos.

ACTIVIDAD 5

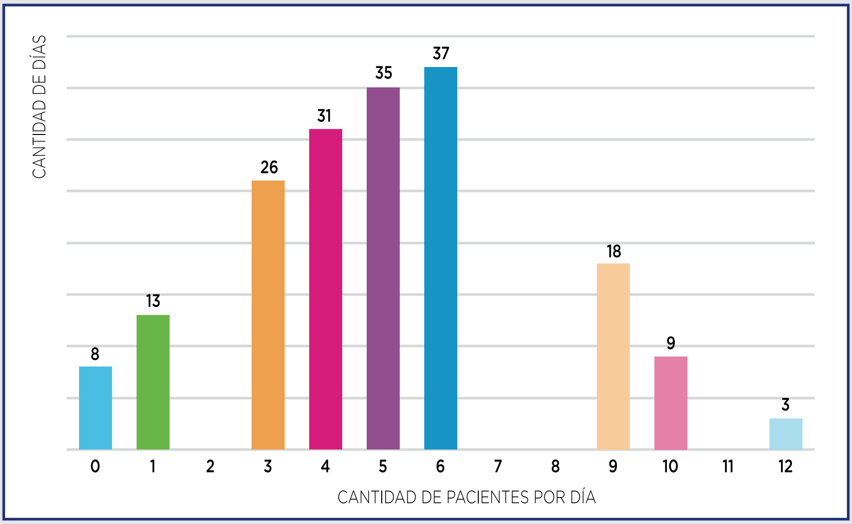
En la actividad 4, los estudiantes analizaron gráficos que informan sobre las precipitaciones de distintas ciudades. En esta actividad les proponemos continuar con la búsqueda de información en esos gráficos pero con el objetivo de poder completar el siguiente cuadro:

	Mes con mayores precipitaciones	Promedio mensual de precipitaciones	Meses con precipitaciones que superan el promedio	Meses con precipitaciones que no superan el promedio
Milán				
Estambul				
Montevideo				
Caracas				
Gualeguaychú				

Para avanzar con la lectura de información de gráficos, en este problema se piden nuevos datos a partir de los cuales se puedan comparar a todas las ciudades. De este modo, se pregunta el monto de lluvias anuales, el promedio o también detectar meses con algunas características específicas. El momento de puesta en común puede utilizarse para relanzar la consigna de qué otras columnas podrían armarse para todas las ciudades. De este modo, los alumnos pueden volver a inspeccionar los gráficos en busca de nuevos aspectos visibles en todos y responder a preguntas tales como "qué ciudades tienen veranos secos e inviernos lluviosos" o bien "qué ciudades son lluviosas en casi todas las estaciones". También se podrán formular preguntas que los gráficos no permiten contestar y así discutir el rol (alcance y límites) de la información en los gráficos. En el momento de síntesis del final, ponemos: "En cambio, será interesante comparar la idea de promedio en los gráficos de lluvias y en el siguiente, el de los pacientes"

ACTIVIDAD 6

En una sala de primeros auxilios de la localidad de "Ciudad Sanita" están faltando algunos insumos. Para considerar un cambio en el pedido que hay que hacer a las autoridades sanitarias, se recaba información de las personas que se atienden por día en el programa "Control básico". Cuando un paciente se presenta al control básico, el protocolo de atención indica que se le toma una placa, se le controla la presión y se lo vacuna contra la gripe. Durante 180 días se registró el número de pacientes atendidos en este control en forma diaria. La información obtenida se utilizó para confeccionar el siguiente gráfico:



a) El director de la salita quiere estar preparado para dar la vacuna de la gripe a todos los pacientes que se presenten, ¿qué número de vacunas necesita a diario?
b) ¿Cuántos pacientes se han atendido a diario, en promedio, en la primera parte del año?
c) Si la vacuna se vuelve muy costosa, el director querrá estar preparado solo para el escenario más factible en términos de los pacientes que se presentan. En ese caso, ¿cuántas vacunas debería disponer en la salita a diario?

En esta última actividad se presenta una variable numérica: el número de pacientes que asisten por día. No es la primera oportunidad en la que se trabaja con una variable numérica, ya se había presentado una variable así en el problema de la suma de los dados. No obstante, aquí el contexto hace más factible confundir la información intercambiando el rol de los ejes y que los alumnos interpreten que los números que están sobre cada columna son el número de pacientes atendidos.

Si bien se eligió presentar un gráfico para ofrecer una idea global de la situación, los alumnos disponen de todos los datos como si estuvieran ordenados en una tabla. La pregunta del inciso a) apunta a que se pueda distinguir entre el significado de los valores del 0 al 12 en el eje x (los pacientes que se atienden por día) y los datos que se presentan en el eje y (la frecuencia absoluta, es decir el número de veces que ocurrió ese valor). Luego, entre las preguntas b) y c), se trata de poner en contexto dos situaciones distintas.

En el ítem a) se propone vacunar a todos los pacientes que se presenten. Es cierto que estamos tratando de predecir un futuro incierto en función de la información que nos aporta el pasado a través de los datos que hemos recopilado. ¿Qué es lo que podemos esperar? Esto es algo que puede ser tema de debate en el aula. Más allá de esta cuestión, si pensamos que para predecir el futuro nos vamos a apoyar en el pasado, los alumnos podrán considerar cuál es el escenario de máxima. En ese caso hay que distinguir, una vez más, que una cosa es el número de pacientes que asisten por día y otra el número de veces que eso ocurrió. Para vacunar a todos es necesario disponer de tantas vacunas como pacientes puedan venir. Para esto hay que considerar cuál fue el mayor número de pacientes que llegó a la salita. Esto dará el número 12 como respuesta.

En el último ítem, en cambio, se trata de pensar que, bajo el supuesto del excesivo costo, "estar preparado para todo" debería cambiarse por "estar preparado para el escenario más probable". ¿Cuál es la información que aporta el gráfico acerca de lo más probable? Nos interesa esta discusión entre los estudiantes. Sin duda la moda es una buena medida para indicar lo más probable en este problema. Además, en este contexto, estar preparado para vacunar a seis pacientes nos deja preparados para vacunar a menos de seis pacientes. Algunos alumnos podrán pensar que elegir el promedio de pacientes por día para hacer esta previsión. Será esta otra cuestión a considerar en el aula.

En un momento de cierre, se propone presentar a los alumnos la definición de *moda* y recuperar las actividades 1 y 2, donde la moda está representada respectivamente por el caballo ganador y por la cara del dado que más veces salió. Al mismo tiempo, estas actividades no son un buen escenario para dar sentido al promedio. Tener esto en cuenta permitirá no pensar en el promedio en estos problemas.

En cambio, será interesante comparar la idea de promedio entre los gráficos de lluvias y el de los pacientes. Se ha preparado el gráfico de pacientes para que el promedio dé un valor que aparece como dato: cinco pacientes. Se podrá comparar el cálculo del promedio mensual de lluvias, en el que se sumarán los valores de lluvias de cada mes y se dividirá por doce, con el de los pacientes promedio diarios, donde es necesario tomar los datos de ambos ejes.

Se trata de apenas un primer encuadre para presentar estas medidas de posición. El docente podrá avanzar con otros problemas para seguir profundizando dichas ideas.

A MODO DE CIERRE

Las actividades presentadas tienen un doble objetivo: por un lado, acercar al alumno a escenarios diversos donde lo cierto es casi inexistente y donde sea necesario desplegar el pensamiento probabilístico para comprender, tomar decisiones, resolver problemas y distinguir lo cierto de lo incierto. Por otro lado, se ha procurado acercar a los alumnos a las experiencias como escenarios donde apoyarse para introducir nociones tanto del campo de las probabilidades como del de la estadística.

Sabemos que esta propuesta de trabajo es demandante en términos del tiempo de clase y del esfuerzo del docente. Tiene momentos donde el conocimiento alcanzado es provisorio y también apuesta a la recuperación de ideas surgidas en otros momentos de la enseñanza que preceden al momento en el que se está sumergido. Sin embargo, creemos plenamente en la riqueza de este tipo de trabajo en el aula de cara a la producción de ideas y razonamientos matemáticos por parte de los alumnos.

Como hemos mencionado al inicio de este documento, se trata de una vía para acercar experiencias que permitan hacer vivir en el aula a la idea de incertidumbre y a la matemática que se encarga de ella. Esperamos que resulte una experiencia generadora de muchos aprendizajes para alumnos y para docentes.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, María Carmen; Godino, Juan y Cañizares, María Jesús

1987 *Azar y probabilidad*, colección Matemática. Cultura y aprendizaje, vol. 27, Madrid, Síntesis.

Batanero, Carmen y Serrano, Luis

1995 "La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas", en *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 5, Barcelona, Grao, pp. 15-28.

Bressan, Ana y Bressan, Oscar

2008 *Probabilidad y Estadística. Cómo trabajar con niños y jóvenes. Construyendo paso a paso herramientas y conceptos*, Buenos Aires, Noveduc.

Chemello, Graciela; Fernández, Graciela y Gysin, Liliana

2004 "La enseñanza de la probabilidad y la geometría", en *Revista de Educación Matemática*, vol. 19, nº 2, pp. 3-29.

Foncuberta, Juan

1996 *Probabilidades y estadística*, Buenos Aires, Prociencia, Conicet.

Kelmansky, Diana

2009 *Estadística para todos. Estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas*, Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación, Instituto Nacional de Educación Tecnológica. <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001858.pdf> [consulta: 26 de febrero de 2020]

Santaló, Luis

1995 "Las probabilidades en la educación secundaria", en íd. *et al.*, *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, Madrid, Rialp.

Sosa Escudero, Walter

2014 *Qué es (y qué no es) estadística. Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas*, Buenos Aires, Siglo Veintiuno.

CAPÍTULO 4

Números racionales: sentidos, representaciones y propiedades

Cecilia Lamela, Sabrina Della Santa y Cintia Mendoza

INTRODUCCIÓN

En la elaboración de esta propuesta se ha considerado el eje "Número y operaciones" que proponen los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para la Formación General del Ciclo Básico de la Educación Secundaria. En particular, para el conjunto de los números racionales se propone:

> El reconocimiento y uso de los números racionales en situaciones problemáticas que requieran:
>
> - interpretar el número racional como cociente;
> - usar diferentes representaciones de un número racional (expresiones fraccionarias y decimales, notación científica, punto de la recta numérica, etc.), argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver;
> - analizar diferencias y similitudes entre las propiedades de los números enteros (Z) y los racionales (Q) (orden, discretitud y densidad);
> - explorar y enunciar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos (discretitud, densidad y aproximación a la idea de completitud), estableciendo relaciones de inclusión entre ellos (Ministerio de Educación, 2011).

En esta propuesta se presentan una serie de actividades que el docente puede modificar o agregarles otras. Dichas actividades proponen distintas tareas para los estudiantes con el objetivo de que logren reflexionar sobre el trabajo realizado, acceder a las razones por las cuales un cierto conocimiento funciona de una cierta manera, lograr cierto nivel de fundamentación para los conceptos y las propiedades, generalizar procedimientos, resultados o relaciones, formular leyes para comparar números, establecer la verdad o falsedad de enunciados, comparar procedimientos realizados por otros.

En algunas de las actividades no se espera que los estudiantes resuelvan de manera inmediata todo lo que se les propone sino que empiecen a explorar, a abordar y a ensayar. A veces llegarán a conclusiones de manera autónoma, otras a conclusiones intermedias y en otras oportunidades será el docente quien convoque explícitamente a elaborar conclusiones apoyadas en el trabajo realizado.

La tarea de exploración por parte del estudiante está pensada como forma de generar un trabajo autónomo, un desafío intelectual que le permite elaborar criterios para validar su propio trabajo. En algunas ocasiones los estudiantes pueden tener dificultad en entender lo que se les está pidiendo. En general, esta dificultad se relaciona con el hecho de que la tarea propuesta es conceptualmente nueva para el estudiante. Por eso, entender lo que una actividad propone implica ampliar la perspectiva de los conceptos involucrados. Comprender esto es parte del aprendizaje que deberán enfrentar los estudiantes. Nos distanciamos así de una posición según la cual "el alumno no entiende las consignas" y eso supone un problema de lectura. Entender la consigna es parte de la construcción del conocimiento que está puesto en juego en la actividad. En algunas oportunidades será necesario –y así lo mencionamos en las propuestas– que sea el docente quien aporte lo necesario para que sus estudiantes puedan involucrarse en el trabajo, que "complete" de manera oral las formulaciones escritas del problema.

El estudio de los números racionales comienza en la escolaridad primaria de nuestros estudiantes y continúa en la escuela secundaria básica. La pregunta es qué abordar en este momento del estudio de los números racionales con nuestros estudiantes de primero, segundo o tercer año.

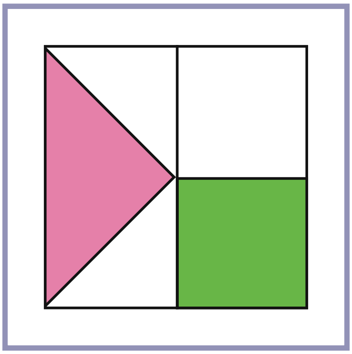
Queremos comenzar señalando algunas cuestiones que permitirán entender el porqué de esta propuesta. Cuando se trabaja con números racionales se está trabajando con un nuevo conjunto numérico que tiene ciertas rupturas con el conjunto de los números enteros. Solo a modo de ejemplo, podemos señalar que: para representar un número, en este caso una fracción, se utilizan dos números enteros; la idea de la multiplicación no puede –salvo cuando se multiplica un natural por una fracción– ser interpretada como una suma reiterada y en muchos casos el producto de dos números racionales es menor que cada uno de los factores; el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo; a diferencia de los números enteros, los números racionales ya no tienen el número “siguiente inmediato”. Esto, y más, es la complejidad a la que se enfrentan nuestros estudiantes al estudiar los números racionales. Un nuevo conjunto en el cual muchas de sus *propiedades* entran en contradicción con cuestiones trabajadas en el conjunto de los números enteros (densidad, inverso multiplicativo, multiplicación como sumas sucesivas, etc.).

Por otro lado, un número racional puede tener distintos sentidos. Puede ser el resultado de un reparto y quedar ligado al cociente entre naturales (repartir 3 entre 4 da por resultado $\frac{3}{4}$); puede ser el resultado de una medición y, por tanto, remitirnos a establecer una relación con la unidad (como ocurre en la Parte 3, actividad 3, de esta propuesta); expresar una constante de proporcionalidad; en particular, esa constante puede tener un significado preciso en función del contexto (concentración de calcio en los alimentos –como se aborda en la Parte 3 de esta propuesta, actividades 1 y 2–, pero también velocidad, escala, porcentaje, entre otros); o puede ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo.

Teniendo en cuenta estas cuestiones es que se decidió anclar esta propuesta en una definición posible de fracciones. Para nosotros, y no para los estudiantes, se define que si n veces una cierta cantidad equivale a un entero, esa cantidad se llama $\frac{1}{n}$.

Sostenemos que esta definición resulta más adecuada (se ampliará en el desarrollo de las distintas actividades) y más completa desde el punto de vista matemático, separándonos así de la idea de que, por ejemplo, $\frac{1}{4}$ es dividir al 1 en cuatro partes iguales y tomar una de esas partes.

Notemos, en el dibujo siguiente, que el triángulo rectángulo y el pequeño cuadrado representan ambos $\frac{1}{4}$ del cuadrado más grande, en tanto que con 4 de esas partes (consideradas en área) se completa el entero.



Como se dijo al principio de este capítulo, el estudio de los números racionales comienza mucho antes de la escuela secundaria. Sin embargo, nos encontramos con ciertas dificultades cuando abordamos este campo numérico: ¿qué pasa cuando a un chico se le pregunta qué número decimal es $\frac{3}{7}$ y responde 3,7? ¿Qué podemos hacer desde la enseñanza?

Nuestra intención es abordar con esta propuesta ciertas "creencias" que los estudiantes se han construido sobre los números racionales. Sabemos que los estudiantes traen consigo ciertos saberes y supuestos sobre determinados conocimientos, por ejemplo:

- Si tengo una fracción $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, donde a y b son números más grandes que c y d, entonces la fracción $\frac{a}{b}$ seguro que es mayor que $\frac{c}{d}$. La fracción $\frac{348}{567}$ es mayor que $\frac{3}{2}$ porque 348 y 567 son números más grandes.
- La fracción $\frac{a}{b}$ se encuentra entre los enteros a y b. La fracción $\frac{5}{7}$ está entre 5 y 7.

- En los números naturales, el producto entre ellos da mayor a los factores; en racionales, tiene que pasar lo mismo.
- Una fracción es equivalente a otra solo si se obtiene multiplicando o dividiendo el numerador y denominador de la fracción por un número natural; la fracción $\frac{4}{10}$ no resultaría equivalente a $\frac{6}{15}$".

Consideramos que poner en discusión en el aula estas creencias puede favorecer y ayudar a los estudiantes a avanzar en el estudio de este campo numérico.

Por último, señalamos que en esta propuesta se aborda el estudio de los números racionales a partir de estudiar dos representaciones a la vez, tanto fracciones como expresiones decimales, para que no queden desconectadas y entonces se genere la idea de que "son números diferentes". También se aborda, tomando los NAP, el estudio de la comparación de números racionales, el orden y la densidad.

En cada actividad se encontrarán algunos valores particulares. Sabemos que, según los valores que el docente elija para una determinada actividad, se modifican las estrategias de resolución de los chicos y en consecuencia el conocimiento utilizado para resolver dicha situación. Del mismo modo, es posible elegir otros valores diferentes que funcionen como variable didáctica y, de ese modo, hacer que la misma actividad resulte más compleja. Señalamos esto porque habrá sugerencia de incluir unos valores para años más grandes que permitan avanzar ciertas estrategias utilizadas en años anteriores.

PARTE 1: COMPONER CANTIDADES Y UBICAR NÚMEROS RACIONALES ENTRE ENTEROS

¿Cómo comparar cantidades y números escritos de distintas formas?

En esta primera parte se trabajarán dos aspectos de los números racionales. Por un lado, la composición de cantidades a partir de otras expresadas en fracciones y, por otra, ubicar números racionales entre enteros. Como se mencionó en la introducción, tomamos la definición de fracción: "Si necesito n veces una cierta cantidad para completar un entero, esa cantidad se puede expresar como $\frac{1}{n}$". A partir de esto, se puede trabajar con las fracciones del estilo $\frac{m}{n}$ como aquellas que m veces $\frac{1}{n}$ forman $\frac{m}{n}$.

Este modo de ver a las fracciones permitiría, por un lado, que si se necesitan n veces $\frac{1}{n}$ para obtener un entero, entonces se puede expresar dicho entero como $\frac{n}{n}$. Del mismo modo se puede expresar k enteros como $k \cdot \frac{n}{n}$. Cabe aclarar que esta escritura se utiliza solo en estos términos para el docente.

Por otra parte, esto sería un apoyo para la resolución de cálculos mentales con fracciones. Por ejemplo, al resolver $\frac{2}{3} + 2$ es posible expresar al 2 como $\frac{6}{3}$. Si se debiera resolver $\frac{4}{3} \cdot 7$ es posible expresar al $\frac{4}{3}$ como $4 \cdot \frac{1}{3}$; como 4×7 es 28, entonces se obtiene 28 de $\frac{1}{3}$, es decir, $\frac{28}{3}$.

ACTIVIDAD 1

a) En una heladería arman potes de helados de distintos tamaños para su venta. El encargado decidió armar una tabla que le permitirá organizar su trabajo, sabiendo rápidamente cuántos potes de helados necesita, según el peso de cada uno, para vender dos kilos de helado. Completen la tabla.

Si los potes tienen	Necesito
$\frac{1}{2}$ kg	
$\frac{1}{4}$ kg	
$\frac{1}{8}$ kg	
$\frac{1}{3}$ kg	
$\frac{1}{6}$ kg	

b) Como su trabajo se agilizó con el armado de la tabla, el encargado decidió armar una tabla pero para vender 3 kilos de helado. ¿Es correcta la tabla que armó? En caso de que alguna cantidad de potes sea incorrecta, corríjanla.

Si los potes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kg	12 potes
$\frac{1}{2}$ kg	6 potes
$\frac{1}{3}$ kg	10 potes
$\frac{1}{6}$ kg	16 potes
$\frac{1}{8}$ kg	24 potes

En esta actividad se propone armar enteros a partir de determinadas fracciones y en un contexto donde los estudiantes puedan apoyarse, permitiendo establecer distintas relaciones con las fracciones. Proponemos trabajar primero el ítem a) y compartir en el espacio colectivo los distintos modos de completar esa tabla, para que las conclusiones a las que se arribe en este momento puedan ser utilizadas luego por los estudiantes para avanzar en el trabajo.

Al intentar completar la tabla, podría suceder que los estudiantes tengan dificultad a la hora de interpretar la actividad y respondan que si los potes tienen $\frac{1}{2}$ kg se necesitarán $\frac{3}{2}$ kg para completar 2 kg. Es probable que esto suceda porque interpretan que el problema pregunta cuánto le falta a la fracción para llegar al entero pedido.

Creemos que el contexto del problema permite a los chicos completar parte de la tabla, ya que probablemente saben qué es un pote de $\frac{1}{4}$ kg y de $\frac{1}{2}$ kg de helado. Pero puede suceder que piensen que no es posible responder cuántos potes de $\frac{1}{8}$ kg, $\frac{1}{3}$ kg y $\frac{1}{6}$ kg se necesitan para 2 kg, ya que dichos pesajes pueden ser desconocidos para ellos. Frente a esto, el docente podría preguntar qué pensaron para completar $\frac{1}{2}$ kg y $\frac{1}{4}$ kg de helado. A partir de ahí, podría trabajar con los chicos sobre qué sería un pote de $\frac{1}{8}$ kg o de $\frac{1}{3}$ kg, apelando a que $\frac{1}{3}$ kg es la tercera parte de 1 kg, así como $\frac{1}{4}$ kg es la cuarta parte de 1 kg de helado. Entonces, si se necesitan 4 potes de $\frac{1}{4}$ kg para obtener 1 kg, se necesitarán 3 potes de $\frac{1}{3}$ kg para obtener 1 kg.

En esta tabla se pide completar 2 kg de helado. El docente puede invitar a los estudiantes que tengan dificultad para resolver la actividad a pensar cuántos potes se necesitan si se quiere completar 1 kg. Tal vez esta invitación a pensar en completar un entero, en este caso 1 kg, les permita avanzar en la tarea de completar 2 kg. De este modo, podrían aparecer argumentaciones por parte de los estudiantes del estilo: "Si para 1 kg se necesitan 2 de $\frac{1}{2}$ kg entonces para 2 kg se va a necesitar 4 de $\frac{1}{2}$ kg".

Tras completar la tabla es posible, apoyados en el contexto de ser necesario, analizar otras relaciones además de las mencionadas. Por ejemplo, se pueden comparar los potes de $\frac{1}{2}$ kg y $\frac{1}{4}$ kg de capacidad. Para obtener 1 kg se van a necesitar menos potes de $\frac{1}{2}$ kg que de $\frac{1}{4}$ kg. Esto permite discutir que si se necesita menos cantidad de potes es porque el pote tiene mayor capacidad y, por lo tanto, es más grande. En términos de las fracciones, si se necesitan menos potes de $\frac{1}{2}$ kg que de $\frac{1}{4}$ kg para completar 1 kg, entonces $\frac{1}{2}$ es una fracción mayor que $\frac{1}{4}$. Por lo tanto, si la fracción es más grande se necesita menos cantidad de ella para completar un entero.

Además, existe una relación entre ciertos tamaños de potes. Por ejemplo, si se tienen potes de $\frac{1}{3}$ kg se necesitan 3 para llegar a 1 kg y si se tienen de $\frac{1}{6}$ kg se necesitarán el doble de potes que antes, es decir 6 para llegar a 1 kg. De este modo también se puede discutir que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$ porque se necesita el doble. Del mismo modo, se puede mostrar que $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$.

Muchos chicos habrán estudiado en años anteriores el cálculo de la mitad de una fracción. En este caso se podría dar un sentido diferente a dicho cálculo de la mitad de una fracción.

Las conclusiones a las que se pueda llegar con los estudiantes en el espacio colectivo serán un insumo para trabajar el ítem b) del problema. En particular, se puede reflexionar en la clase, a partir de lo trabajado, que se necesita n fracciones de $\frac{1}{n}$ para completar un entero, $2 \cdot n$ fracciones de $\frac{1}{n}$ para completar dos enteros, y así sucesivamente.

A continuación, proponemos otros ítems a esta actividad:

ACTIVIDAD 1 (CONTINUACIÓN)

c) Tres clientes compraron una cierta cantidad de helado. La balanza marcó los siguientes pesajes: 2,25 kg; 3,5 kg y 1,75 kg. Sabiendo que el empleado cuenta con potes de 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg, $\frac{1}{4}$ kg, $\frac{1}{8}$ kg, $\frac{1}{3}$ kg y $\frac{1}{6}$ kg, ¿qué potes pudo haber utilizado para armar los pesajes anteriores?

d) ¿El empleado pudo haber utilizado solo potes de $\frac{1}{2}$ kg para armarlos? ¿Y de $\frac{1}{4}$? ¿Y de $\frac{1}{8}$? ¿Y de $\frac{1}{3}$?

e) ¿Cómo podría armar el empleado 1,25 y 2,75 kg con potes de distintos pesos si cuenta con todos los potes menos los de 1 kg? Propongan dos maneras distintas de armar dichos pesajes.

Estas preguntas intentan que los estudiantes puedan componer ciertas expresiones decimales a partir de determinadas fracciones, pudiendo establecer relaciones entre estas dos formas de representar números. En el ítem c) será necesario establecer que $\frac{1}{4}$ kg equivale a 0,25 kg y que $\frac{1}{2}$ kg equivale a 0,5 kg. Es posible que para este ítem solo se utilicen los potes de 1 kg, de $\frac{1}{2}$ kg y de $\frac{1}{4}$ kg.

En el ítem d) se propone utilizar otros potes para completar las cantidades pedidas. Aquí se podría discutir, por ejemplo, que no es posible armar 2,25 kg con potes de $\frac{1}{3}$ kg ya que no se puede armar cuartos (el 0,25 kg que se necesita) con tercios completos, sin necesidad de recurrir a la expresión decimal de $\frac{1}{3}$. Tampoco se podrían armar 2,25 kg con potes de $\frac{1}{2}$ kg ya que es mayor la parte decimal de $\frac{1}{2}$ que la que se necesita armar en 2,25 kg. En cambio, sí se pueden armar 2,25 kg con octavos, porque $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$; esto es, $\frac{1}{8}$ es la mitad de 0,25. ¿Cómo se calcula esa mitad? Será momento oportuno para recordar en la clase que 0,25 = 0,250 y, por lo tanto, su mitad es 0,125.

Durante la discusión colectiva con los estudiantes se deberían establecer frente a toda la clase ciertas relaciones entre expresiones decimales y fracciones tales como $0{,}25 = \frac{1}{4}$; $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $0{,}75 = \frac{3}{4}$; $0{,}125 = \frac{1}{8}$, etc. Estas equivalencias podrían quedar registradas en el pizarrón y las carpetas para que puedan ser reutilizadas en otras actividades.

Queremos señalar que las equivalencias entre expresiones se pueden validar por un lado al realizar la división, por ejemplo $1 \div 4$ y obtener 0,25. Pero también apelando a que, como se necesitan 4 veces 0,25 para completar 1, entonces esa parte 0,25 es la cuarta parte de 1, esto es $\frac{1}{4}$. Del mismo modo, se puede analizar que 0,75 son 3 veces 0,25, esto es 3 veces $\frac{1}{4}$ del entero, y se corresponde con la fracción $\frac{3}{4}$.

ACTIVIDAD 2

Estos números se encuentran entre 0 y 3. Colócalos en la columna correspondiente, explicando cuál es el criterio que utilizas para ubicarlos.

$\frac{3}{7}$ $\frac{14}{5}$ $\frac{11}{9}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{5}{6}$ $2 \cdot \frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$

Entre 0 y 1	Entre 1 y 2	Entre 2 y 3

Esta actividad tiene como intención que los estudiantes puedan elaborar criterios para ubicar fracciones entre dos enteros, tarea que se propone desde el enunciado de la actividad. Sería interesante que los distintos criterios o las distintas estrategias propuestas por ellos vayan quedando registradas en las carpetas o cuadernos a partir de las enunciaciones que surjan en la discusión colectiva, de modo que puedan ser reutilizadas en otros momentos del estudio de los números racionales.

Esta tarea de elaborar y sobre todo de formular una estrategia invita a cada estudiante a asumir otro rol: además de ser productor de una idea, ahora debe comunicarla a sus compañeros. Luego de cada pequeña discusión colectiva, puesta en común de procedimientos, análisis y reflexión, el docente podría armar con ellos pequeñas conclusiones que queden esbozadas en las carpetas.

Los estudiantes podrían resolver de distintas formas esta actividad. Solo a modo de ejemplo, podemos anticipar algunas estrategias de resolución. Esta tarea de pensar distintas resoluciones de los chicos ante una determinada propuesta nos permite contemplar diversos escenarios de clase y cómo sería una gestión posible ante cada uno de ellos.

Por ejemplo, en el caso del $\frac{3}{7}$, los estudiantes podrían pensar que $\frac{3}{7} = 3{,}7$. Sabemos que esta es una interpretación posible y que muchas veces realizan nuestros estudiantes. De este modo, podrían llegar a la conclusión de que $\frac{3}{7}$ no se ubica en la tabla, ya que al ser igual a 3,7 se ubica entre 3 y 4.

Como hemos mencionado, este es un buen momento para apelar a la definición de fracción que planteamos anteriormente a través de preguntas como "¿cuántos séptimos se necesitan para completar un entero?". En este caso, sería: "¿Con $\frac{3}{7}$, se tiene más o menos que un entero?". Así, se puede reflexionar con los estudiantes que si se necesitan 7 de $\frac{1}{7}$ para completar un entero, entonces con $\frac{3}{7}$ no se llega a 1. Esto permitirá cuestionar, si es que aparece en la clase, la idea de que $\frac{3}{7} = 3{,}7$ (en su expresión decimal, los números que no llegan a un entero se escriben como 0,.....); o bien que en 3,7 se tienen 3 enteros, entonces es más que 1. También puede ser necesario volver sobre otra idea que ya hemos planteado: la expresión fraccionaria y la expresión decimal de un mismo número no pueden representar dos números diferentes; esto es, no puede ser uno menor que 1 y el otro mayor que 3, ya que se trata de dos expresiones equivalentes.

En el caso del $\frac{5}{6}$, los chicos podrían pensar que dicha fracción es menor que 1 porque "el de arriba es más chiquito que el de abajo". A partir de esta respuesta, el docente puede considerar oportunas preguntas como:

"¿Siempre que el numerador sea menor que el denominador la fracción va a ser menor a un entero? ¿Por qué? ¿Qué sucede si el numerador es mayor al denominador?".

Así, se puede concluir con el total de la clase que si se tiene una fracción cuyo numerador es menor al denominador, dicha fracción es menor a un entero. En cambio, si el numerador es mayor al denominador, la fracción será mayor que un entero.

Esta actividad pone en juego varios recursos. Un recurso que se espera que aparezca es la posibilidad de transformar los enteros en fracciones y luego comparar el valor del numerador. Por ejemplo, en el caso de $\frac{14}{5}$, ubicándolo entre 2 y 3 recurriendo a que en 2 enteros hay 10 de $\frac{1}{5}$ y en 3 enteros hay 15 de $\frac{1}{5}$.

Otra estrategia que los estudiantes podrían emplear es pensar cuántas veces entra el denominador en el numerador. Por ejemplo, para $\frac{14}{5}$, el 5 entra dos veces en el 14 y me sobra 4. Entonces, $\frac{14}{5}$ está entre 2 y 3.

En el caso de que el recurso anterior no surgiera, o bien si algún estudiante llegase a tener dificultades con esta estrategia, el docente podrá recurrir a lo trabajado en la actividad 1: "si en esa actividad dijimos que con 2 potes de $\frac{1}{2}$ kg formo 1 kg y con 4 de $\frac{1}{4}$ kg formo 1 kg, ¿cuántos potes de $\frac{1}{5}$ kg necesito para llegar a 1 kg?".

Será necesario reflexionar que "cuántos potes de …… necesito para llegar a 1 kg" podría ser equivalente a decir "¿cuántos de …… necesito para llegar al entero?".

Se puede abrir el juego de manera oral con preguntas por otros enteros: "¿Cuántos de $\frac{1}{5}$ necesito para llegar a 2 enteros? ¿Y a 3?". Una posible conclusión que los estudiantes podrían registrar en sus carpetas es que "todo número entero puede escribirse como una fracción". Por ejemplo:

$$1 = \frac{6}{6} = \frac{9}{9}; 3 = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}; 5 = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}, \text{etc.}$$

Otra estrategia posible a la cual pueden recurrir los estudiantes es emplear la escritura de número mixto para aquellas fracciones mayores a un entero. Por ejemplo, $\frac{8}{3}$ es mayor a un entero, $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $3 = 1 = \frac{9}{3}$, entonces $\frac{8}{3}$ son dos enteros y sobran $\frac{2}{3}$, esto es $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Con respecto a la posibilidad de escribir a una fracción mayor que un entero como un número mixto, el docente podría dar distintas fracciones mayores a un entero y pedirles a los chicos que las escriban como número mixto. En el espacio colectivo se puede reflexionar y luego escribir que si a una fracción mayor que un entero se la expresa como número mixto, esto permite ver de forma directa entre qué enteros se encuentra ubicada dicha fracción.

Muchas veces sucede que algunos estudiantes piensan determinadas estrategias y los demás son solo oyentes. Otras, ocurre que aquellos estudiantes que son productores se resisten a involucrarse o utilizar otras estrategias distintas a las propias. Por ello, consideramos que para que todos los estudiantes puedan involucrarse con las producciones de los compañeros se les podría preguntar (tanto a los productores como a los demás) por otras fracciones que verifiquen si la estrategia funciona siempre.

ACTIVIDAD 3

¿Cuáles son los enteros más próximos a los siguientes números racionales?

$\frac{33}{7}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{47}{4}$ $-\frac{9}{5}$ $-\frac{12}{3}$ $-\frac{84}{9}$ $\frac{125}{10}$ 12,5 -4,11 $-3\frac{1}{4}$

Si bien esta actividad de ubicar entre enteros más próximos a números racionales es similar a la anterior, aparecen diferencias: los números enteros no estén determinados en la misma actividad (como es el caso de la tabla anterior); se proponen ubicar números racionales expresados en fracción y como expresión decimal; y se proponen números negativos. Estas diferencias amplían las estrategias que se elaboraron en la actividad anterior. Cabe aclarar que esta misma actividad puede ser trabajada en un 1er año sin considerar los números negativos. Además, el docente podría decidir saltear la actividad 2 y directamente trabajar con esta propuesta para hacer aparecer las ideas que planteamos en el análisis anterior.

Una de las cuestiones a considerar en esta actividad es que el trabajo con racionales negativos precisa que los estudiantes recuperen los criterios de orden de los números enteros y, a su vez, se construyan nuevos criterios de orden para este nuevo campo numérico.

Por ejemplo, para ubicar $-\frac{9}{5}$ los estudiantes pueden pensar que como el $\frac{9}{5}$ está entre 1 y 2, entonces el $-\frac{9}{5}$ estará entre -2 y -1. Pero también podrían pensar que está entre -1 y 0.

En el caso de que los estudiantes respondan que $-\frac{9}{5}$ está entre -1 y 0, se podría realizar una discusión en torno a las siguientes preguntas: "¿Es posible escribir al -1 como fracción de denominador 5? ¿Cómo se escribe?"; "¿Y el 0? Como $-1 = -\frac{5}{5}$ y $0 = \frac{0}{5}$ "; "Entonces, ¿el $-\frac{9}{5}$ está entre $= -\frac{5}{5}$ y $\frac{0}{5}$?"; "¿Qué fracciones con denominador 5 estarían entre $\frac{0}{5}$ y $-\frac{5}{5}$?"; "¿Qué número entero sería $-\frac{10}{5}$?"

Con esto se pretende que reconozcan que si $-\frac{9}{5}$ está entre $-\frac{5}{5}$ y $-\frac{10}{5}$, entonces estaría entre -2 y -1. Aquí se podría concluir que como $\frac{9}{5}$ está entre $\frac{5}{5}$ y $\frac{10}{5}$, entonces $-\frac{9}{5}$ está entre $-\frac{10}{5}$ y $-\frac{5}{5}$.

En el caso de las expresiones decimales podrían proponer a 12,5 entre 11 y 13. Sería conveniente que precisen cuáles son los enteros más cercanos analizando que 12,5 es mayor a 12 enteros y que no llega a 13. Por ejemplo, se le puede proponer al total de la clase que dé expresiones decimales entre 11 y 12, y entre 12 y 13. A partir de ese trabajo se puede concluir que las expresiones decimales entre 11 y 12 serán de la forma 11, …… y las expresiones decimales entre 12 y 13, de la forma 12, ……

En conclusión, la intención de esta tarea de ubicar entre enteros es reconocer tanto a la expresión decimal como a las fracciones respecto al entero positivo y negativo; reconocer que un número entero (positivo y negativo) se puede escribir como una fracción; distinguir que si un número decimal o una fracción está entre *a* y *b*, el opuesto de ese número estará entre *-b* y *-a*; reforzar la noción de número mixto y lo que esta expresión permite ver.

ACTIVIDAD 4

Completa la tabla con al menos tres fracciones y tres expresiones decimales diferentes:

Entre 5 y 6	Entre 1 y 2	Entre 15 y 16	Entre 43 y 44

A diferencia de las actividades 2 y 3, en esta actividad son los chicos los que tienen que proponer números racionales entre dos enteros consecutivos. La tarea de proponer involucra otras relaciones. Por ejemplo, para proponer fracciones entre 5 y 6 los chicos podrían pensar, "¿con qué denominador tiene que ser la fracción?". En ese caso se puede pedir que propongan un denominador posible, por ejemplo, con denominador 7. Y desde ahí, como 5 enteros son $\frac{35}{7}$ y 6 enteros son $\frac{42}{7}$, es posible encontrar opciones de séptimos entre 5 y 6. Se los podría invitar luego a encontrar otras fracciones con distintos denominadores.

Para las expresiones decimales se reinvierte lo analizado anteriormente: las expresiones decimales entre 15 y 16 se escriben como 15, ……

Luego del trabajo con estas actividades, cabe proponer preguntas o actividades donde los estudiantes vuelvan a poner en juego lo trabajado hasta el momento. Este podría ser un momento de cierre –momentáneo– de las ideas trabajadas. A modo de ejemplo, sugerimos las siguientes actividades:

ACTIVIDAD 5

a) ¿Cuántos cuartos hay en 3 enteros? ¿Y cuántos cuartos hay en $\frac{5}{2}$?
b) ¿Cuántos novenos se necesitan para tener 4 enteros? ¿Y 11 enteros?
c) ¿Cuántos octavos hay en 1,25?

ACTIVIDAD 6

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (y justificar la decisión):

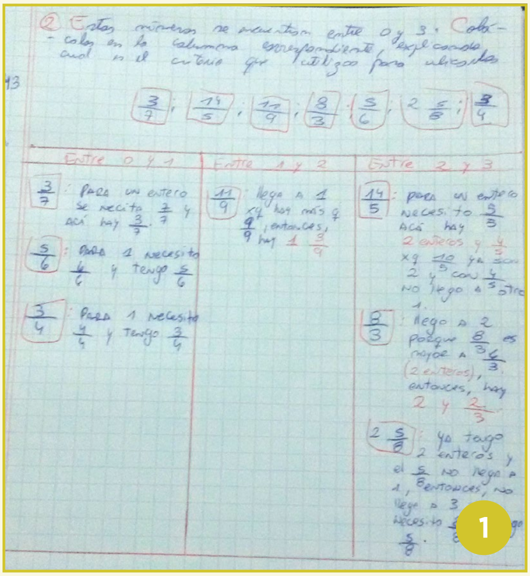
a) La fracción $\frac{138}{143}$ es mayor a 1.
b) En 5 enteros hay 10 sextos.
c) La fracción $\frac{1}{5}$ es igual a 0,2
d) $\frac{37}{4}$ es igual a $9\frac{1}{4}$
e) La fracción $\frac{18}{5}$ se encuentra entre 17 y 18.

EXPERIENCIA DE AULA

En este apartado presentamos y comentaremos algunas resoluciones que realizaron los chicos en una puesta en aula de esta experiencia en un 2º año de una escuela de la Provincia de Buenos Aires.[1] La intención es, por un lado, intentar interpretar cuáles son los conocimientos matemáticos que ponen en juego los estudiantes al momento de la resolución de una actividad. Nos interesa atrapar esta cuestión porque, más allá de que una resolución esté cerca o lejos de lo esperable, los chicos al resolverla ponen en juego –de algún modo– ciertos conocimientos. Poder entender eso nos permite, como docentes, intervenir para ayudar a avanzar a aquellas resoluciones más incompletas. Por otro lado, nos interesa imaginar que este escenario de diálogo entre resoluciones propuestas por los chicos nos permitirá avanzar en conceptualizaciones más teóricas.

En el caso de la actividad 2, en la que hay que comparar cantidades y ubicar entre enteros, presentaremos dos resoluciones que aparecen en las carpetas de los chicos. Nos interesan estas resoluciones porque, por un lado, muestran explicaciones de los productores acerca de lo que pusieron en juego para resolver la actividad; y, por otro, nos permiten analizar de qué modo lo trabajado anteriormente es punto de apoyo en las resoluciones.

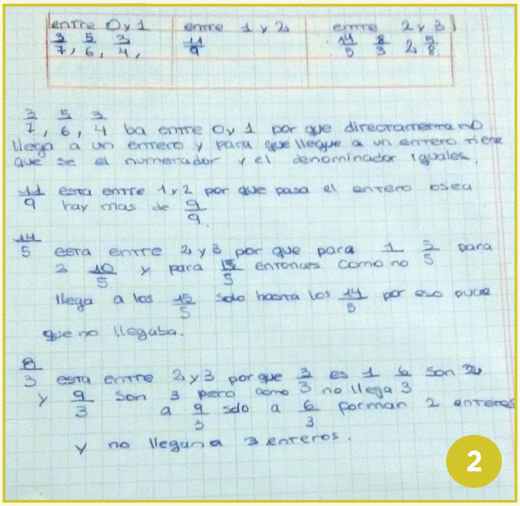
1. Agradecemos el aporte de la profesora Mara Cedrón en el análisis de estas producciones.



En esta resolución (imagen 1), para ubicar las fracciones entre 0 y 1, como por ejemplo $\frac{3}{7}$, se utiliza la relación de cuántos $\frac{1}{7}$ se necesitan para armar el entero: "Para un entero se necesita $\frac{7}{7}$"; "Para 1 necesito $\frac{6}{6}$"; "Para 1 necesito $\frac{4}{4}$".

Para completar las columnas entre 1 y 2, y entre 2 y 3, se apela a una escritura muy cercana a la escritura de número mixto (salvo en el caso de $\frac{11}{9}$ que lo escribe como $1\frac{3}{9}$), separando "la parte entera" de lo que "sobra": "$\frac{8}{3}$: llego a 2 porque $\frac{8}{3}$ es mayor a $\frac{6}{3}$ (2 enteros), entonces hay 2 y $\frac{2}{3}$".

En la otra resolución (imagen 2), para las fracciones que están entre 0 y 1 aparece un argumento general: "...no llega a un entero y para que [la fracción] llegue a [ser] un entero tiene que ser el numerador y el denominador iguales". Ahora, así escrito este criterio está incompleto. Seguramente, el alumno estaba pensando en que el numerador no llega a igualar al denominador. Sin embargo no lo enuncia de este modo ni tampoco enuncia que el numerador es menor al denominador. Se podría discutir con toda la clase cómo precisar/completar este argumento que propone un compañero.



entre 0 y 1	entre 1 y 2	entre 2 y 3
$\frac{3}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$,	$\frac{11}{9}$	$\frac{14}{5}$ $\frac{8}{3}$ $2\frac{5}{8}$

$\frac{3}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ ba entre 0 y 1 por que directamente no llega a un entero y para que llegue a un entero tiene que se el numerador y el denominador iguales.

$\frac{11}{9}$ esta entre 1 y 2 por que pasa el entero osea hay mas de $\frac{9}{9}$.

$\frac{14}{5}$ esta entre 2 y 3 por que para 1 $\frac{5}{5}$ para 2 $\frac{10}{5}$ y para $\frac{15}{5}$ entonces como no llega a los $\frac{15}{5}$ solo hasta los $\frac{14}{5}$ por eso puse que no llegaba.

$\frac{8}{3}$ esta entre 2 y 3 porque $\frac{3}{3}$ es 1 $\frac{6}{3}$ son 2 y $\frac{9}{3}$ son 3 pero como no llega 3 a $\frac{9}{3}$ solo a $\frac{6}{3}$ forman 2 enteros y no llega a 3 enteros.

2

Para ubicar las demás fracciones aquí se utiliza otro criterio, ir igualando los enteros a fracciones. Por ejemplo, para $\frac{8}{3}$ utiliza las relaciones "$\frac{3}{3}$ es 1, $\frac{6}{3}$ son 2 y $\frac{9}{3}$ son 3". Ahí ubica al $\frac{8}{3}$ diciendo que "no llega a $\frac{9}{3}$, solo a $\frac{6}{3}$, forman 2 enteros y no llega a 3". No aparece, en esta resolución, la escritura de número mixto.

¿Cómo interactúan las dos resoluciones, por ejemplo, para el caso de $\frac{14}{5}$? Se podría analizar con el total de la clase estos dos modos diferentes, y correctos, de llegar a ubicar a $\frac{14}{5}$ entre 2 y 3. En la segunda resolución se enuncia que está entre 2 y 3, pues 2 $= \frac{10}{5}$ y $3 = \frac{15}{5}$ mientras que en la primera resolución se señala que $\frac{10}{5}$ ya son 2 y que con $\frac{4}{5}$ no llega a un entero, así que "acá hay 2 enteros y $\frac{4}{5}$". ¿Qué pensaron en común estas resoluciones? ¿Es posible escribir a $\frac{14}{5}$ de modo que exprese ambas relaciones, que está entre 2 y 3 y que se pasa $\frac{4}{5}$ de 2 enteros? De este modo, se puede hacer emerger la escritura del número mixto como aquel que permite poner estas dos cuestiones en evidencia.

Por último, en ambas resoluciones aparece muy fuerte la idea trabajada en la actividad 1 acerca de cuántas fracciones del estilo $\frac{1}{n}$ se necesitan para armar diversos enteros.

PARTE 2: REPRESENTAR NÚMEROS RACIONALES EN LA RECTA NUMÉRICA

¿Todas las fracciones tienen un lugar en la recta numérica?

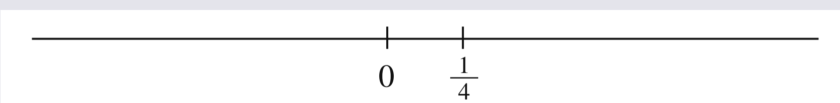
En esta parte de la propuesta se trabajará sobre la representación en recta numérica. Esta representación permite retomar ciertas nociones de los números racionales analizadas en las actividades anteriores –ubicar entre enteros, escribir números mixtos– y, además, abordar la idea de fracciones equivalentes.

Sabemos que la representación de los números racionales en una recta numérica resulta en muchas ocasiones difícil para nuestros estudiantes, debido a que lleva una complejidad: diferenciar entre el lugar que ocupa $\frac{1}{3}$, por ejemplo, y la medida $\frac{1}{3}$. En una recta, el lugar para el número $\frac{1}{3}$ es único. Sin embargo, la distancia entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ o entre $\frac{13}{3}$ y $\frac{14}{3}$, mide $\frac{1}{3}$. Es decir, en la recta numérica se tienen longitudes que representan $\frac{1}{3}$ de la unidad, pero el número $\frac{1}{3}$ se ubica solo en la primera longitud de $\frac{1}{3}$, a la derecha del 0.

Otra complejidad al momento de trabajar la representación en recta numérica es que los números se anotan en un orden y conservando una escala, pero esta escala cambia de recta en recta. Por otro lado, esa escala queda fijada al tener dos números. Sobre estas cuestiones se trabajará en los problemas que se presentan a continuación.

ACTIVIDAD 1

1) En la siguiente recta[2] se encuentran ubicados los números 0 y $\frac{1}{4}$.



a) Señalen en esta recta el lugar que ocupa el número $\frac{1}{8}$. ¿Y dónde ubican a $\frac{3}{8}$? ¿Y el $\frac{3}{2}$?

b) También en la recta anterior, ubiquen el 0,75; 1,5; 0,25; 0,5 y 1,25.

2. En el original de esta actividad, el punto 0 y el punto $\frac{1}{4}$ se encuentran a una distancia de 1,5 cm.

2) En esta recta[3] están representados los números 0 y $\frac{3}{2}$.

a) Señalen el lugar que ocupa el número $\frac{1}{2}$, 1 y $\frac{3}{4}$.

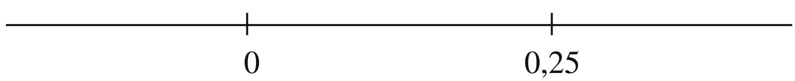
b) ¿Dónde ubicarían el $\frac{1}{5}$?

3) En la siguiente recta[4] se encuentran ubicados los números 0 y 0,5. ¿Dónde ubicarían $\frac{1}{6}$? ¿Y $\frac{4}{3}$?

4) Los números 0 y 0,25 se encuentran ubicados en la siguiente recta:[5]

a) ¿Dónde ubicarían $\frac{1}{5}$?

b) ¿Donde ubicarían $\frac{1}{3}$?



En la resolución de estas rectas en clase pueden aparecer diferentes estrategias: pueden trabajarse las cuatro rectas juntas; o el docente puede decidir que los chicos aborden una recta por vez compartiendo en el espacio colectivo las distintas resoluciones y poniéndolas en diálogo.

Para ubicar el $\frac{1}{8}$ en la primera recta, pueden surgir como estrategias:

- ubicar la mitad entre 0 y $\frac{1}{4}$ apelando a la idea de que $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$
- ubicar el 1 repitiendo la distancia entre 0 y $\frac{1}{4}$ cuatro veces a la derecha del 0; luego, dividir la distancia entre 0 y 1 en 8 partes iguales y ubicar $\frac{1}{8}$

3. La distancia original entre los puntos es 7,5 cm.

4. La distancia original entre los puntos es 3 cm.

5. La distancia original entre los puntos es 6 cm.

También puede suceder que algunos chicos intenten dividir la distancia entre 0 y $\frac{1}{4}$ en ocho partes iguales y tomar la primera marca como $\frac{1}{8}$. Este error está relacionado con un modo de hacer que pueden traer los chicos: "Para marcar $\frac{1}{8}$ se divide en ocho partes iguales y la primera marca es el $\frac{1}{8}$". Esta técnica es correcta bajo ciertas condiciones que muchas veces quedan ocultas para los chicos. Será momento de discutir cuándo se puede dividir en ocho partes iguales para encontrar $\frac{1}{8}$ y cuándo no.

Para ubicar el $\frac{3}{2}$ algunos chicos pueden recurrir a la idea de que $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$, marcar $\frac{1}{2}$ y luego repetirlo tres veces a la derecha del 0.

A partir del trabajo realizado por los estudiantes –sobre todo en el ítem a) de la pregunta 1–, y luego de la discusión colectiva, se pueden analizar y evidenciar algunas equivalencias como

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{etc.}$$

Podría decirse que la realización de esta actividad, junto con el análisis de las equivalencias anteriores, permite dar un apoyo a la noción de *fracciones equivalentes* como dos números que representan una misma cantidad y que *ocupan* el mismo lugar en la recta numérica.

El ítem b) invita a volver a poner en juego las relaciones entre fracciones y expresiones decimales elaboradas en el problema de la heladería. Como puede observarse, en cada consigna las rectas poseen un lugar adicional a la izquierda del 0 para dar lugar al docente de trabajar, de creer necesario y conveniente, con fracciones negativas.

En la segunda recta, el valor que se da como dato es mayor que 1. Esto puede desorientar a los chicos al momento de ubicar $\frac{1}{2}$. Algunos estudiantes podrían establecer que $\frac{3}{2}$ es el triple de $\frac{1}{2}$ y que, por lo tanto, $\frac{1}{2}$ va a estar ubicado en la tercera parte del segmento. Al haber identificado la ubicación del $\frac{1}{2}$, es posible representar el entero y a partir de allí ubicar el $\frac{3}{4}$, ya sea dividiendo el segmento comprendido entre 0 y 1 en cuatro partes, o reconociendo que $\frac{3}{4}$ "está en medio" del segmento comprendido entre $\frac{1}{2}$ y 1. Otra alternativa posible para ubicar el $\frac{3}{4}$ es a través de la ubicación del $\frac{1}{2}$, ya que como la mitad de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$, entonces reproduciendo tres veces el segmento comprendido entre 0 y $\frac{1}{4}$ es posible obtener la ubicación del $\frac{3}{4}$.

Hasta aquí se apela a relaciones entre cuartos, medios y enteros. En el ítem b) se pide ubicar $\frac{1}{5}$. Este número no es posible ubicarlo a partir de relaciones con medios o cuartos. Será necesario dividir en cinco partes el segmento comprendido entre 0 y 1.

A partir de la tercera recta se espera que los alumnos puedan establecer relaciones entre racionales que poseen escrituras distintas. De todos modos, la introducción de expresiones decimales puede apoyarse en los problemas anteriores en donde se trabajó con las equivalencias $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $0{,}25 = \frac{1}{4}$; $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

La tercera recta tiene como dato la ubicación del 0,5. Este valor permitiría “reconstruir” el entero y allí poder ubicar $\frac{1}{6}$. Sin embargo, es posible que los chicos apelen a la relación de que $\frac{1}{6}$ es la tercera parte de 0,5.

Para ubicar $\frac{4}{3}$, se podrían tomar al menos dos caminos: por una parte, conociendo la ubicación del entero, se puede obtener la tercera parte y de allí, como $\frac{4}{3}$ excede en $\frac{1}{3}$ al 1, se tomaría esa medida y se replicaría una vez más después del 1; otra alternativa posible sería reconociendo que se necesitan dos segmentos de $\frac{1}{6}$ para obtener $\frac{1}{3}$, entonces desde el 0 replicarían seis veces el segmento que representa al $\frac{1}{6}$ para llegar al entero, y dos más de los mismos para completar el tercio faltante.

En las primeras tres rectas los números propuestos evocan un trabajo que puede haberse realizado anteriormente: la relación entre mitades, terceras partes, dobles, etc. Sin embargo, al ser planteadas desde otro contexto, estas consignas invitan a los estudiantes a pensar dichas relaciones desde la recta numérica.

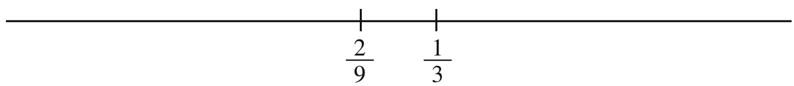
Por último, en la cuarta recta, las relaciones entre esas fracciones no son tan “evidentes” para los chicos como en los problemas anteriores. Evidentes en el sentido de que no se pone en juego la relación de la mitad, el doble, la tercera parte de una fracción con otra, sino que en esta actividad se busca establecer relaciones entre otro tipo de fracciones (la relación entre cuartos y quintos, cuartos y tercios), donde los chicos pueden expresar las fracciones utilizando un común denominador o apelar a la unidad. Pero también, y en función del trabajo desplegado, pueden apelar a encontrar el 1 y desde allí ubicar $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$.

A propósito de la resolución de estos problemas, se puede discutir que es posible encontrar el lugar que ocupa el 1 pero no siempre es necesario, como sí lo era en las primeras rectas. No obstante, para aquellos estudiantes que presenten alguna dificultad, tener de referencia la unidad les permitirá avanzar en su tarea.

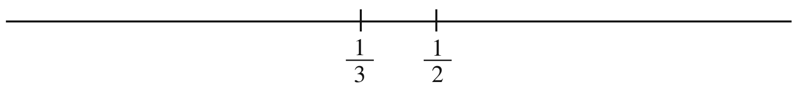
En el apartado sobre experiencias en el aula de la página 172 se presentan diferentes producciones de estudiantes respecto a las tres primeras rectas. Además, se realiza un pequeño análisis de los posibles modos de pensar y de los conocimientos puestos en juego en esas resoluciones

ACTIVIDAD 2

1) En la siguiente recta[6] se encuentran ubicados los números $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{3}$. ¿Dónde ubicarían el 0, el 1 y el $\frac{4}{3}$?



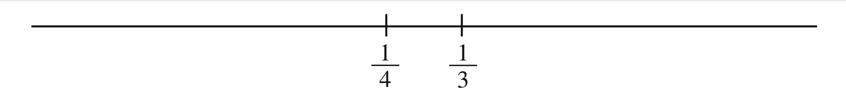
2) En la siguiente recta[7] se encuentran ubicados los números $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. ¿Dónde ubicarían el 0 y el 1?



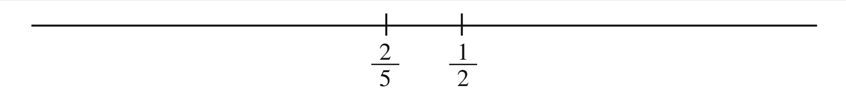
6. La distancia original entre los puntos es 1 cm.

7. Íd.

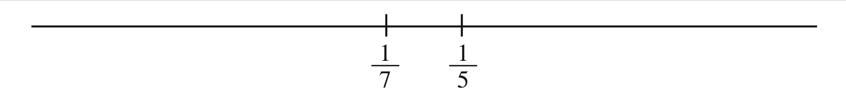
3) En la siguiente recta[8] se encuentran ubicados los números $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. ¿Dónde ubicarían el $\frac{2}{3}$ y el $\frac{3}{4}$?



4) En la siguiente recta[9] se encuentran ubicados los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$. ¿Dónde ubicarían el 0 y el 1?



5) En la siguiente recta[10] se encuentran ubicados los números $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$. ¿Dónde ubicarían el $\frac{2}{7}$ y el $\frac{2}{6}$?



Lo distinto y novedoso de las rectas de esta actividad es que piden ubicar números a partir de dos fracciones marcadas, es decir que no se da como dato la ubicación del 0. La relación que hay entre ellas es la que puede servirle al estudiante para ubicar dichos números.

En la primera recta, la relación entre novenos y tercios puede ser punto de apoyo para determinar, por ejemplo, que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ y, de este modo, considerar que la longitud entre $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{3}$ es igual a $\frac{1}{9}$. Para obtener el 0 y el 1 será necesario repetir esa longitud hacia la derecha del $\frac{1}{3}$ o hacia la izquierda del $\frac{2}{9}$ la cantidad necesaria de veces.

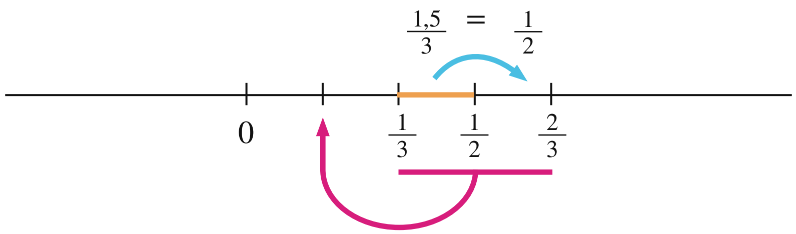
Para la segunda recta los estudiantes podrían pensar que $\frac{1}{3}$ entra 1 vez y media en un medio o bien que $\frac{1}{2}$ se encuentra en "el medio" de $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

8. Íd.

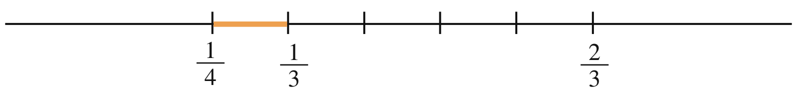
9. Íd.

10. Íd.

Entonces, si se reproduce la distancia que hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ hacia la derecha, lo que se obtiene es la ubicación de $\frac{2}{3}$.[11]



En la tercera, los estudiantes podrían considerar que la longitud entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ es la tercera parte de $\frac{1}{4}$ o la cuarta parte de $\frac{1}{3}$. Si se quiere ubicar $\frac{2}{3}$, lo que se podría hacer es reproducir cuatro veces el segmento formado entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, ya que se necesitan cuatro veces la cuarta parte de $\frac{1}{3}$ para obtener $\frac{1}{3}$. Del mismo modo, podrían pensarse para $\frac{3}{4}$.



En la cuarta recta será necesario establecer una relación entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$. Algunos chicos podrían concluir que la distancia entre ambos es equivalente a “medio quinto”. En ese caso, al repetirla dos veces hacia la izquierda del $\frac{2}{5}$ se obtiene el $\frac{1}{5}$. A partir de allí podrán encontrar el lugar del 0 y del 1.

Por último, la quinta recta propone fracciones donde puede resultar más difícil establecer relaciones. Algunos chicos pueden recurrir a la resta de ambas estableciendo que esa distancia es equivalente a $\frac{2}{35}$ y desde ahí establecer que con $\frac{7}{35}$ se obtiene un quinto y con $\frac{5}{35}$ se obtiene un séptimo. Es interesante notar que las dimensiones de esta recta no permiten recurrir

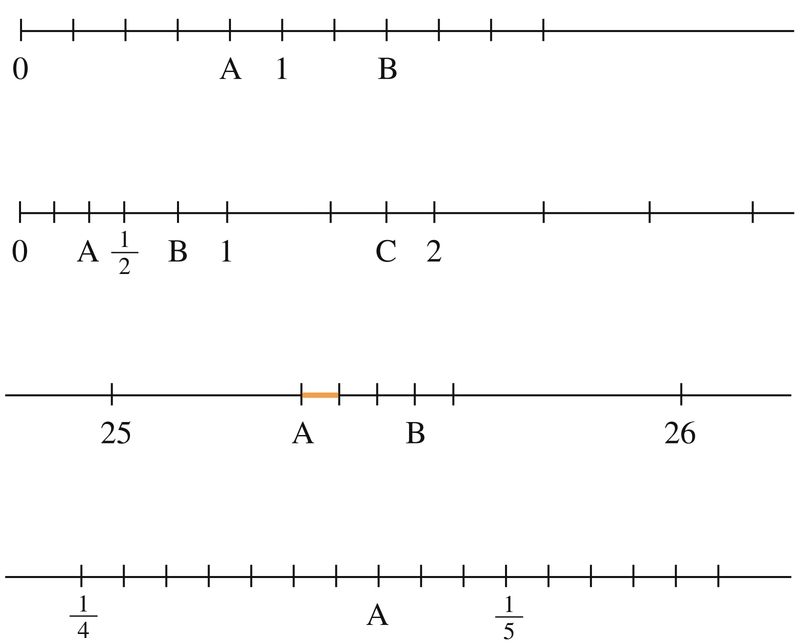
11. No desconocemos que la escritura $\frac{1{,}5}{3}$ no representa a una fracción. Sin embargo, esa escritura sí representa un número racional que, escrito en fracción, podría ser $\frac{1}{2}$ o, en su expresión decimal, 0,5. Es decir, es cierto que $\frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Son diferentes representaciones del mismo número racional.

al 0 ni al 1. En el espacio colectivo se puede recurrir explicítamente a estas equivalencias para encontrar el lugar que ocupan $\frac{2}{7}$ y $\frac{2}{5}$.

No descartamos que los estudiantes vayan a recurrir a las fracciones equivalentes para ubicar los números pedidos. Por ejemplo, para la segunda recta, podrían plantear las equivalencias $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, y determinar que la longitud entre esas fracciones es igual a $\frac{1}{6}$. O en la tercera recta, plantear $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ y $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, de donde surge que la longitud entre las fracciones es $\frac{1}{12}$ (que es la tercera parte de $\frac{1}{4}$ o la cuarta parte de $\frac{1}{3}$). Pero hemos querido señalar estrategias diferentes que pueden utilizar los estudiantes y que ponen en juego diversos conocimientos matemáticos acerca de las fracciones. En el apartado final sobre experiencias en el aula se muestran producciones de los estudiantes y se plantea una posible puesta en relación de esas resoluciones.

ACTIVIDAD 3

Indiquen en cada caso qué números representan en la recta los puntos señalados:



Este problema,[12] a diferencia de los anteriores que involucraban rectas numéricas, trae la particularidad de que aquí no se les pide a los estudiantes ubicar un número a partir de otros dados sino que el número ya se encuentra señalado y ellos tienen que decidir cuál es ese número.

Como mencionamos al inicio, la representación en la recta numérica de los números racionales resulta muchas veces difícil para nuestros estudiantes. Sin embargo, es un buen soporte para darle sentido a nociones de este campo numérico como el orden y la comparación. En este apartado se propusieron dos tipos de tareas diferentes con respecto a la recta numérica:

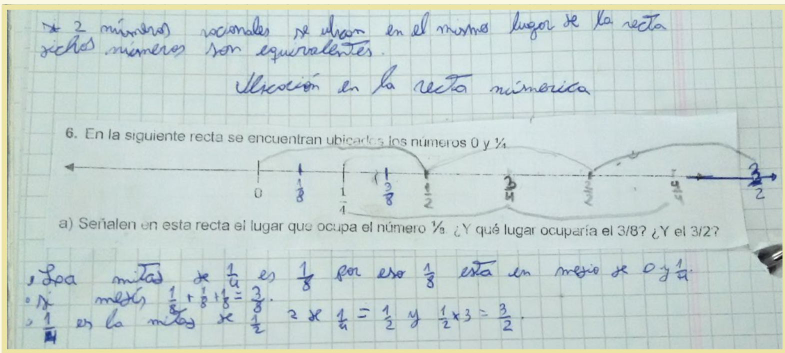
- Ubicar números en una recta a partir de la información que da la ubicación de otros dos números en esa recta: aquí aparecen diferencias entre los números que se elijan. Mientras que en la actividad 1, uno de los números siempre era la ubicación del 0, en la actividad 2 se dieron dos números diferentes no enteros. A su vez, en estas últimas rectas, las relaciones entre esos números posibilitan ciertas estrategias y obstaculizan otras. Nuevamente aparece la idea de variable didáctica. El docente podrá proponer otro tipo de actividades similares variando los números de acuerdo al trabajo realizado por sus estudiantes.
- Reconocer qué número se ubica en una recta a partir de datos propuestos: la actividad 3 es poco usual en el trabajo con recta numérica pero, sin embargo, pone en juego varias relaciones entre fracciones y números enteros, y entre números decimales.

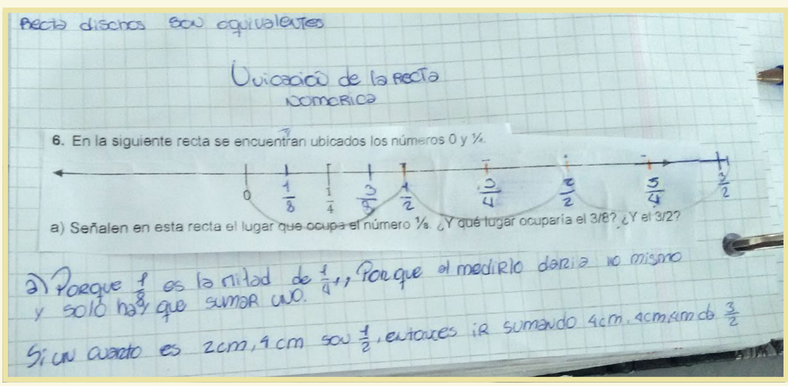
Se espera que el trabajo desplegado con la recta numérica permita a los estudiantes que se apropien de ella como un recurso para trabajar y dar soporte a sus explicaciones.

12. El análisis de la actividad previa, junto a otras propuestas de trabajo con números racionales en la recta numérica, puede encontrarse en el documento *Matemática. Fracciones y números decimales*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2007, p. 32. Disponible en: <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/plan_plurianual_oct07/matematica/m7_docente.pdf> [consulta: 28 de febrero de 2020]

EXPERIENCIA DE AULA

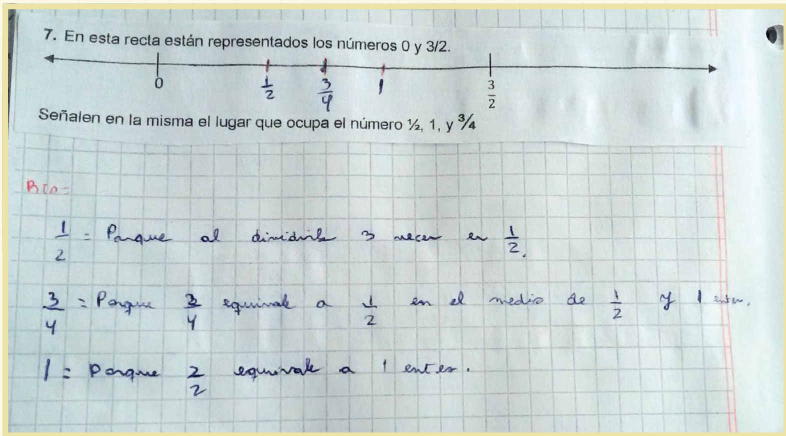
Otras producciones de interés para analizar, que también corresponden a un 2º año de una escuela de la Provincia de Buenos Aires, son las de la actividad 1 de esta Parte II. Para la primera recta, veamos dos resoluciones en donde ambos chicos apelan a las relaciones entre mitades y dobles.

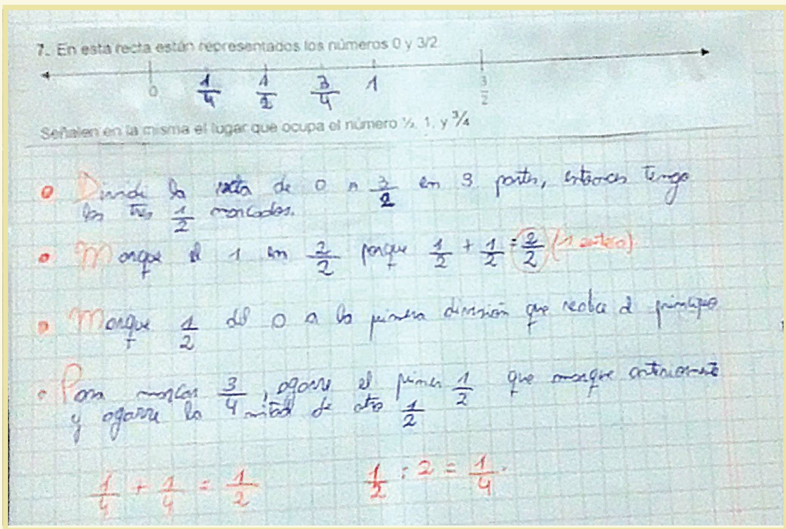




En la segunda producción, además, aparece la escala “si un cuarto es 2 cm, 4 cm son $\frac{1}{2}$”. En el trabajo con rectas numéricas aparece un doble juego para los chicos: las relaciones entre las fracciones y la relación con la escala para esa recta particular.

Las resoluciones que siguen, correspondientes a la segunda recta, apelan a dividir la distancia entre 0 y $\frac{3}{2}$ en tres partes iguales para ubicar a $\frac{1}{2}$.



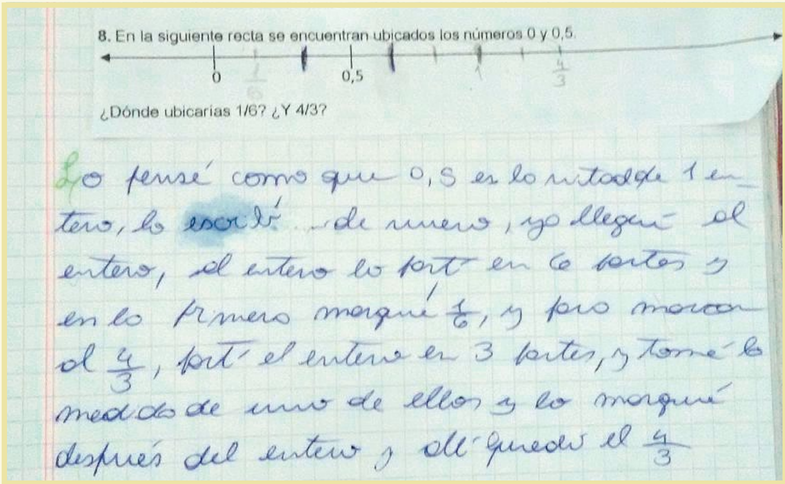


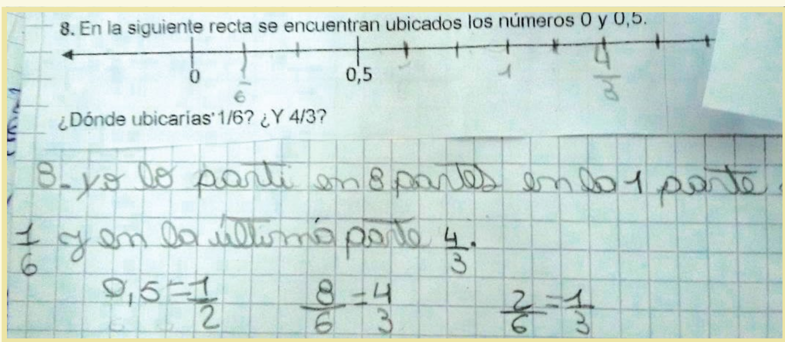
Este tipo de resolución para ubicar a $\frac{1}{2}$ entra en contradicción con un tipo de trabajo más "tradicional" que se mencionó anteriormente. En la primera resolución, para ubicar a $\frac{3}{4}$ se apoya en la idea de la mitad entre $\frac{1}{2}$ y 1. La segunda resolución apela a la idea de tomar "la mitad de otro $\frac{1}{2}$".

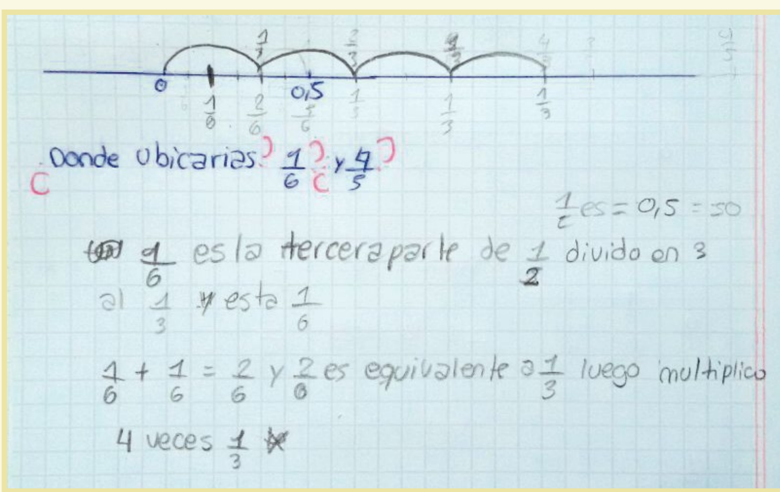
Por último, en la segunda resolución se resignifica algunas relaciones en término de operaciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \text{ (un entero)}; \ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$$

Las tres resoluciones que siguen trabajan de diferentes maneras para ubicar los números pedidos en la tercera recta numérica.







En la primera se completa el entero usando la relación que con dos de $\frac{1}{2}$ se obtiene el entero y que el entero dividido en seis partes iguales es $\frac{1}{6}$. Para ubicar $\frac{4}{3}$, busca $\frac{1}{3}$ usando la misma estrategia que para $\frac{1}{6}$. Luego pone en juego la relación que cuatro veces $\frac{1}{3}$ es $\frac{4}{3}$. Podríamos decir que en este caso se usan relaciones entre el entero y fracciones del estilo $\frac{1}{n}$ y relaciones entre fracciones con igual denominador: $\frac{1}{n}$ y $\frac{m}{n}$.

En la segunda resolución no se explica demasiado sobre lo que se hizo. Para pasar del 0,5 al $\frac{1}{6}$ no tenemos mucha información. Parecería que, al estar marcado el 1, pudo haber pasado por el 1 para encontrar el $\frac{1}{6}$ (similar a la primera resolución) y que, sabiendo que $\frac{8}{6}$ es $\frac{4}{3}$, surgió esta idea de las "8 partes". Luego aparecen algunas equivalencias que podrían darnos más información al respecto.

En la tercera resolución se usan relaciones entre medios y sextos y entre sextos y tercios. Se apoya en equivalencia entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$ y no tanto en que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$ (aunque puede estar presente, no lo podemos saber a partir su escritura). En la misma recta va marcando $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$. ¿Será que se apoyó en la relación de que $\frac{3}{6}$ es igual a $\frac{1}{2}$ para afirmar al principio que $\frac{1}{6}$ es la tercera parte de un medio? En esta recta va marcando diferentes $\frac{1}{3}$ pero controlando cuál es el que representa $\frac{4}{3}$ (hace "arquitos" y va marcando tanto los números de la recta como la longitud del arquito).

Existen algunos vínculos que se podrían establecer entre estas resoluciones durante la etapa de trabajo colectivo:

- Se podría relacionar "$\frac{1}{6}$ es la tercera parte de $\frac{1}{2}$" y "el entero lo partí en 6 partes y en la primera marqué $\frac{1}{6}$" con la idea de que "0,5 es la mitad de 1 y lo puse de nuevo y llegué al entero".
- Ese "partí el entero en 3 partes y tomé la medida de una de ellas" de la primera resolución está separado de que $\frac{1}{3}$ es el doble de

$\frac{1}{6}$, queda oculto en esta enunciación y en el modo en que marca los sextos y los tercios (pareciera que no hay una pregunta acerca de que los tercios, que en la foto se ven en azul más remarcado, caen cada dos sextos). Esta idea de que $\frac{1}{6}$ es el doble de $\frac{1}{3}$ también aparece en los arcos de la tercera resolución y en la escritura $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, que es $\frac{1}{3}$, junto a la escritura $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de la segunda resolución.

- La segunda resolución permitiría poner en relación cuántos sextos forman $\frac{4}{3}$, ya que escribe $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. La primera y la tercera resolución se apoyaron en que "$\frac{4}{3}$ es cuatro veces $\frac{1}{3}$" (en la primera resolución no hay relación, explícita, entre sextos y tercios).

PARTE 3: DIFERENTES SENTIDOS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

¿Qué otros problemas podemos resolver con números racionales?

En esta parte de la propuesta se pretende trabajar con dos sentidos distintos de los números racionales: como resultado de una medición o como resultado de una constante de proporcionalidad. A partir de esto, se empezarán a comparar y a ordenar los números racionales.

Las fracciones como una razón entre magnitudes

Las dos primeras actividades de esta parte trabajan un aspecto de los números racionales diferente al que plantean, por ejemplo, los problemas de reparto. En estos problemas es posible abordar a las fracciones como el modo para expresar una razón entre magnitudes: en este caso, la concentración de mg de calcio en un alimento. Así, es posible ver a la fracción como una constante de proporcionalidad y esto hace posible compararlas, por ejemplo, al contrastar concentraciones de calcio en diferentes alimentos. En estos problemas los chicos tendrán –por primera vez– que comparar dos razones, teniendo como objetivo que puedan comenzar a elaborar estrategias de comparación de números racionales.

ACTIVIDAD 1

La Organización Mundial de la Salud aconseja que las personas de 9 a 18 años consuman 1300 mg de calcio por día para tener huesos sanos y fuertes. Para conocer la concentración de calcio que poseen determinados alimentos se presenta la siguiente tabla:

Alimentos	Porción (gr)	Contenido en calcio (mg)
Carne Vacuna	25	3
Acelga	20	22
Brócoli	10	9

a) Si se consume un churrasco de carne vacuna de 180 gramos, ¿cuántos miligramos de calcio se van a adquirir en dicha porción?
b) Una porción de tarta contiene 225 gramos de acelga, ¿cuántos miligramos de calcio aporta la acelga en dicha porción?
c) Una croqueta contiene 42 gramos de brócoli, ¿cuántos miligramos de calcio aporta el brócoli a la croqueta?
d) ¿Cuántos miligramos de calcio contiene cada gramo de alimento de la tabla anterior?

Como la intención de estos problemas es que los estudiantes vean la relación que existe entre la cantidad de calcio y el peso en determinados alimentos, los números fueron seleccionados para que sea necesario recurrir a una fracción –o a su escritura decimal– para expresar dicha relación. Queremos detenernos en este punto. Dependiendo de qué números se utilicen para expresar los gramos de porción y miligramos contenidos de calcio, y de las preguntas que se realicen, se puede apelar o no la aparición de números racionales. Por ejemplo, si se pregunta cuántos mg de calcio hay en 10 gr de acelga, los chicos podrían responder que a la mitad de gr de acelga le corresponde la mitad de mg de calcio. Aquí los estudiantes utilizan la idea de proporcionalidad pero no aparecen los números racionales para expresar la concentración de calcio de dicho alimento. Por ello, las preguntas en este problema se pensaron para que sí surja el número racional. Este puede llegar a surgir al inicio o bien durante la resolución del mismo.

Los tres primeros ítems permiten que los estudiantes se involucren con el problema apelando a la proporcionalidad. A grandes rasgos podríamos mencionar tres estrategias de resolución:

- utilizar la regla de tres simple;
- recurrir a las propiedades de la proporcionalidad: "el doble, con el doble", "la tercera parte con la tercera parte", "a la suma de los elementos de una de las variables le corresponde la suma de sus correspondientes";
- recurrir al valor de la unidad.

En el caso de utilizar la regla de tres simple, el número racional aparece como resultado. Si todos los chicos recurren a esta estrategia, es recién en el ítem d) en donde se pone en juego el número racional –escrito en forma fraccionaria o como expresión decimal– como razón.

Si los estudiantes apelan a propiedades de la proporcionalidad para abordar estos tres ítems, los números racionales podrían aparecer al reconstruir la cantidad de gramos pedidos a partir del dato de la tabla. Por ejemplo, para el ítem a) podrían pensar que como en 25 gr de carne hay 3 mg de calcio, entonces en 175 gr de carne (que son siete veces 25 gramos) hay 21 mg de calcio, que son siete veces 3 mg. Si para llegar al 180 faltan 5 gr, y 5 es la quinta parte de 25 gr, entonces la cantidad de calcio correspondiente a esos 5 gr va a ser la quinta parte de 3, es decir $\frac{3}{5} = 0{,}6$. Entonces, la cantidad de calcio correspondiente a 180 gr de carne vacuna será 21 mg + 0,6 mg = 21,6 mg, o bien 21 mg + $\frac{3}{5}$ mg = 21 $\frac{3}{5}$ mg = $\frac{108}{5}$ mg.

Para aquellos que recurran al valor de la unidad también puede aparecer como posible estrategia el ir dividiendo gradualmente los gramos de alimento y realizar una correspondencia con la cantidad de calcio que eso tiene. Por ejemplo, para el ítem b), si en 20 gr de acelga hay 22 mg de calcio, en 10 gramos de acelga habrá la mitad de calcio, 11 mg (ya que a la mitad de alimento le corresponderá la mitad de calcio), y en 1 gr de acelga habrá la décima parte de calcio, es decir $11 \div 10 = 1{,}1$ o bien $\frac{11}{10}$.

Como se puede observar, los valores pedidos en los tres primeros ítems del problema fueron formulados para que no sea necesaria la aparición de "la unidad" (cantidad de miligramos de calcio por cada gramo de alimento), la misma puede o no aparecer dependiendo de la decisión de los chicos. En el caso de que no aparezca, los chicos recién están obligados a pasar por ella y calcularla en el ítem d).

Para obtener cuántos miligramos de calcio contiene cada gramo de alimento, los chicos podrían recurrir a la división. Por ejemplo, para la carne vacuna es probable que al realizar la cuenta $3 \div 25$ se queden con la expresión decimal, sin considerar que $\frac{3}{25}$ es un número y que no es necesario realizar la cuenta de dividir para obtenerlo. En este caso, el docente podrá decidir que los estudiantes dejen expresada la concentración de calcio mediante una expresión decimal o proponer expresarla con una fracción. Esta misma reflexión se va a ampliar en el análisis de la actividad 2.

Algo que podría llegar a suceder en el aula es que los estudiantes tengan dificultad al momento de querer expresar partes de un número. Por ejemplo, que no sepan "cómo expresar la cuarta parte de 22" cuando busquen la cantidad de mg de calcio en 5 gr de acelga. O en un caso más complejo, puede suceder que si algún estudiante quisiera calcular la cantidad de mg de calcio en 1 gr de acelga a partir de los valores anteriores, les resulte complejo encontrar cómo expresar esta relación.

Nos parece que es importante que el estudiante reconozca la relación entre mg de calcio y gr de alimento aunque no sepa cómo expresarla mediante un número. En este sentido, el docente podría ayudarlos a escribir dicha expresión.

ACTIVIDAD 2

La tabla que se presenta a continuación muestra la cantidad de calcio* que contienen los siguientes lácteos:

Lácteos	Porción (gr)	Contenido en Calcio (mg)
Leche entera	250	275
Leche descremada	200	240
Leche fortificada	100	184
Yogurt entero	160	240
Yogurt descremado	120	195
Yogurt fortificado	200	625

* Valores aproximados y extraídos del Comité Nacional de Endocrinología de la Sociedad Argentina de Pediatría. Se llama concentración de calcio a la cantidad de miligramos (mg) de calcio por cada gramo de alimento.

a) Indiquen cuáles de los siguientes pares de lácteos tienen mayor concentración de calcio:

1) Leche descremada y yogurt fortificado
2) Yogurt descremado y yogurt entero
3) Yogurt entero y leche descremada

b) Las siguientes expresiones indican la concentración de calcio (mg) por cada gramo de lácteo. Señalen cuál corresponde a los lácteos de la tabla anterior:

$$\frac{3}{2};\ \frac{120}{100};\ \frac{24}{16};\ \frac{97}{60};\ \frac{25}{8};\ \frac{195}{120};\ \frac{275}{250};\ \frac{13}{8};\ \frac{312}{100};\ \frac{6}{5};\ \frac{11}{10}$$

c) Comparen qué lácteo tiene mayor concentración de calcio:

1) leche descremada y yogurt descremado

2) leche entera y leche descremada

En el ítem a), se busca que los estudiantes comparen la concentración entre distintos pares de lácteos para que con ellos comiencen a elaborar estrategias de comparación entre números racionales. Sin embargo, reconocemos que dependiendo del camino que tomen los estudiantes, las estrategias que surjan serán muy diversas. Por ejemplo, pueden decidir expresar la concentración de calcio en forma de fracción, tomando los valores tal cual están presentados en la tabla, inclinarse por la expresión reducida de esa fracción o bien por la expresión decimal de esa relación. Las estrategias de comparación no serán las mismas para cada escritura. En el caso de que los estudiantes opten por la expresión decimal, por ejemplo, al comparar los valores correspondientes al yogurt descremado (1,625) y al yogurt entero (1,5), algunos chicos podrían pensar que 1,625 es mayor porque 625 es más grande que 5. Será un momento para abrir la discusión con toda la clase a partir de preguntas como "¿qué representa la cifra decimal 6 del 1,625?", "¿y la cifra decimal 5 del 1,5?". De este modo se puede proponer una discusión en torno a que el 6 del 1,625 representa seis décimos, y el 5 del 1,5 representa cinco décimos, por lo tanto se tienen más décimos en el 1,625.

Otros chicos pueden proponer completar con ceros a 1,5 y obtener 1,500. En ese caso se puede recurrir nuevamente a preguntas similares a las anteriores, como "¿qué parte de un entero es el 625 de 1,625?", "¿y el 500 del 1,500?", para poner en discusión que se comparan milésimos.

Una conclusión posible para ser registrada en las carpetas de los chicos podría ser: "Para comparar expresiones decimales se puede determinar cuál de ellos posee la mayor parte entera, luego el que tenga mayor la cifra que está en el lugar de los décimos, y por último la cifra que está en el lugar de los centésimos, etc.". O bien: "Para comparar expresiones decimales se puede completar con 0 para que ambos números tengan la misma cantidad de cifras detrás de la coma". Señalamos que esta última estrategia funciona si las expresiones decimales son finitas. Sin embargo, se puede considerar como válida teniendo en cuenta el momento de trabajo de los estudiantes.

Una cuestión a tener en cuenta: los estudiantes podrían no recurrir a expresar la concentración de calcio por gramo de alimento y aun así responder la pregunta. Por ejemplo, al comparar la leche descremada y el yogurt fortificado, para una misma cantidad de gramos (200) la leche descremada posee menor cantidad de calcio (240 mg) que el yogurt fortificado (625 mg), por lo tanto este último es el que tiene mayor concentración.

Consideramos que este tipo de resolución es válida, pero si nuestra intención con este problema es que aparezcan los números racionales, en particular expresados como fracción, deberíamos proponer una actividad que "obligue" a los estudiantes a utilizarlas. Para esto proponemos los ítems b) y c).

Por otra parte, pueden aparecer diferentes maneras de resolver el ítem a):

- Apelando a las propiedades de la proporcionalidad. Por ejemplo, en la opción 2), los estudiantes podrían calcular la concentración de calcio de ambos lácteos para una misma cantidad de gramos del mismo. Es decir, como en 160 gr de yogurt entero hay 240 mg de calcio y en 120 gr de yogurt descremado hay 195 mg de calcio, se podría calcular cuántos mg de calcio hay en 40 gr de dichos lácteos (se elige esa cantidad porque tanto el 160 como el 120 se pueden dividir por 40). Dado que 40 es la cuarta parte de 160, se debe dividir al 240 por 4, dando así 60 mg. Como 40 es la tercera parte de 120, se debe dividir al 195 por 3, dando así 65 mg. Entonces, si en 40 gramos de yogurt descremado hay 65 mg de calcio y en 40 gr de yogurt entero hay 60 mg de calcio, en el yogurt descremado hay mayor concentración de calcio.
- Apelando a la idea de concentraciones. Por ejemplo, para comparar el yogurt entero y la leche descremada los estudiantes podrían comparar de la siguiente manera: la concentración de calcio de la leche es $\frac{240}{200}$ y la del yogurt es $\frac{240}{160}$. Las partes del $\frac{240}{160}$ son más grandes, ya que están dividas

en menos partes. Como cuento con la misma cantidad de partes en ambas fracciones, estoy tomando más en $\frac{240}{160}$.

- Otra posible estrategia es que los estudiantes busquen fracciones equivalentes de igual denominador y comparen los numeradores.

El ítem b) está planteado para, por un lado, poner en discusión la posibilidad de expresar como fracción al cociente de dos cantidades enteras. Pero por otra parte, si en el ítem anterior los estudiantes no calcularon la concentración de calcio, este sería un buen momento para discutir con ellos que dicha concentración se calcula como cociente entre dos enteros. El docente puede recuperar los procedimientos que los estudiantes realizaron para obtener la concentración. Por ejemplo, los chicos podrían recurrir a la siguiente cuenta: $275 \div 250$ para la leche entera, ya que el cociente de dicha división dará cuantos mg de calcio hay por cada gramo de alimento. Como hemos mencionado, es probable que al realizar esta cuenta los estudiantes se queden con la expresión decimal, sin considerar que $\frac{275}{250}$ es un número y que no es necesario realizar la división para obtenerlo. Aquí se podría reflexionar con los chicos que $275 \div 250$, $\frac{275}{250}$ y 1,1 son expresiones equivalentes del mismo número racional.

En el caso de que los chicos hayan utilizado la regla de tres simple para calcular la concentración de calcio, se podría pedir que escriban en el pizarrón todos los pasos que realizaron para llegar al resultado. En el caso de la leche descremada, el cálculo que les quedaría sería $\frac{1 \times 240}{200}$. De este modo, se puede poner en evidencia que es igual a $\frac{240}{200}$.

Lo que se pretende con esta actividad es que los estudiantes evidencien que la concentración de calcio es un cociente cuyo resultado es un número racional, ya sea presentado en fracción o expresión decimal. En el caso de que los estudiantes apunten a la concentración como razón y obtengan un número fraccionario, el ítem b) permitirá trabajar la idea de equivalencias entre fracciones.

Para el ítem c), otra vez se pide a los estudiantes que comparen concentraciones de calcio. Pero se podría hacer este ítem luego de haber discutido en el aula el ítem b), reutilizando las ideas discutidas previamente. Así será posible establecer las concentraciones como fracciones y analizar, en la parte 1), que las concentraciones expresadas como $\frac{195}{120}$ y $\frac{240}{200}$ son fracciones mayores al entero, por lo cual para saber cuál de ellas es mayor se pueden comparar los excedentes de cada fracción. Es decir:

$$\frac{195}{120} = \frac{120}{120} + \frac{75}{120} \text{ y } \frac{240}{200} = \frac{200}{200} + \frac{40}{200}$$

Entonces, se comparan las fracciones $\frac{75}{120}$ y $\frac{40}{200}$. Como la primera es más de la mitad ($\frac{60}{120}$) y la segunda es menos de la cuarta parte ($\frac{50}{200}$), entonces $\frac{240}{200}$ es la fracción menor. También podrían realizar este mismo análisis utilizando las fracciones reducidas trabajadas en el ítem b).

Para comparar leche entera y leche descremada, por su parte, cabría utilizar las expresiones reducidas $\frac{11}{10}$ y $\frac{6}{5}$. Aquí los chicos podrían pensar que $\frac{6}{5}$ es mayor a $\frac{11}{10}$, ya que ambas fracciones superan el entero, pero si notan que lo que se excede para el $\frac{6}{5}$ es $\frac{1}{5}$, y para el $\frac{11}{10}$ es $\frac{1}{10}$, y que $\frac{1}{5}$ es el doble de $\frac{1}{10}$, comprenderán que $\frac{6}{5}$ es mayor.[13]

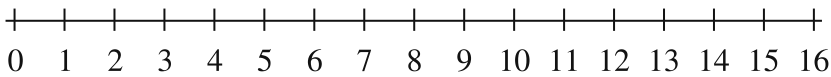
Los números racionales en el contexto de la medida

En la siguiente actividad se propone abordar los números racionales en el contexto de la medida. Por ejemplo, en el problema de los robots se busca determinar la medida de un segmento considerando otro como unidad y donde la medida obtenida resulta ser un número racional. El trabajo con este problema puede ir apoyándose en el trabajo con la recta que se realizó en la parte anterior.

13. Para otras actividades sobre proporcionalidad y orden de los números racionales, puede consultarse el documento *Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel medio*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, pp. 15-21. Disponible en: <http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf> [consulta: 28 de febrero de 2020]

ACTIVIDAD 3

Un robot, llamado A, se desplaza dando pasos sobre una recta como la siguiente:



Los pasos del robot son todos de la misma longitud y tiene que dar dos para ir del 0 al 3:

a) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha sobre la recta, ¿qué número le asignarían al punto en el que se detiene?

b) Identifiquen cinco puntos de la recta donde pararía el robot, que no sean los que aparecen marcados con los números naturales, y asígnenle un número a cada uno de esos cinco puntos.

Otro robot, B, da pasos de distinta longitud que A. Este nuevo robot va del 0 al 1 con dos pasos.

c) Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha sobre la recta, ¿qué número le asignarían al punto en el que se detiene?

d) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha sobre la recta, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

e) ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?

Los números racionales aparecen en la relación “da dos pasos para ir el 0 al 3” (los pasos son todos de la misma longitud), de allí que se pueda establecer que la medida de un paso será igual a $3 \div 2$. Esta longitud puede ser expresada con el decimal 1,5 pero será interesante discutir que también la fracción $\frac{3}{2}$ expresa la longitud de un solo paso del robot A. Del mismo modo, para el robot B la longitud del paso queda establecida por la relación “dos pasos para ir del 0 al 1”, en donde la longitud es 0,5 o bien $\frac{1}{2}$.

Con estas relaciones es posible, a partir del ítem e), discutir que un paso del robot B equivale a tres pasos del robot A, ya que tres veces 0, 5 es 1, 5 o bien tres veces $\frac{1}{2}$ es $\frac{3}{2}$.[14]

PARTE 4: ORDENAR Y COMPARAR NÚMEROS RACIONALES

¿Cómo saber cuál es menor?

Poder decidir entre dos números cuál es mayor y cuál es menor permite unir ideas de los números racionales, ya sea en su expresión fraccionaria como decimal. Cuando se buscan estrategias de comparación de fracciones estamos fomentando que los chicos puedan hallar estrategias contingentes a los números utilizados. Con esto queremos decir que no esperamos que aparezca un único método de comparación.

Por ejemplo, si el único método que aparece como óptimo para comparar fracciones es aquel que permite buscar fracciones equivalentes a las dadas, que tengan igual denominador, este perderá efectividad al tener que comparar $\frac{253}{120}$ y $\frac{7}{2}$. En este caso, es posible analizar que la primera fracción está entre 2 y 3, mientras que la segunda se encuentra entre 3 y 4.

La idea es que también se empiecen a cuestionar ciertas ideas que construyen nuestros estudiantes, como por ejemplo pensar que una expresión decimal es mayor cuantos más números tiene detrás de la coma, sin advertir el valor que ocupa cada cifra detrás de la coma. Para continuar, se podría proponer una actividad de armar un “paso a paso” que permita ordenar varios números y donde se tengan que realizar en simultáneo diferentes comparaciones.

14. Esta actividad, junto a un análisis más completo, se encuentra en el documento *Matemática. Números racionales*, *op. cit.*, pp. 29-31. Disponible en: <http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf> [consulta: 28 de febrero de 2020].

ACTIVIDAD 1

¿Cuál es el número mayor, en cada caso? Expliquen cómo lo pensaron:

a) $\frac{6}{5}$ o $\frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{11}$ o $\frac{10}{11}$

c) $\frac{7}{10}$ o $\frac{7}{8}$

d) 2,32 o 2,317

e) 2,5 o $\frac{20}{7}$

f) $3\frac{2}{7}$ o $\frac{25}{7}$

g) $\frac{245}{219}$ o $\frac{7}{2}$

h) $\frac{14}{13}$ o $\frac{17}{16}$

i) 4,56102 o 4,5602

j) $\frac{23}{42}$ o $\frac{134}{480}$

En esta actividad se busca lograr que los estudiantes puedan comparar dos fracciones indicando cuál es mayor o menor utilizando todas las relaciones que se emplearon en los trabajos anteriores y otras relaciones que se pondrán en juego dependiendo de las estrategias que utilicen. Como ya mencionamos, las estrategias de comparación son contingentes a los números involucrados. Unas estrategias tal vez sirvan para un par de números pero no para otros. Proponemos diferentes pares de números a comparar para propiciar la aparición de diversas estrategias en cuanto complejidad y en cuanto relaciones entre fracciones.

Solo a modo de ejemplo:

- Los estudiantes podrían comparar si la fracción es mayor o menor a 1. Por eso se propone el ítem a), donde $\frac{5}{6}$ es menor a un entero y $\frac{6}{5}$ es mayor a un entero, por lo tanto es más grande que $\frac{5}{6}$.
- Podrían comparar los numeradores si las fracciones tienen el mismo denominador. Para eso se propuso comparar $\frac{7}{11}$ y $\frac{10}{11}$. Sería propicio concluir para todos: "Si dos fracciones tienen el mismo denominador, será mayor aquella que tenga el numerador más grande".
- En el caso de tener el mismo numerador, como $\frac{7}{8}$ y $\frac{7}{10}$, se espera que puedan comparar sin necesidad de buscar otras equivalencias apelando a la idea trabajada anteriormente: las fracciones $\frac{1}{n}$ son más chicas cuanto más grande es el denomindador. En este caso se tienen la misma

cantidad: 7 de $\frac{1}{8}$ y 7 de $\frac{1}{10}$. Luego de esto, y tal vez a propósito de otros ejemplos, se podría concluir con todos los alumnos: "Si dos fracciones tienen el mismo numerador, será mayor aquella que tenga el denominador más chico".

- Al pedir comparar expresiones decimales será necesario "habilitar" la posibilidad de agregar 0 en los lugares de la última cifra decimal significativa.
- También al comparar expresiones decimales, como 2,32 y 2,317, puede aparecer –tal como se analizó en la actividad 2 de la Parte 3– que algunos chicos sostengan que 2,317 es mayor porque 317 es mayor que 32. Se pueden proponer preguntas que pongan en cuestión qué valor tiene la cifra decimal 2 en 2,32 y qué valor tiene la cifra decimal 1 en 2,317 para discutir que el 2 de 2,32 son dos centésimos y el 1 de 2,317 es un centésimo. De este modo, 2,32 tiene dos enteros y tres décimos, igual que 2,317, pero 2,32 tiene dos centésimos, más que 2,317.
- Podrían recurrir a la noción de número mixto. En el caso del ítem f) se propone explícitamente un número mixto. En este caso se puede transformar a $3\frac{2}{7}$ en $\frac{23}{7}$. O bien concluir que $3\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{25}{7}$ porque $\frac{25}{7}$ son 3 enteros y $\frac{4}{7}$. Como ambos números mixtos tienen la misma parte entera, se debe comparar la parte fraccionaria. Se podría reflexionar con los estudiantes acerca de que, en algunos casos, el tener expresadas las fracciones en números mixtos permite indicar directamente qué fracción es más grande en el caso en que las dos fracciones estén entre distintos números enteros.
- El ítem g) sirve para cuestionar un razonamiento usual que realizan los estudiantes: sostienen que $\frac{245}{219}$ es más grande que $\frac{7}{2}$ porque los números son más grandes, sin tomar en cuenta que $\frac{245}{219}$ es mayor a un entero y que $\frac{7}{2}$ es mayor a 3. Se podría reflexionar con la clase acerca de que no importa si los números que forman el numerador y el denominador son o no grandes, ya que ese no es un criterio suficiente ni siempre válido para indicar si una fracción es mayor a otra.

- El ítem h) pone en cuestión "lo que se pasa del entero". Los estudiantes podrían pensar que $\frac{14}{13}$ y $\frac{17}{16}$ se pasan del entero una parte, entonces son iguales. Aquí el docente debería intervenir para que reflexionen que, si bien $\frac{14}{13}$ y $\frac{17}{16}$ son mayores a un entero, $\frac{14}{13}$ es un entero más $\frac{1}{13}$, en cambio $\frac{17}{16}$ es un entero más $\frac{1}{16}$. Como ambas fracciones son un entero y algo más, es necesario comparar eso que sobra: $\frac{1}{13}$ es mayor que $\frac{1}{16}$, entonces $\frac{14}{13}$ es mayor que $\frac{17}{16}$.
- Además de comparar si una fracción se pasa o no del entero, se puede comparar con la mitad. Es el caso de las fracciones del ítem j), en donde $\frac{23}{42}$ se pasa de la mitad, ya que $\frac{1}{2} = \frac{21}{42}$, y en cambio $\frac{134}{485}$ no llega a la mitad, ya que $\frac{1}{2}$ está entre $\frac{242}{485}$ y $\frac{243}{485}$. Algunos chicos podrían escribir a $\frac{1}{2}$ como $\frac{242,5}{485}$. Tal como comentamos anteriormente, la expresión $\frac{242,5}{485}$ no se corresponde con una fracción. Sin embargo es una representación del número $\frac{242,5}{485}$ y puede ser un paso intermedio para decidir que $\frac{134}{485}$ no llega a la mitad.

Algunos estudiantes que conocen el mecanismo de buscar fracciones equivalentes lo utilizan para transformar cada par de fracciones en fracciones equivalentes de igual denominador. Como hemos mencionado, la intención de este problema es habilitar distintas estrategias que permitan conocer diversas relaciones entre ciertas fracciones, por lo cual no pretendemos deshabilitarla. Es por ello que el docente podría tomar la decisión de postergar esta estrategia para el final de la puesta en común, así surgen otras antes. Por otra parte, si se repitieran siempre las mismas estrategias de comparación, el docente podrá proponer otras a modo de discusión. Por ejemplo, si solo surgiera la estrategia de buscar fracciones equivalentes con igual denominador, se podría preguntar: "¿Es cierto que para comparar $\frac{7}{10}$ y $\frac{7}{8}$ no necesito buscar el mismo denominador?".

Luego de las actividades de comparación de fracciones y expresiones decimales, cabría solicitar a los estudiantes que elaboren una lista de reglas que sirvan para comparar fracciones en base a las discusiones que se hicieron en torno a la actividad anterior, por ejemplo. El docente también podría armar una tabla en el pizarrón con todas las reglas expuestas por sus estudiantes y poner en la discusión colectiva cuáles de ellas sirven siempre, cuáles parcialmente o cuáles no sirven nunca, pidiendo además ejemplos para cada caso.

Este trabajo sirve para afianzar las conclusiones a las que se arribó en la actividad anterior. A continuación se deja una tabla a modo de ejemplo, ya que cada curso armará la propia en función de lo que haya surgido en clase. La idea de esta actividad es que la tabla se entregue a los estudiantes con los renglones vacíos para que la completen con diversas reglas que estuvieron trabajando en el problema anterior y para que señalen si esa estrategia sirve siempre, parcialmente o no sirve nunca. El docente podría traer una regla para toda la clase, a modo de ejemplo de la actividad que les propone.

ACTIVIDAD 2: REGLAS DE COMPARACIÓN DE FRACCIONES

	Sirve siempre	Sirve parcialmente	No sirve nunca
Se puede considerar entre qué enteros se encuentran			
Si dos fracciones tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador			
Si dos fracciones tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador			
Si dos fracciones se encuentran entre los mismos enteros, conviene considerar a qué distancia están del entero o de otra fracción			
Si una fracción tiene mayor su numerador que su denominador, es seguro que será mayor que otra que tenga su numerador menor que su denominador			

continúa en página 191 >>

>> viene de página 190

Si una fracción tiene el numerador y denominador mayores que los de otra, seguro es mayor			
Se pueden comparar ambas fracciones, si son mayores o menores que la mitad			

Decidimos poner una columna para una estrategia que no sirve nunca, ya que permitiría a los chicos a “estar atentos” o “advertidos” para evitar usar una regla que no sirve y que tal vez en un comienzo se dio por válida.

Respecto a las expresiones decimales, se puede proponer a los estudiantes que elaboren una estrategia que les permita comparar dos expresiones decimales y que así aparezcan al menos dos que ya se analizaron en el apartado anterior:

- Se puede determinar cuál de los números posee la mayor parte entera; si son iguales, se tiene que buscar el que tenga mayor la cifra que está en el lugar de los décimos; si son iguales, se tiene que buscar el que tenga mayor la cifra en el lugar de los centésimos, y así sucesivamente.
- Se puede completar con 0 para que ambos números tengan la misma cantidad de cifras detrás de la coma.

Nuevamente, señalamos que esta última estrategia funciona solo si las expresiones decimales son finitas. El docente decidirá si es el momento de cuestionar esta estrategia para expresiones decimales que no sean finitas.

En el documento *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio* se hace mención a la importancia de la carpeta, ya que muchas veces, al ser el único elemento de estudio, es fundamental que el estudiante aprenda a tomar apuntes para que esta le resulte una herramienta útil.

> Pero, para que esto suceda, hay que plantear actividades que les permitan valorar la función de la carpeta y mejorar los registros de lo que se realiza en clase. [...]
>
> Un paso en ese sentido es asignar momentos específicos para la escritura en la carpeta y planificar tareas que tengan por objeto mejorar la calidad de esas escrituras (GCBA, 2005: 13).

Creemos que actividades de síntesis, como la que se presentó más arriba, ayudan a darle más sentido a la toma de apuntes en la carpeta. A continuación, en el punto a), se proponen pares de fracciones para poder ampliar en la clase la elaboración estrategias de comparación. En el punto b) la idea es que, a partir de otros pares, los estudiantes desarrollen estrategias de comparación con racionales negativos, cuestión que el docente podría proponer para ampliar la discusión con alumnos de 2º o 3er año.

ACTIVIDAD 3

a) Indiquen qué número es mayor. Justifiquen su respuesta:

$$\frac{21}{5} \text{ o } \frac{21}{6}$$

$$\frac{8}{9} \text{ o } \frac{9}{10}$$

$$\frac{3}{9} \text{ o } \frac{2}{4}$$

$$\frac{12}{5} \text{ o } \frac{27}{9}$$

0,13 o 0,130

b) Indiquen qué número es mayor. Justifiquen su respuesta:

$$-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{9}{4}\ ;\ -1{,}5\ ;\ -0{,}25\ ;\ -\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{13}{11}\ ;\ -\frac{7}{5}$$

La comparación de números racionales negativos repone el orden de los enteros negativos. Algunas estrategias de comparación utilizadas para las fracciones positivas se adecúan en el caso de las negativas:

- "Si dos fracciones tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador" se mantiene si se considera el signo negativo de la fracción como el signo negativo del numerador.
- "Si dos fracciones tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador" deja de ser cierta y resulta que es mayor la que tiene mayor denominador.

Para finalizar esta cuarta parte del capítulo, en torno a ordenar y comparar números racionales, se puede proponer otra serie de actividades que movilicen diversos asuntos (si es que no se hicieron antes). Por ejemplo, las actividades 2 y 3 de la primera parte, donde había que ubicar fracciones o expresiones decimales entre enteros consecutivos; o como la actividad 4 de esa misma parte, donde había que encontrar números racionales entre dos números enteros consecutivos. También se puede proponer ordenar una serie de números, por ejemplo:

ACTIVIDAD 4

Ordenar de menor a mayor las siguientes series de números:

a) $\frac{23}{7}$; $\frac{523}{1236}$; $\frac{25}{16}$; $\frac{20}{6}$

b) 39,3; 40,01; 40,11; 15,34; 15,345

c) $\frac{2}{3}$; 0,66 ; $\frac{4}{10}$; $\frac{666}{100}$; $\frac{4}{9}$

d) $\frac{9}{7}$; $\frac{85}{170}$; $\frac{36}{17}$; $\frac{167}{50}$; $\frac{39}{8}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{32}{15}$

La actividad de ordenar una serie de números puede poner en juego más estrategias que solo comparar cuál es mayor entre dos números. En el caso de ordenar una serie de fracciones, ubicarlas entre enteros o escribir a las fracciones como número mixto permite poner atención solo a aquellas fracciones que se encuentran entre los mismos enteros y utilizar estrategias de comparación para esos números. La recta numérica también es un buen soporte. Para ordenar de menor a mayor las fracciones del ítem a) se puede buscar un denominador común, pero esta estrategia resulta muy poco económica. Una opción es empezar a ordenarlas apelando a la actividad de ubicar entre qué enteros próximos está cada fracción o pasándolas a número mixto. Entre los argumentos posibles de los chicos, podría aparecer:

- $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$, entonces está entre 3 y 4 porque $2 = \frac{14}{7}$, $3 = \frac{21}{7}$ y $4 = \frac{28}{7}$.
- $\frac{523}{1236}$ es menor que 1 porque el numerador es menor que el denominador.
- $\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$, entonces está entre 1 y 2 porque $2 = \frac{32}{16}$, entonces la fracción es menor que dos enteros y mayor que un entero.
- $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6}$, entonces está entre 3 y 4. O bien, como $3 = \frac{18}{6}$, entonces $\frac{20}{6}$ está entre 3 y 4.

Estas estrategias permiten empezar a ordenar, ya que seguro la menor es $\frac{523}{1236}$ (es la única menor que 1) y le sigue $\frac{25}{16}$ (que está entre 1 y 2). Luego vienen las dos fracciones que están entre 3 y 4. Para poder decidir cuáles de esas dos es la menor, se deberá apelar a diversas estrategias desplegadas anteriormente, por ejemplo cuánto se pasa cada una de ellas del entero (en este caso, del 3). Una se pasa $\frac{2}{6}$ y la otra $\frac{2}{7}$. De este modo quedan ordenadas las fracciones positivas del siguiente modo, de menor a mayor: $\frac{523}{1236}$; $\frac{25}{16}$; $\frac{23}{7}$; $\frac{20}{6}$.

También se puede jugar con números negativos. Por ejemplo, agregarle al ítem a) las fracciones $-\frac{6}{5}$; $-\frac{8}{7}$; $-\frac{91}{130}$ de manera intercalada; o agregarle expresiones decimales periódicas, por ejemplo $15{,}3\overset{\frown}{4}$ y $0{,}6\overset{\frown}{7}$.

PARTE 5: ESTUDIAR LA DENSIDAD

¿Entre dos números racionales.... hay otros?

La noción de *densidad* permite profundizar el estudio de los números racionales. Por un lado, se reinvierten las estrategias de comparar y ordenar números para poder encontrar otro número entre dos dados, ya que esta tarea obliga a encontrar un número distinto a los que se dan y que cumpla, a la vez, con que tiene que ser menor que el mayor de los números y ser mayor que el menor de los números. Por otro lado, comenzar a discutir y profundizar esta idea permite comprender la diferencia entre los conjuntos numéricos que los chicos vienen estudiando. En el conjunto de los números enteros, siempre existe un número entero anterior y uno siguiente inmediatos. Sin embargo, debido a la propiedad de densidad, no es posible encontrar un número racional anterior ni siguiente inmediato de otro número racional. Esta noción es compleja de atrapar y muchas veces los chicos van y vienen sobre estas cuestiones. Será necesario entonces brindar a los estudiantes el tiempo que sea necesario para poder revisarlas una y otra vez.

A su vez, proponer un estudio sobre la noción de densidad permite cuestionar creencias que posiblemente se construyeron nuestros estudiantes al trabajar con números enteros. Por ejemplo, relacionar la noción de infinito con "algo muy grande" en lugar de algo que "no es posible de contar". Sin embargo, en el conjunto de los números racionales es posible encontrar una cantidad infinita de números en un intervalo acotado. Es decir, entre 1 y 2 hay infinitos números, aun cuando es posible "comenzar en 1 y finalizar en 2". Esta idea de una cantidad infinita de números en un intervalo acotado puede ser disruptiva.

Por último, la idea de densidad posiciona a los chicos en un mejor lugar al momento del estudio de funciones cuyos gráficos tienen asíntotas, ya que los estudiantes pueden comprender "que me puedo acercar tanto a la asíntota como quiero y no tocarla". Del mismo modo, esta idea podría ayudar a entender el concepto de *límite de una función*.

ACTIVIDAD 1

Los siguientes números racionales están ordenados de menor a mayor. ¿Dónde ubicarían $\frac{1}{2}$? ¿Y 0,8? ¿Y $\frac{13}{6}$? ¿Y $\frac{21}{8}$?

$$\frac{3}{7} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{14}{9} \quad \frac{13}{7} \quad \frac{16}{5}$$

Esta actividad de intercalación de números racionales tiene como intención que los estudiantes puedan, a través de las estrategias de orden y comparación, ubicar racionales en una secuencia de números ordenados, además de brindarles a los chicos herramientas para comenzar a comprender la noción de densidad partiendo de la discusión sobre qué significa ubicar un número entre otros dos. Aquí se les propone un número a ubicar. En actividades siguientes serán los estudiantes quienes deban encontrar esos números.

Como dijimos antes, va a ser necesario que los chicos se construyan la idea de que un número estará entre otros dos si es mayor que el menor y menor que el mayor de los números. Algunas estrategias posibles permiten reinvertir y profundizar lo anterior:

- Los chicos podrían pensar que $\frac{1}{2}$ se encuentra entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{9}$ ya que $\frac{3}{7}$ es menos de la mitad y $\frac{5}{9}$ es más de la mitad: 3,5 es la mitad de 7 y 4,5 es la mitad de 9.
- Para el 0,8 podrían pensar que está entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{6}$ ya que $\frac{3}{4} = 0{,}75$ y 0,8 es mayor que 0,75.
- El $\frac{13}{6}$ se encuentra entre $\frac{13}{7}$ y $\frac{16}{5}$ ya que $\frac{13}{7}$ y $\frac{13}{6}$ tienen el mismo numerador y, como se reflexionó en la actividad de comparación, es mayor la fracción que tiene el denominador más chico.
- El $\frac{21}{8}$ está entre $\frac{13}{7}$ y $\frac{16}{5}$ ya que $\frac{13}{7}$ y $\frac{21}{8}$ son mayores a dos enteros y $\frac{16}{5}$ es mayor a tres. Ahora bien, como $\frac{13}{6}$ y $\frac{21}{8}$ se encuentran en el mismo intervalo, se debe analizar cuál es mayor. Como $\frac{13}{6}$ son $2\frac{1}{6}$ y $\frac{21}{8}$ son $2\frac{5}{8}$, y $\frac{5}{8}$ es más grande que $\frac{1}{6}$, ya que $\frac{5}{8}$ es más de la mitad del entero, entonces $\frac{25}{8}$ es mayor que $\frac{13}{6}$.

ACTIVIDAD 2

Proponer una fracción que se encuentre entre cada par de números:

a) 3 y $\frac{13}{4}$ b) 2 y $\frac{11}{5}$

c) $\frac{14}{3}$ y 5 d) $\frac{20}{7}$ y 3

Para esta actividad, a diferencia de la anterior, serán los chicos quienes tengan que encontrar una fracción entre dos números dados. Además, los valores de la misma fueron planteados con la finalidad de generar un "conflicto", debido a que es posible que los estudiantes recurran a la estrategia de expresar al entero como una fracción con igual denominador que la fracción propuesta en la dupla donde se pide intercalar. Como $3 = \frac{12}{4}$, entonces la fracción a intercalar estaría entre $\frac{12}{4}$ y $\frac{13}{4}$, dando a los estudiantes una primera impresión de que no es posible hallar una fracción entre ellas.

En el caso de que los estudiantes respondan que no es posible encontrar un número entre $\frac{12}{4}$ y $\frac{13}{4}$, el docente podría evocar lo que se trabajó en los problemas anteriores (como el problema de las rectas numéricas), tomando la idea de que es posible, por ejemplo, ubicar una fracción entre $\frac{1}{2}$ y $1 = \frac{2}{2}$. Es decir, sabiendo que puedo expresar al entero y al $\frac{1}{2}$ en cuartos, el cuarto que se puede ubicar entre $\frac{1}{2}$ y 1 es $\frac{3}{4}$. De manera análoga, se podría realizar el mismo procedimiento utilizando octavos.

Otra posible estrategia es utilizar lo trabajado en la parte de comparaciones. Por ejemplo, se tiene que encontrar una fracción entre 3 y $\frac{13}{4}$, donde $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$. Entonces, hay que encontrar una fracción mayor que 3 pero menor que $3\frac{1}{4}$. Las fracciones menores que $\frac{1}{4}$ pueden ser aquellas que tengan el mismo numerador pero con denominador más grande. Entonces, entre 3 y $\frac{13}{4}$ se encuentran $3\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{7}$, etcétera.

ACTIVIDAD 3

En cada caso, completar con un número, de tal manera que los tres números queden ordenados de menor a mayor:

a) $\frac{2}{5}$ …… $\frac{4}{5}$

b) $\frac{7}{9}$ …… $\frac{8}{9}$

c) $\frac{1}{100}$ …… $\frac{1}{50}$

d) $\frac{5}{4}$ …… $\frac{11}{8}$

e) 0,7 …… 0,8

En esta actividad se solicita intercalar fracciones entre dos dadas, mientras que en la actividad 2 se pedía intercalar entre un número entero y una fracción. Existe una infinidad de respuestas válidas para cada uno de estos ítems. Será interesante retomar diferentes producciones y argumentar cómo es posible estar seguro de que son correctas, es decir, cómo es posible saber si los números propuestos se encuentran entre los números dados.

Sería esperable que los estudiantes respondan, en el ítem a), que entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$ se encuentra el $\frac{3}{5}$, pensando que es la única fracción que se puede ubicar ya que entre el 2 y el 4 se encuentra el 3. Esto posiblemente se encuentre ligado al trabajo que los estudiantes tuvieron respecto a la relación de orden de los números naturales. Pero este supuesto se "derrumba" cuando se les solicita que hallen una fracción entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$. Aquí los chicos podrían retomar algunas de las ideas trabajadas en la actividad 2 y hacer un análisis análogo al que realizaron allí. Se espera que ante esta supuesta imposibilidad de encontrar un número entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$ los estudiantes reafirmen que es posible encontrar un número entre otros dos, luego de todas aquellas discusiones y análisis que se realizó con el trabajo hasta aquí.

Definiendo la propiedad de densidad de los números racionales

Luego del trabajo con las actividades 1 a 3, el docente podría poner a discusión ciertas afirmaciones. A partir de esta y otras discusiones que hayan surgido a lo largo de las clases, se podría llegar a definir la propiedad de densidad de los números racionales: "Entre dos números racionales diferentes, es posible encontrar otro número racional diferente a los dados".

ACTIVIDAD 4

Discutir las afirmaciones siguientes:

- "Entre dos números enteros siempre se puede encontrar otro número entero."

- "Entre dos expresiones decimales siempre se puede encontrar otra expresión decimal, ya que se pueden agregar ceros al final tantas veces como se quiera. Por ejemplo, entre 0,7 y 0,8."
- "Entre dos fracciones siempre se puede encontrar otra fracción. Para eso se pueden encontrar fracciones equivalentes a las dadas pero con denominadores cada vez más grandes. Por ejemplo, entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$."

Por último, se podría poner en discusión cuántas fracciones con cierto denominador hay entre dos fracciones o cuántas expresiones decimales con una cantidad de cifras decimales fija hay entre dos expresiones decimales diferentes. De este modo, también se puede cuestionar la propiedad de densidad: si se fija el denominador de la fracción, o se fija la cantidad de cifras decimales en la expresión decimal, no es posible encontrar infinitas (puede no haber) entre dos números racionales diferentes. Por ejemplo, entre $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{3}$ no hay fracciones con denominador 3 ni 9 y solo hay una fracción con denominador 18; entre 0,7 y 0,8 no hay expresión decimal con una cifra detrás de la coma y solo hay 9 expresiones decimales con dos cifras significativas detrás de la coma.

Las actividades que siguen tienen por objeto comenzar a trabajar la idea de que no es posible encontrar ni el anterior ni el posterior inmediatos de un número racional, apoyados en la propiedad de densidad.

ACTIVIDAD 5

Juego: "No te quedes sin nada"

Participantes: 2 personas

Reglamento: Cada jugador, por turno, deberá restarle al 1 un número. Aquel jugador que llegue al 0 será el que pierda la partida.

La intención de esta actividad-juego es que los estudiantes adviertan que los números a restar pueden ser tan chiquitos como ellos quieran y que, de tal forma, puedan controlar esta resta para no quedarse sin nada. Así se podría comenzar a trabajar con los chicos la idea de que siempre hay un número más chico que uno dado pero mayor que 0, y que esto va a permitir que el jugador sobreviva en el juego.

En primer lugar, se pretende que los chicos jueguen con un compañero varias partidas. El docente podría sugerir a los estudiantes que anoten en sus carpetas cada partida para poder analizarlas luego. El motivo de que los chicos las registren en la carpeta es poder utilizar esto como herramienta, tanto para sí mismos como para el docente. A los chicos les servirá para analizar su trabajo y hasta para anticipar futuras jugadas. Al docente, tener la traza de las producciones de sus estudiantes le permite conocer lo que ellos hacen y saber dónde debe realizar alguna intervención.

Luego, se puede proponer que jueguen por equipos (mesa contra mesa, fila contra fila, un compañero con otro que no sea el de banco, etc.). En este momento sería muy conveniente que el docente también anote las partidas para poder realizar en la discusión colectiva un análisis acerca de ellas. Posteriormente, se les propondrá a los chicos analizar en grupos o en parejas diferentes partidas. Como actividad proponemos analizar unas partidas “particulares”, aunque puede surgir algo similar en la clase.

ACTIVIDAD 6

1) Se tiene un registro que llevan dos chicos al jugar “No te quedes sin nada”. Si el jugador 1 resta 0,1, ¿el jugador 2 tiene chances de seguir jugando? De ser así, ¿qué número le convendría decir?

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
1	0,5	0,2			
-0,5	-0,3	-....			

2) A continuación, se muestra otro registro de los jugadores 1 y 2:

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
1	0,5	0,3	0,15	......	
-0,5	-0,2	-0,15	-0,1	-......	

a) Si el jugador 2 resta 0,1 como se ve en la última jugada de la partida, ¿el jugador 1 tiene chances de seguir jugando? De ser así, ¿qué número le convendría decir?
b) Si el jugador 1 decidió restar 0,03, ¿qué número le conviene decir al jugador 2 para dejar sin chances de seguir jugando a su rival?

3) En el siguiente cuadro se muestra el registro de otra pareja jugando a "No te quedes sin nada". ¿Qué número le conviene decir al jugador 1 para dejar sin chances de seguir jugando a su rival?

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
1	0,25	0,01	0,005	0,001	
-0,75	-0,24	-0,005	-0,004	-......	

El ítem 1) crea una ruptura para aquellos estudiantes que piensan que solo se pueden restar décimos, probablemente porque son los únicos decimales que tienen presentes en ese momento: su lógica es que si al jugador 2 le toca restar un número al 0,1 y 0,1 es precisamente el único número que puede restar, entonces el jugador 2 perdería el juego. Ante esta posible respuesta, el docente podría preguntar si no conocen otros decimales más chicos que los décimos. También podría ser otro estudiante quien argumente que lo que se está pensando es incorrecto, ya que existen otros decimales además de los décimos. Por ejemplo 0,05 o 0,25 o 0,75. Se busca entonces reflexionar que siempre es posible encontrar otro número decimal que puede restarse con el resultado obtenido por el otro jugador.

En el ítem 2, punto a), se busca cuestionar (igual que en el ítem 1) la posibilidad o no de seguir restando números. Aquí el jugador 2 restó 0,1 y el número que queda para restar es 0,05. Algunos podrían responder que el jugador 1 no tiene oportunidad de seguir jugando ya que no hay otro decimal más chico que 0,05; pero otros podrían decir que sí es posible restar números como por ejemplo 0,01 o 0,02 o 0,03 o 0,04, recuperando la idea anterior de que existen otros decimales más chicos. También puede ocurrir que sea el docente quien vuelva a traer para toda la clase lo analizado anteriormente.

El punto b) toma una de las respuestas que podrían dar los estudiantes. Este valor fue planteado como continuación de la partida para que, a partir de un número en común, se pueda realizar un análisis en conjunto de cómo continuaría la misma. En ese momento se podría realizar un trabajo en forma oral con toda la clase, tomando registro en el pizarrón de lo que ellos vayan respondiendo. Así, el docente puede tomar las respuestas que dan sus estudiantes y formular preguntas a partir de ellas. Por ejemplo, si un grupo respondió para el ítem b) que el jugador 2 debía restar 0,01 (o el número que ellos elijan) para dejar sin chances de jugar al jugador 1, el docente podría tomar esta respuesta dada por los chicos y relanzar otra pregunta: “¿Es verdad que si el jugador 2 elige restar 0,01, el jugador 2 se queda sin chances de seguir jugando?”. Si el resto de la clase decide que no es verdad esta afirmación, el docente podría proponer otras posibles respuestas o dejar que los chicos sigan jugando. Una posible pregunta a realizar sería qué sucede si el jugador 2 decide finalmente restar 0,019.

Es probable que los chicos busquen como estrategia restar determinados números que les permitan acercarse lo más que puedan a 0 y que el otro jugador no tenga más números para restar salvo ese que le quedó. Entonces, la pregunta a instalar en el espacio colectivo es “si es posible dejar sin chances al compañero” o, dicho de otro modo, “si es posible hacer perder al otro”.

Con respecto al ítem 3), como se mencionó anteriormente, la finalidad de esta actividad es que los estudiantes, apoyados en la propiedad de densidad –entre dos racionales es posible encontrar otro racional diferente–, puedan analizar que no es posible encontrar un número posterior inmediato. Esto quiere decir que no es posible encontrar un número positivo "justo antes del 0", o el posterior más próximo del 0. Y con esto quizás lleguen a afirmar que, aunque se tenga un número "chico", es posible restar otro número menor a este sin llegar a cero, con lo cual siempre se va a poder restar algo y seguir jugando. Es esperable, con lo trabajado en las actividades anteriores, y sobre todo en la última, que los estudiantes utilicen el recurso de agregar ceros después de la coma para poder construir un número decimal más chico que el que se tiene para restar y de este modo se aseguren la continuidad en el juego. Por ejemplo, si lo que quedó es 0,00001 se puede restar un 0,000009.

Dependiendo de las complejidades que aparezcan en la clase se podrían plantear otras partidas a analizar. A modo de ejemplo, se propone la siguiente partida que sigue las reglas del juego anteriormente propuesto:

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
1	0,01	0,005	0,00001	0,001	
-0,99	-0,005	-0,00499	-0,00009999	-......	

ACTIVIDAD 7

Otra propuesta de trabajo que puede presentarse a los estudiantes es plantear el mismo juego pero siguiendo el camino inverso. Es decir, cambiando las reglas y sumando números positivos a partir del 0 sin llegar a 1. A continuación proponemos una serie de partidas para analizar. En todas las tablas los puntos suspensivos indican que el número es periódico y se continúa con el último número escrito:

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
0	0,5	0,9			
+0,5	+0,4	+......			

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
0	0,8	0,89	0,899		
+0,8	+0,09	+0,009	+......		

Jugador 1	Jugador 2	Jugador 1	Jugador 2		
0	0,9999	0,999989			
+0,9999	+0,000089	+......			

Para la partida 2, el docente podría preguntar qué número debería sumar el jugador 2 al 0,8999... para dejar al jugador 1 sin oportunidad de ganar. Es posible que los chicos respondan que se debería sumar 0,1 así se llega al 0,999…, “porque es lo más cercano a 1”, sin reparar que 0,999… = $0,\overset{\frown}{9} = 1$. Entonces, para seguir jugando, se debería sumar un número menor al 0,1. Consideramos necesaria la discusión de esta igualdad en el espacio colectivo.

Por lo tanto, para seguir jugando los estudiantes tienen que pensar en no llegar a 1 o, lo que es lo mismo, no llegar a 0,9 periódico.

Si los alumnos no lo abordaron antes, al trabajar las expresiones decimales periódicas, este puede ser un buen momento para hacerlo. Esta decisión acerca del cuándo y cómo seguramente quedará en el docente. Sin embargo, proponemos un posible trabajo apoyándose en las siguientes igualdades: $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$. El doble de $\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{3}$ y el doble de $0,\overset{\frown}{3}$ es $0,\overset{\frown}{6}$; entonces $\frac{2}{3} = 0,\overset{\frown}{6}$. Y el triple de $0,\overset{\frown}{3}$ es $0,\overset{\frown}{9}$, que es igual al triple de $\frac{1}{3}$ que es $\frac{3}{3}$. De este modo, queda que $0,\overset{\frown}{3} = \frac{3}{3} = 1 = 0,\overset{\frown}{9}$.

Al analizar estas partidas, y luego de discutir con la clase pensando en las posibles respuestas de los jugadores, los estudiantes pueden afirmar que siempre se puede sumar un número “tan chico como quiera” para no llegar al 1. Por ejemplo, si se obtuvo el 0,999999989999…, y los chicos piensan que se pierde, analizar que se puede sumar 0,000000001 o bien 0,0000000000001.

ACTIVIDAD 8

¿Cuáles son los dos números racionales más cercanos a los siguientes números?

a) …… 0 …… b) …… $\frac{3}{2}$ ……

c) …… $\frac{87}{100}$ …… d) …… 5 ……

e) …… 3,4 …… f) …… 9,357 ……

Esta actividad tiene como intención volver a poner en discusión la idea del anterior y posterior de un número racional. Al pedir que encuentren los números más cercanos a los que fueron dados, cada estudiante tendrá una respuesta distinta: entonces, la idea de que existe un número que está más cerca del 0, por ejemplo, se vuelve a poner en duda. Al haber trabajado con esto en el conjunto de los números enteros, pretendemos abrir un debate sobre los supuestos que traen los estudiantes sobre los posteriores y anteriores de un número racional. Queremos discutir que, a diferencia que en los números enteros, en los números racionales no es posible encontrar el anterior y posterior inmediato de un número, y que esto es una consecuencia de la propiedad de densidad.[15]

REFLEXIONES FINALES

Hemos querido presentar un trabajo con los números racionales que permita cuestionar ciertas “creencias” que tienen nuestros estudiantes. Esta propuesta se enmarca en una concepción de la clase de matemática como un ámbito en donde se despliega actividad matemática, en donde se les propone a los chicos elaborar conjeturas, confrontarlas y ensayar formas de validarlas; un ámbito

15. Para profundizar el análisis de las actividades 1, 2, 3 y 5 se puede consultar la actividad 4 del documento *Matemática. Cálculo mental con números racionales. Apuntes para la enseñanza*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, p. 51. <https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/calculo_mental_con_numeros_racionales._apuntes_para_la_ensenanza.pdf>. Allí encontrarán actividades similares pero trabajadas con números decimales.

donde formular preguntas, ensayar respuestas para esas preguntas y eventualmente dejar cuestiones pendientes; y, también, un lugar donde reflexionar sobre las propias producciones y sobre las de otros, en donde se propone teoría a partir del trabajo producido –como ya hemos dicho– en un escenario donde el conocimiento a definir estuvo puesto en juego.

Lo que un docente proponga hacer a sus estudiantes, las preguntas que se permiten abrir en el aula, los intercambios que se propicien, las intervenciones que realice, van a permitir un tipo de conocimiento producido por nuestros estudiantes. No desconocemos que esto que señalamos plantea una complejidad del trabajo matemático en la clase y una complejidad del trabajo docente. Aun así, creemos que vale la pena.

BIBLIOGRAFÍA

GCBA (Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires)

2005 *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento nº 2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación. <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf> [consulta: 3 de marzo de 2020]

2006a *Matemática. Cálculo mental con números racionales. Apuntes para la enseñanza*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. <https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/calculo_mental_con_numeros_racionales._apuntes_para_la_ensenanza.pdf> [consulta: 3 de marzo de 2020]

2006b *Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel medio*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. <http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf> [consulta: 28 de febrero de 2020]

2007 *Matemática. Fracciones y números decimales*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/plan_plurianual_oct07/matematica/m7_docente.pdf> [consulta: 28 de febrero de 2020]

Ministerio de Educación (República Argentina)

2011 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico Educación Secundaria 1º y 2º / 2º y 3º* años, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <http://repositoriorecursos-download.educ.ar/repositorio/Download/file?file_id=1a820389-3f95-4bfb-9d54-a4630322f7c1&rec_id=110570> [consulta: 6 de diciembre de 2019]

Sobre las autoras y los autores

VALERIA BORSANI es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA). Actualmente se desempeña como profesora adjunta de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en esa misma universidad. Ha trabajado como formadora de maestros y profesores, y como profesora de matemática en escuelas secundarias y en universidades de la Ciudad de Buenos Aires. Es coautora de textos escolares y de diversos documentos y artículos referidos a la enseñanza de la matemática.

MARÍA NIEVES BRUNAND es profesora de Matemática y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE. Se desempeñó como tutora del curso virtual a distancia Reflexiones, en torno al álgebra y las funciones y su enseñanza en el INFoD. Actualmente, es docente en escuelas secundarias de La Plata y en la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE.

CARLA CABALCABUÉ es profesora de Matemática y cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la UNIPE. Se ha desempeñado como docente en escuelas secundarias de La Plata desde 2005. Fue tutora y responsable de contenidos del Seminario de Enseñanza de la Aritmética en la Especialización en Enseñanza de la Matemática del programa Nuestra Escuela del INFoD. Actualmente es coordinadora pedagógica del equipo de formadores de matemática secundaria de la Dirección de Formación Docente Permanente de la Provincia de Buenos

Aires. También integra el equipo de matemática secundaria de la Gerencia Operativa de Currículum en la Ciudad de Buenos Aires.

SABRINA DELLA SANTA es profesora de Matemática en EGB 3 y profesora de polimodal recibida en el Instituto Superior de Formación Docente Nº 41 de Adrogué (partido de Almirante Brown). Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica (UNIPE), sede Adrogué. Se ha desempeñado mayoritariamente en el ciclo básico de la escuela secundaria. Actualmente, ejerce la docencia en el Instituto José Manuel Estrada (Rafael Calzada) y en el Instituto Adolfo Alsina (Claypole).

BETINA DUARTE es licenciada en Matemática (UBA) y doctora en Educación (Universidad de San Andrés). Se desempeña como profesora asociada y directora del departamento de Ciencia y Tecnología de la UNIPE, donde enseña en programas de formación de posgrado para profesores de matemática y en programas de grado dirigido a futuros docentes. Su investigación se centra en la enseñanza de la demostración, la fundamentación y la validación en distintas zonas de la enseñanza de la matemática del nivel secundario, en particular la enseñanza de los números reales.

PATRICIA DUARTE LEZCANO es profesora de Matemática de nivel secundario egresada del Instituto de Formación Docente N° 41. Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica (UNIPE). Se desempeña como docente en escuelas secundarias del conurbano de Buenos Aires desde el 2010 y en institutos de formación docente desde el 2013. Se especializó específicamente en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Es coautora del libro *Matemática 2/3* (2018). Actualmente cursa la Licenciatura en Ciencias de Datos en la Universidad Guillermo Brown.

CECILIA LAMELA es profesora de Educación Media y Superior en Enseñanza de la Matemática (UBA). Cursó la Maestría en Pedagogías Críticas y

Problemáticas Socioeducativas en la misma universidad. Se desempeña como profesora adjunta en la UNIPE, donde coordina el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Participó en varios proyectos de investigación en enseñanza de la matemática y actualmente forma parte de un proyecto de investigación en torno a la construcción de teoría en el aula en el campo de los números reales. Es coautora de libros de texto y de documentos curriculares.

FEDERICO MACIEJOWSKI es profesor de Educación Superior en Matemática (Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”) y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE). Se desempeña como docente en escuelas secundarias de la Provincia de Buenos Aires y en la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Secundaria de la UNIPE.

SABRINA MAFFEI es profesora de primer y segundo ciclo de E.G.B. (I.S.F.D. Nº 102) y profesora de tercer ciclo de la E.G.B. y de la educación polimodal en Matemática (I.S.F.D. Nº 41). Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesora en el nivel secundario y terciario en la E.S. Nº 6 y E.S. Nº 69, y en los Institutos de Formación Docente Nº 41 y Nº 103. Desde el 2018, dentro de la Dirección de Formación Permanente (DFDP) de la Provincia de Buenos Aires, forma parte del Equipo Técnico Regional como formadora del nivel primario en matemática.

CINTIA MENDOZA es profesora de Matemática de nivel secundario, egresada del Instituto Superior de Formación Docente Nº 41 de Adrogué. Realizó la Especialización en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica (UNIPE), sede Adrogué. Se desempeña como docente de educación secundaria en escuelas de Claypole y Almirante Brown. Ha trabajado como coordinadora de taller en la Jornada de Presentación y Actualización de IMESA-Matemática, realizada en la Ciudad de Buenos Aires, y en la Jornada de Lanzamiento de la Línea de Acción "Fortalecimiento de la Enseñanza en la Educación Secundaria: Matemática" , realizada en la ciudad de Paraná, Entre Ríos, ambas organizadas por el Ministerio de Educación de la Nación.

RODOLFO MURÚA es profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA) y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE y en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). También forma parte del equipo de secundaria del Ministerio de Educación Nacional. Sus investigaciones se focalizan en la enseñanza de la geometría y las funciones mediante la utilización del programa GeoGebra.

CARMEN SESSA integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. De formación inicial en Matemática, se especializó en didáctica de la Matemática desde 1991 y trabaja en formación e investigación en el área. Es profesora titular en la UNIPE, donde actualmente dirige la carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. También es docente en la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

SOBRE LAS COMPILADORAS

MÓNICA AGRASAR es licenciada en Matemática y profesora para la enseñanza primaria. Se ha especializado en enseñanza de la matemática y se desempeña como docente formadora de maestros y asesora en currículo, desarrollo curricular y formación docente. Ha dictado numerosos cursos y asesorado a instituciones educativas y organizaciones de distintos países. Participó del desarrollo de programas de alcance nacional referidos a la producción de lineamientos curriculares y procesos de mejora de la enseñanza de la matemática para los diferentes ciclos y niveles de la educación obligatoria.

Es autora de publicaciones para alumnos y docentes, así como de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

GRACIELA CHEMELLO es maestra normal nacional, profesora de Matemática, Física y Cosmografía y magíster en Didáctica por la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA. Se ha ocupado de la formación inicial de maestros y profesores en enseñanza de la matemática y ha dictado numerosos cursos y seminarios en instituciones educativas nacionales y de otros países. Integró el equipo de áreas curriculares del Ministerio de Educación la Nación, donde ha participado del desarrollo de programas de alcance nacional referidos a la producción de lineamientos curriculares, documentos de desarrollo curricular y formación de formadores para los diferentes ciclos y niveles de la educación obligatoria. Realizó asesoramiento didáctico a equipos de otros países en la producción de materiales educativos y en formación docente. Es autora de publicaciones para alumnos y docentes, así como de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Entre docentes I. Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria es el primero de dos volúmenes con experiencias de trabajo y escritura compartida entre profesores formadores y profesores estudiantes de la carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE. A lo largo de cuatro capítulos, se desarrollan experiencias de trabajo matemático vinculadas a algunos de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP). En los diferentes apartados se abordan las ideas de generalización y del uso de la letra como variable en expresiones numéricas y algebraicas; la construcción de la definición de alturas de un triángulo; el análisis de la probabilidad de distintos sucesos y la interpretación y producción de gráficos y parámetros estadísticos; los significados de los números racionales y sus diversas formas de representación, así como su diferenciación respecto de los números naturales. Cada capítulo incluye, apoyándose en una serie de consignas para los alumnos, comentarios acerca de las intenciones didácticas detrás de las actividades, alternativas para la gestión docente y registros de lo que ocurrió cuando las propuestas se implementaron en un aula.

ISBN 978-987-3805-61-5

editorial.unipe.edu.ar