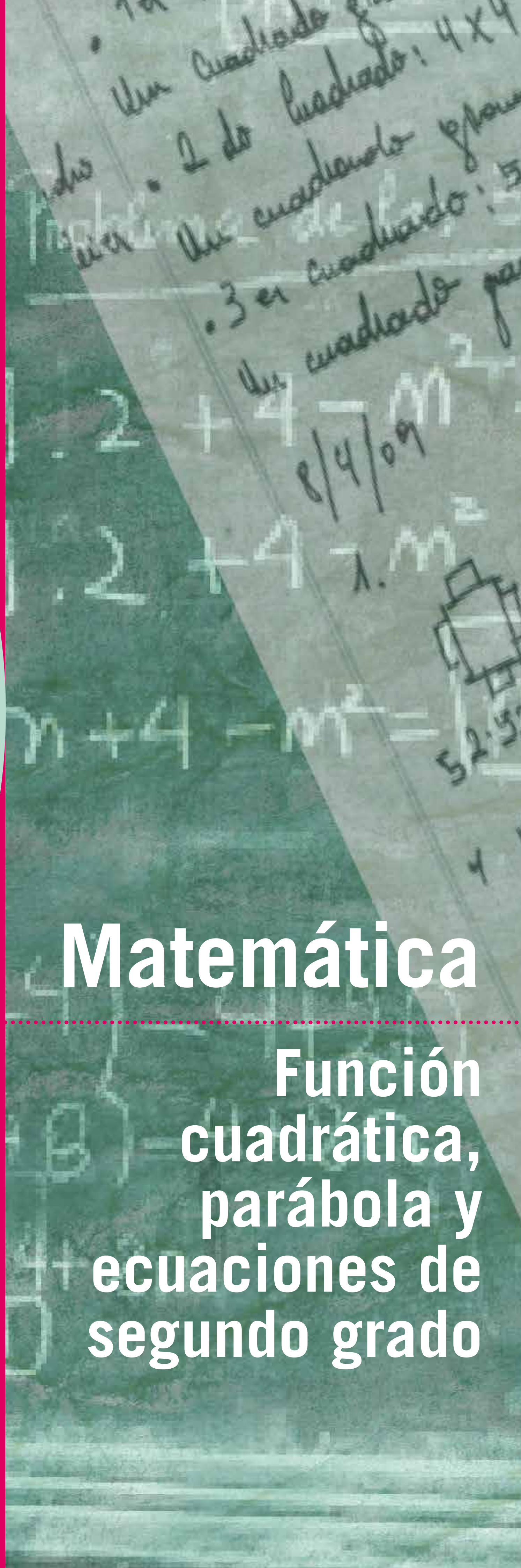
Aportes para la enseñanza. **Nivel Secundario**



Matemática

Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario

Matemática

Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado / Alejandra Illuzi y Carmen Sessa ; dirigido por Gabriela Azar. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2014.
E-Book.

ISBN 978-987-549-562-3

1. Formación Docente. I. Sessa, Carmen II. Azar, Gabriela, dir. III. Título
CDD 371.1

ISBN: 978-987-549-562-3

Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa
Gerencia Operativa de Currículum
Av. Paseo Colón 275, 14º piso
C1063ACC - Buenos Aires
Teléfono/Fax: 4340-8032/8030
Correo electrónico: curricula@bue.edu.ar

Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario
MATEMÁTICA
Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado

Gerencia Operativa de Currículum
Gabriela Azar

Asistentes de la Gerencia Operativa de Currículum
Viviana Dalla Zorza, Gerardo Di Pancrazio. Juan Ignacio Fernández, Mariela Gallo, Martina Valentini

Elaboración del material

Coordinación pedagógica
Marta García Costoya

Especialistas
Alejandra Illuzzi
Carmen Sessa
Cecilia Lamela
Claudia Kerlakian
Diana Giuliani
Enrique Di Rico
Erica Guzmán Yañez
Gema Fioriti
Juan Pablo Luna
Laura Ghiglione
Lila Szapiro
Magdalena La Montagna
María Laura Rodríguez
Marina Andrés
María Teresa Coronel
Mercedes Marchesin
Rosa Cicala
Silvia Segal
Valeria Borsani

Edición a cargo de la Gerencia Operativa de Currículum

Coordinación editorial: María Laura Cianciolo
Edición: Gabriela Berajá, Marta Lacour y Sebastián Vargas
Diseño gráfico: Patricia Leguizamón, Alejandra Mosconi y Patricia Peralta

Presentación

El Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires desarrolla un conjunto de acciones dirigidas a promover que el conocimiento llegue a todos por igual –favoreciendo la verdadera inclusión educativa–, a mejorar la oferta de enseñanza y a propiciar aprendizajes que les permitan a los estudiantes ejercer sus derechos ciudadanos y continuar con estudios superiores si así lo desean.

En este marco, la Dirección General de Educación de Gestión Estatal (a través de las Direcciones de Educación Media, de Educación Técnica, de Educación Artística y de Educación del Adulto y del Adolescente así como la Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa (a través de la Gerencia Operativa de Currículum, y de la Gerencia Operativa de Evaluación Educativa) promueven el fortalecimiento y el mejoramiento de la experiencia educativa que ofrecen los establecimientos de ese nivel.

Los materiales curriculares que a continuación se presentan, contribuyen a configurar un contexto propicio para la profundización de la reflexión y el fortalecimiento de la mirada pedagógica sobre los procesos de enseñanza en la escuela secundaria.

Esta serie está concebida como una colección de recursos para la enseñanza; pretende atender al enfoque didáctico, favorecer las prácticas reflexivas de los profesores y colaborar con la lógica de organización de recursos por parte de la escuela, el departamento, la asignatura. Cada título que integra la serie posee una identidad temática. Es decir, los recursos que agrupa cada material remiten a algún contenido especificado en los trayectos de contenidos formulados para el Nivel Secundario. Tal es el caso, por ejemplo, de "Las relaciones coloniales en América" en Historia, o "Números racionales" en Matemática. La elección del tema se ha realizado considerando uno o más de los siguientes criterios: se aborda aquello sobre lo que hay mayor dificultad para enseñar y/o mayores obstáculos para que los alumnos aprendan, aquello sobre lo que no hay suficientes recursos, o aquello sobre lo que lo existente no está tratado según el adecuado enfoque. Cada material tiene la impronta de la asignatura, y, según el caso, incluye diversos recursos: selecciones de textos para los alumnos, artículos periodísticos, mapas, imágenes (pinturas, grabados, fotografías, láminas), selecciones de videos, selecciones musicales, gráficos, propuestas de actividades.

Los siguientes títulos conforman la serie Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*:

Biología. Darwin y la evolución. Se plantean sugerencias y orientaciones para trabajar en el aula y que los alumnos conozcan los aportes desarrollados por Darwin para la construcción de la biología y la ciencia en general, teniendo en cuenta que el enfoque evolucionista es un contenido presente en el currículum de las escuelas de la Ciudad.

* Actualmente, Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario.

Biología. Procesos relacionados con la vida y su origen: la célula y las estructuras asociadas a sus funciones. Aborda contenidos del programa de 2º año: el origen de la vida, la nutrición en el nivel celular, la célula como sistema abierto y la diversidad biológica: nutrición y multicelularidad. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados partiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y actividades exploratorias y experimentales.

Biología. Los intercambios de materia y de energía en los seres vivos. Aborda contenidos del programa de 1º año: noción de modelo, concepto de sistema, estructura de la materia, estudio del modelo corpuscular, transformaciones químicas, composición de los seres vivos y de los alimentos, los seres vivos como sistemas abiertos, la obtención de materia y de energía, transformaciones de la materia y la energía en los ecosistemas. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados partiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y disco compacto con secuencias didácticas.

Geografía. Relaciones entre Estados: el caso de las plantas de celulosa en Fray Bentos. Atiende al programa de 2º año. Propone el trabajo a partir del caso de las pasteras que posibilita la articulación de contenidos de diversos bloques: "Los Estados y los territorios" (los conflictos entre los Estados, las relaciones y articulaciones entre los niveles nacional, provincial y municipal a partir de las decisiones y las acciones tomadas por sus gobiernos), del bloque: "Los cambios en la producción industrial y las transformaciones territoriales" (la industria, la organización de la producción y los territorios; los factores de localización industrial, los espacios industriales, los cambios en la división territorial del trabajo, etcétera). Para el desarrollo del tema se presentan artículos periodísticos, mapas, imágenes, cuadros estadísticos y un video.

Geografía. Problemáticas ambientales a diferentes escalas. Atiende al bloque de contenidos "La diversidad ambiental en el mundo" del programa de 1º año. Para el desarrollo del tema se presenta una selección de artículos periodísticos, mapas y video.

Historia. Los mundos del medioevo. Esta propuesta tiende a incrementar y diversificar los materiales disponibles para el desarrollo del programa de 1º año, en particular para el tratamiento del tercer bloque de contenidos: "Los mundos durante el medioevo". Se trata de un conjunto de recursos –documentos escritos, imágenes, interpretaciones de historiadores y mapas– que el docente podrá seleccionar y decidir el tipo de actividad por desarrollar a partir de las posibilidades que los mismos brinden.

Historia. Las relaciones coloniales en América. Para desarrollar el bloque de contenidos del programa de 2º año, se presentan fuentes testimoniales como la interpretación de historiadores, grabados, gráficos, documentos históricos, datos de población, normas y testimonios de la época.

Lengua y Literatura. El diario de Ana Frank. Se proponen situaciones de lectura y escritura para acompañar la lectura del *Diario* así como posibles recorridos para que los jóvenes lectores puedan abordar el texto por su cuenta. También se recomiendan sitios destacados en Internet, películas, series y documentales relacionados con la vida y la época de Ana Frank.

Lengua y Literatura. La diversidad lingüística. Este material se propone crear condiciones que favorezcan la reflexión sobre las relaciones entre lenguaje, sociedad y cultura, destacando la dimensión interaccional del lenguaje y su incidencia en la formación de la conciencia crítica del sujeto social. Aborda como eje temático la diversidad lingüística y su proyección en la literatura, y diversos contenidos pertenecientes a las prácticas de lectura, escritura y oralidad relativas al discurso literario, presentes en los programas de 1° y 2° año.

Matemática. Geometría. Enseñanza de la geometría, con referencia a temas de todas las unidades de los programas de 1° y 2° año. El trabajo en geometría adquiere características propias que lo diferencian del álgebra y la aritmética, y plantea a los docentes cuestiones específicas por tener en cuenta para involucrar a los alumnos en el aprendizaje. Se propone el trabajo con algunos de los teoremas clásicos de la geometría plana y en la construcción de figuras.

Matemática. Números racionales. El documento presenta características diferentes de los anteriores. En relación con su producción, es el resultado del trabajo conjunto de un equipo de profesores de la escuela secundaria de la Ciudad y especialistas de la Gerencia Operativa de Currículum. Respecto de la propuesta didáctica, aborda el bloque Números, unidad Números racionales. Desde el trabajo matemático, promueve la identificación de "las dificultades en el aprendizaje", para profundizar la construcción de conceptos como: proporcionalidad y orden en Q+; fracciones como medida y orden en Q+; orden y densidad en Q; producto en Q+; conjeturas y validación de propiedades en Q.

Música. Taller de audición, creación e interpretación. El material presenta recursos para atender los tres ejes de los programas de 1° y 2° año (producción, apreciación, contextualización), con propuestas de actividades para el aula relacionadas con la audición, la creación grupal y la interpretación vocal. Incluye dos discos compactos con pistas de audio, partituras y fichas de trabajo.

Plástica. El color, la textura y la forma en la indumentaria del habitante de la Ciudad. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje la indumentaria de los habitantes. El material se estructura a partir de un video, que el docente puede utilizar para promover el análisis y la reflexión de los alumnos sobre el tema. Está acompañado por propuestas pedagógicas.

Teatro. El espacio teatral. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje el concepto de espacio. Incluye un video que permite la apreciación de diversos tipos de escenarios, sus orígenes, su relación con el tipo de propuesta teatral.

ÍNDICE

Introducción

Este material se presenta como un aporte a la compleja tarea que a diario desarrollan los profesores de Matemática al pensar y gestar su clase.

Se inscribe dentro de la serie *Aportes para la enseñanza - Nivel Secundario*; esta serie, en el área de Matemática, cuenta ya con un documento sobre números racionales y otro referido a la enseñanza de geometría.[1] Está en proceso de edición, además, un documento de esta misma serie sobre función exponencial.

Como los anteriores, este material es producto del trabajo conjunto entre un grupo de profesores de escuelas medias y especialistas en Didáctica de la Matemática.[2] A medida que se fueron elaborando las actividades, los docentes del grupo las implementaron en sus aulas y la reflexión colectiva en torno a lo sucedido permitió ajustar la propuesta inicial. Las discusiones y reflexiones en el grupo permitieron dar forma a la propuesta que aquí presentamos. La tarea se desarrolló durante los años 2008 y 2009. En diciembre de este último año finalizó la redacción de este documento.

Reafirmamos aquí nuestro propósito de involucrar a los estudiantes de la escuela secundaria en una verdadera actividad de producción de conocimiento: "Esto hace necesario crear un ambiente en la clase que aliente a los alumnos a ensayar, producir diferentes soluciones y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos. Ensayos, resoluciones e ideas que son materia prima a partir de la cual el docente organiza las interacciones en la clase con el objeto de discutir sobre la validez, precisión, claridad, generalidad, alcance, etcétera, de lo que se produjo".[3]

Para elaborar esta propuesta para la enseñanza de "lo cuadrático", tuvimos presente permanentemente la realidad de las aulas con su diversidad, sus docentes y sus alumnos.

La pregunta que nos planteamos originalmente fue: *¿cuál es la potencia del estudio de este tema en la escuela, si se pone en el centro la formación matemática del alumno?*

Y a partir de esta pregunta, fueron apareciendo otras:

- ¿Qué tipo de situaciones se modelizan con funciones cuadráticas?
- ¿Cuáles son las potencialidades y al mismo tiempo las dificultades del trabajo algebraico que aporta este tema?
- ¿En qué medida los conocimientos anteriores de los alumnos influyen en la construcción de "lo cuadrático"? ¿Qué conocimientos se requieren como insumos para dicha construcción?

---

1 Disponibles en www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/serie_aportes.php.
2 Los profesores participantes trabajan en escuelas públicas o privadas de la Ciudad de Buenos Aires y el gran Buenos Aires, y los especialistas pertenecen a la Gerencia Operativa de Currículum del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires y al equipo del proyecto UBACyT, X 207 de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires.
3 *Geometría*. Dirección de Currícula y Enseñanza, Ministerio de Educación GCBA, 2007.

- ¿Dónde ubicar este tema en relación con el de polinomios: antes, o después?

Respecto de la "fórmula resolvente", nuestra experiencia nos muestra que los alumnos la memorizan y a posteriori la utilizan de manera mecánica, aun en casos en los que no es necesaria. Al respecto, nos preguntamos:

- ¿Podrán llegar a construir esa fórmula con sentido, a partir de un recorrido? ¿Cuál es la potencia de pensar las ecuaciones de segundo grado a partir de la función cuadrática?

Presentamos una síntesis de las ideas centrales que fuimos elaborando en torno a estas preguntas y que se plasmaron en una propuesta para la enseñanza de función cuadrática, la parábola y las ecuaciones de segundo grado. El tratamiento que proponemos para estos temas involucra varios aspectos:

- el modelo cuadrático permite abordar el estudio sistemático de un tipo de cremiento no uniforme, que enriquece el trabajo hecho con funciones lineales y es la puerta de entrada al estudio de funciones polinómicas;
- la resolución de distintos problemas asociados con estas funciones dará sentido al trabajo algebraico con las fórmulas de las funciones cuadráticas;
- las diferentes escrituras de la fórmula de una función cuadrática, puestas en relación con las características del gráfico cartesiano, enriquecen el sentido de ambas formas de representación de las funciones;
- el estudio de las ecuaciones de segundo grado a partir de las funciones cuadráticas permite construir un sentido de las ecuaciones que no se agota en la aplicación de una regla para resolverlas.

Organización del documento

En cada capítulo se abordan distintos aspectos de la problemática cuadrática a partir de la formulación y análisis de un conjunto de problemas. En los comentarios que acompañan a cada problema se incluyen referencias explícitas a la experiencia de los docentes del grupo. En particular, incluimos algunas producciones de los alumnos que obtuvimos de diferentes formas: registros y fotos de clase realizados por observadores del grupo, fotocopias de las carpetas y narraciones producidas por los propios profesores sobre lo que pasó en sus clases.

Primer capítulo: **Construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones**
En los *Contenidos para el Nivel Medio* de Matemática[4] se plantea la producción de fórmulas en IN. En el programa de primer año, respecto de esta actividad, se propone:

"Obtener fórmulas para contar los elementos de una colección —trabajo que comienza en primer año— permite poner en evidencia la estructura del algoritmo de cálculo subyacente y, a la vez, esto da sentido a un primer uso de la letra como variable y a un trabajo sobre las escrituras, El álgebra aparece como herramienta para tratar una cierta problemática y,

[4] *Contenidos para el Nivel Medio - Matemática.* Resolución N° 6.942/09; Programas para Primer Año del Nivel Medio, Resolución N° 354/03 y Programas para Segundo Año del Nivel Medio, Resolución N° 1636/04.

al mismo tiempo, las distintas maneras de abordar un mismo problema dan sentido a la discusión sobre las equivalencias de las diferentes expresiones que lo representan."

Las actividades que proponemos en este capítulo presentan colecciones cuya cantidad de elementos en el paso **n** se modeliza con una fórmula cuadrática en IN. La potencia de este tipo de actividades está en la posible diversidad de producciones de los alumnos.

Las distintas escrituras que aparezcan en el aula permiten trabajar sobre la noción de equivalencia de expresiones y sobre las transformaciones algebraicas.

SEGUNDO CAPÍTULO: **Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos**

Los problemas presentados en este capítulo involucran distintas situaciones geométricas. La tarea de los alumnos es estudiar el crecimiento/decrecimiento (cuadrático) de una variable e identificar un gráfico para cada una de las funciones; en principio, sin la escritura de una fórmula. Esto involucra diferenciarlo de un crecimiento lineal y comenzar a considerar fenómenos que comprenden la existencia de máximos o de mínimos.

TERCER CAPÍTULO: **El estudio de la función cuadrática a partir de la expresión canónica de su fórmula**

Se plantea en este capítulo un trabajo de lectura de información a partir de la expresión, canónica de la fórmula de una función cuadrática. Esta lectura permite producir información acerca de la situación que la función modeliza, como así también poner en relación la fórmula de la función con las características de la parábola que la representa gráficamente. Incluimos también la actividad inversa de producción de una fórmula canónica para una función que cumpla determinadas condiciones.

Por otro lado, se propone un trabajo de cálculo de puntos simétricos, de preimágenes, de raíces de la función, que es posible a partir de la expresión canónica sin necesidad de "una fórmula resolvente".

CUARTO CAPÍTULO: **Estudio de la función cuadrática a partir de distintas escrituras de su fórmula**

En este capítulo se trabaja con distintas expresiones algebraicas de una función cuadrática. Las primeras actividades apuntan a la idea de que cada una de ellas porta una información particular sobre la parábola. La búsqueda de máximos y mínimos se trabaja, en un primer momento, para problemas en contexto y, luego, para fórmulas descontextualizadas y se apoya en la identificación de un par de puntos simétricos de la parábola. La posibilidad de encontrar el vértice de la parábola a partir de una fórmula cualquiera permite transformarla en su forma canónica.

Finalmente, se plantean problemas que requieren hallar los ceros de la función, para lo cual será necesario encontrar la forma canónica de la fórmula.

Como resultado de este recorrido, los alumnos habrían elaborado un procedimiento que, a partir de una fórmula desarrollada, permite hallar los ceros de la función. Al

final del capítulo, a partir de este procedimiento general, se encuentra una fórmula –la conocida fórmula resolvente– para calcular las raíces de la función conociendo los coeficientes de la expresión desarrollada.
Con esta propuesta nos propusimos arribar al concepto de ecuación por la vía de las funciones, considerando las soluciones de la ecuación como los valores de la variable (o de las variables) que cumplen la igualdad $f(x) = 0$.[5]

Pensar la ecuación como "una condición que se impone sobre el dominio de una función" pone en juego la de idea de variable, por sobre una idea más estática de incógnita.

Los docentes que participaron en la elaboración de esta propuesta han expresado su satisfacción frente a la producción de los alumnos y al clima de trabajo que se instalaba en el aula. Al final del documento incluimos un anexo 2 con relatos de ellos, que reflejan lo vivido en las clases.

Al escribir este documento, vislumbrábamos la incorporación de las computadoras al trabajo cotidiano en las aulas en un futuro no tan inmediato. Por esta razón elaboramos nuestra propuesta para ser desarrollada sin ese recurso e incorporamos como anexo 3 actividades que incorporan la computadora como herramienta de trabajo para el estudio de la función cuadrática.

Esperamos que este documento colabore con la tarea de todos los docentes que disfrutan enseñar matemática, y ayude a que sus alumnos se involucren más en la tarea que se les propone.

[5] En los programas de Matemática de primero y de segundo año se encuentra un planteo semejante para las ecuaciones lineales. Dirección de Currícula y Enseñanza, Programa de Matemática, Primer año, pp. 25 y 26. Disponible en www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media.php?menu_id=20709

Capítulo 1

Construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones

En este capítulo, proponemos situaciones que implican el conteo de ciertos elementos de una figura cuyo "tamaño" varía. Uno de los objetivos es producir una fórmula que cuente la cantidad de elementos de la figura en función de su "tamaño". Este tipo de actividades se propone como una de las vías de entrada al álgebra, al inicio de la escuela media. Los problemas que presentamos en este documento requieren la producción de fórmulas cuadráticas para contar las colecciones.

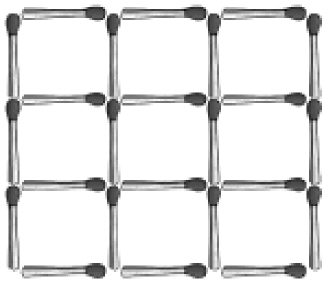
Se trata de plantear a los alumnos actividades en las que la escritura x^2 tenga sentido y que, al mismo tiempo, generen la necesidad de un trabajo algebraico sobre las expresiones producidas. Apoyarse sobre el contexto de las figuras que aparecen en cada problema permitirá discutir sobre la equivalencia de las distintas expresiones que representan el conteo. De este modo, algunas reglas clásicas de transformaciones algebraicas (factor común y distributiva, cuadrado de un binomio, etcétera) toman sentido en la discusión sobre las equivalencias.[6]

Los problemas que presentamos fueron llevados al aula por docentes del grupo, situación que permitió recoger abundante información sobre la gestión de la clase y las producciones de los alumnos en escuelas de diferentes características.

Problema 1

El cálculo de los fósforos

Se arma con fósforos un cuadrado cuadriculado, de la siguiente forma:



Este cuadrado tiene 3 fósforos de lado.

a) ¿Cuántos fósforos se necesitan para armar esta figura?
b) ¿Cuántos fósforos se necesitarán para hacer un cuadrado que tenga 56 fósforos de lado?
c) Encontrá una fórmula que permitan calcular la cantidad de fósforos que se necesitan para armar un cuadrado de n fósforos de lado.

[6] En el programa de primer año se propone trabajar problemas de este tipo con modelos lineales. Si los alumnos no los han hecho antes, sería necesario comenzar con alguno de aquellos problemas.

Comentarios

El trabajo de los alumnos puede organizarse en etapas:

- trabajo individual sobre las consignas *a* y *b*;
- trabajo en pequeños grupos para discutir y unificar una respuesta con su explicación para la pregunta *b*;
- discusión colectiva sobre las distinta maneras de contar para un cuadrado de 56 fósforos por lado;
- trabajo sobre la consigna *c* en los grupos;
- discusión colectiva sobre las fórmulas producidas y las equivalencias.

Se anticipan algunas formas de organizar el conteo de los fósforos:

- Considerar la cantidad de fósforos del perímetro del cuadrado, más los fósforos interiores; el perímetro es 4 veces la cantidad de fósforos por lado. En el interior se forman **(n – 1)** columnas y **(n – 1)** filas, todas con el mismo número **n** de fósforos, el lado del cuadrado.
  La expresión resulta: **4n + (n – 1)n + (n – 1)n**; ó: **4n + 2(n – 1)n**
- Calcular el total de columnas **(n + 1)** y la cantidad de fósforos **n** de cada columna duplicarlo, porque coincide con "lo que pasa" en las filas.
  Así se obtiene la expresión: **2(n + 1)n**

Estas diferentes maneras de contar habrán aparecido en el cálculo del cuadrado con 56 fósforos por lado. Quizás sea necesario que el docente solicite el "método de cálculo" que utilizaron, más allá del resultado que hallaron. La escritura de esos cálculos (vea a continuación algunas posibilidades) puede contribuir a la producción de la fórmula general.

$$4 \cdot 56 + (56 - 1) \cdot 56 + (56 - 1) \cdot 56$$
$$4 \cdot 56 + 2 \cdot (56 - 1) \cdot 56$$
$$2 \cdot (56 + 1) \cdot 56$$

Una vez producidas las fórmulas, las mismas *tienen* que ser equivalentes, porque cuentan lo mismo. Esa equivalencia puede ser revalidada transformando las escrituras (en ese caso, se necesita utilizar la propiedad distributiva).

Episodios en el aula

Comentamos el trabajo en un aula de tercer año, donde se realizó este problema a partir del trabajo con la fórmula.

La docente organizó a los alumnos en grupos. La mayoría contó y produjo la fórmula **(n + 1) · n · 2**, excepto un grupo, que contó los fósforos del perímetro más los que estaban adentro y produjo una fórmula errónea: **4n + n · (n – 2) · 2**, porque consideró que adentro del cuadrado hay **n – 2** columnas de **n** fósforos. Una alumna dijo: "Hay algo que está mal con esta fórmula, porque con la primera se llega a $\mathbf{2n^2 + 2n}$; en cambio, con esta se llega a $\mathbf{2n^2}$."

Si bien los alumnos aceptaron la objeción, no pudieron encontrar el error en el conteo.

En otro grupo, un alumno que había trabajado individualmente produjo la siguiente expresión: $\mathbf{2n^2 + 2n}$, y explicó cómo la obtuvo: consideró que hay $\mathbf{n^2}$ cuadraditos (no fósforos) y por cada cuadradito contó los dos fósforos que forman los lados de un ángulo recto (una L); esto da $\mathbf{2n^2}$. Con esta expresión se contaron todos los fósforos, excepto los que forman dos de los lados del cuadrado grande. Estos suman $\mathbf{2n}$. Se obtiene entonces $\mathbf{2n^2 + 2n}$. La profesora le propuso que comparta su solución con sus compañeros de grupo. Estos, aunque no lograron entender demasiado la manera de contar del compañero, dijeron: "No le entendimos mucho, pero es la misma fórmula a la que llegamos haciendo la distributiva (ellos habían producido la fórmula $\mathbf{(n + 1) \cdot n \cdot 2}$), así que debe estar bien". En este caso, el trabajo algebraico de algunos estudiantes sirvió para validar el trabajo de otros.

La puesta en común, donde se volvieron a explicar las diferentes maneras de contar, fue el momento en que los chicos comprendieron este procedimiento y el error que había aparecido en el otro cálculo.

Queremos destacar los efectos que producen las interacciones entre alumnos y con la docente en esta puesta en común:

- se comparten producciones diferentes;
- se hace explícito que, como las fórmulas cuentan la misma cantidad de fósforos, tienen que ser equivalentes;
- no es la docente quien corrige un error, sino que es fruto de las interacciones entre los alumnos;
- se comprende una producción ajena que no se había podido entender en el trabajo en grupo.

Problema 2

El cálculo de las diagonales en un polígono de n lados

a) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 4 lados? ¿Y uno de 5 lados? ¿Y uno de 6 lados?
b) Cuenten ahora las diagonales de un polígono de 7 lados (intenten hacerlo sin dibujarlas todas).
c) ¿Cuántas serán las diagonales de un polígono de 20 lados? ¿Y las de uno de *n* lados?

Comentarios

La organización de la clase podría ser similar a la del problema anterior. Pensamos algunas maneras de organizar el cálculo de la cantidad de diagonales; por ejemplo:

- Cada vértice "hace diagonal" con todos los que no son sus vecinos. Esto significa que cada vértice forma diagonal con **n – 3** vértices. Como hay **n** vértices, tendríamos la fórmula **n(n – 3)**. Pero dos puntos determinan una única diagonal, y con esa fórmula nosotros la estaríamos contando dos veces; por lo tanto, la fórmula quedaría: $\frac{1}{2}$ **n(n – 3)**.

Cada uno de los **n** vértices se puede asociar con los otros **n – 1** vértices; resultan entonces $\frac{1}{2}$ **n(n – 1)** segmentos diferentes. Pero dos vértices contiguos determinan un lado, no una diagonal. Por eso hay que restar la cantidad **n** de lados. La fórmula que se obtiene es:

$$\frac{1}{2}\mathbf{n(n-1)-n}$$

Como vimos en los ejemplos anteriores, es posible establecer un juego de validación apoyado tanto en el contexto del problema como en la operatoria algebraica, que permite afirmar que ambas expresiones son equivalentes.

La exploración hecha para casos particulares y la producción de una fórmula permiten extender el trabajo en otras direcciones. Por ejemplo, pedir la construcción de una tabla que relacione la cantidad de lados del polígono con la cantidad de diagonales que se obtiene:

Cantidad de lados del polígono	4	5	6	7	8	9
Cantidad de diagonales	2	5	9	14	20	27

+ 3 + 4 + 5

Hay una regularidad "observable" en la fila de abajo: la diferencia entre un número y el siguiente va aumentando en 1. Con mayor precisión, se puede señalar que:

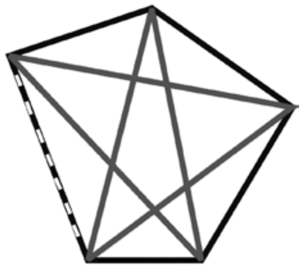
- la cantidad de diagonales de un polígono de 4 lados + 3 es igual a la cantidad de diagonales de un polígono de 5 lados;
- la cantidad de diagonales de un polígono de 5 lados + 4 es igual a la cantidad de diagonales de un polígono de 6 lados.

Esto permitiría formular la conjetura general: "Cantidad de diagonales de un polígono de **n** lados" + (**n** – 1) = "Cantidad de diagonales de un polígono de **n** + 1 lados".

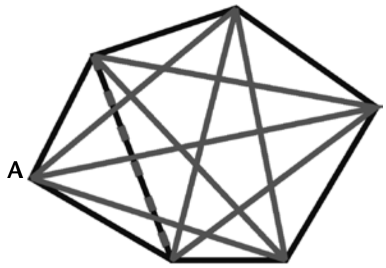
¿En qué podrían apoyarse los alumnos para elaborar una prueba de la conjetura que se acaba de enunciar?

Supongamos un polígono de n lados al cual se le agregó un vértice A para convertirlo en uno de **n** + 1 lados.

Todas las diagonales del polígono de **n** lados también serán diagonales de este nuevo polígono de **n** + 1 lados; y se agregan ahora, además, las que tienen por un extremo el vértice A y por otro extremo a cualquiera de los **n** – 2 vértices con los que A puede "formar diagonal". Pero además, al "interponer" el vértice A entre otros dos, un "viejo" lado se transforma en diagonal, con lo cual, en total se agregan **n** – 1 diagonales.



El lado marcado pasa a ser diagonal al agregar un vértice entre sus extremos.



Se agregan el viejo lado y las tres diagonales que pasan por A.

El análisis sobre la figura explica entonces la regularidad numérica que se "observa" en la tabla.

Resta aún por hacer un tratamiento en el marco algebraico: según lo que se acaba de validar, se le suma **n – 1**, se obtiene la cantidad de diagonales del polígono de **n** + **1** lados.
Ahora bien, si se aplica directamente la fórmula que se obtuvo al principio para un polígono de **n** + **1** lados, se obtiene $\frac{1}{2}(\mathbf{n+1})(\mathbf{n+1-3}) = \frac{1}{2}(\mathbf{n+1})(\mathbf{n-2})$

Sabemos que esta expresión tiene que ser equivalente a $\frac{1}{2}(\mathbf{n-3}) + \mathbf{n-1}$.

Queda para los alumnos la tarea de revalidar, por medio de un cálculo algebraico, esta equivalencia. Nuevamente, las operaciones sobre las expresiones algebraicas encuentran un fin (validar una igualdad que se sabe que tiene que ser cierta) y, al mismo tiempo, un contexto que permite a los alumnos controlarlas (si no obtienen una igualdad de expresiones, saben que hicieron algo mal). Esta finalidad y esta posibilidad de control aportan a la construcción de sentido de estos aspectos más técnicos del trabajo algebraico.

Variantes del problema 2
Se plantean a continuación problemas análogos en otros contextos:

- ¿Si *n* personas asisten a una reunión y todas se dan la mano, ¿cuántos apretones de mano hubo?
- Se arma un campeonato de vóley con *n* equipos, y se quiere que jueguen todos contra todos dos veces (es decir, partido y revancha). ¿Cuántos partidos habrá en el campeonato?

Puede pensarse el problema de los apretones de manos de distintas maneras:

- de forma similar al problema 2, cada una de las **n** personas puede darle la mano a las otras n – 1 personas, resultando entonces el número **n (n – 1)**; pero de esta manera se estaría contando cada apretón dos veces; por lo tanto, la fórmula final sería $\frac{\mathbf{n - (n - 1)}}{\mathbf{2}}$.
- una persona le puede dar la mano a las **n – 1** personas restantes; para la siguiente persona, restan **n – 2** asistentes a quienes darle la mano, y así sucesivamente; se forma así la expresión: **(n – 1) + (n – 2) + … + 1**, que resulta la suma de los primeros **n – 1** números naturales.

Si este último problema ya hubiera estado resuelto, se sabe que la fórmula resultante es $\frac{\mathbf{n - (n - 1)}}{\mathbf{2}}$. En caso contrario, el problema de los apretones de manos permitiría arribar a dicha fórmula.

Si pensamos que todos se dan la mano con todos, obtenemos $\mathbf{n^2}$ apretones de manos; a esto hay que descontar los **n** casos de una persona consigo misma (nadie se puede "autoestrechar" la mano), y luego dividir por 2, ya que así evitamos contar dos veces el único apretón de manos entre un par cualquiera de personas; de este modo, resulta la fórmula $\frac{\mathbf{n^2 - n}}{\mathbf{2}}$.

En cuanto al problema del torneo de vóley, para contar la cantidad de partidos puede pensarse en una grilla rectangular, donde filas y columnas corresponden a la totalidad de los equipos. A los $\mathbf{n^2}$ casilleros hay que multiplicarlos por 2 (porque cada par de equipos se enfrentará 2 veces, en el torneo) y restarle los casilleros que corresponden al cruce de un equipo consigo mismo (**n**).

Se puede relacionar estos dos problemas con el anterior, y aprovechar el trabajo ya hecho para resolver las nuevas situaciones. La diferencia entre las tres situaciones planteadas se refleja en la producción de tres fórmulas diferentes. Estudiar estas relaciones entre variaciones del problema y variaciones de la fórmula es parte del trabajo necesario para lograr dominar las tareas inherentes a la modelización, y aporta a la construcción de sentido del lenguaje algebraico.

Nos interesa, en este momento, hacer una reflexión acerca de una cierta manera de plantear los ejercicios de producción de fórmulas que suele encontrarse en algunos textos. Se trata de problemas donde se "muestran" dos o tres términos de una secuencia y se solicita a los alumnos que la continúen y, eventualmente, den una fórmula para expresar la cantidad de elementos del lugar **n**, como si fuera obvia la regularidad o como si hubiera una única manera de completar la secuencia, sin dar ninguna indicación de cómo se construye el término general de la secuencia o cómo se pasa de un lugar al siguiente.

Al proponer esto, se está invitando a los alumnos a dar por válida una ley general a partir de conocer unos cuantos ejemplos de la misma, y sabemos los riesgos de que se arraiguen este tipo de prácticas. Estamos interesados en que los alumnos lleguen a comprender que, en matemática, una generalización que se hace a partir de algunos ejemplos no es más que una conjetura que debe ser luego validada –o eventualmente rechazada– con argumentos que sean válidos más allá de los ejemplos considerados.

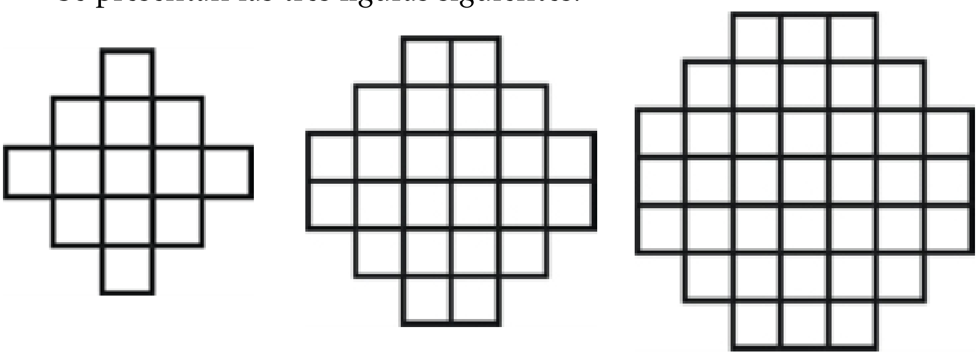
Ahora bien, cuando estamos apuntando a la aparición de una variedad de fórmulas diferentes, con el objeto de tratar en el aula cuestiones de equivalencia, puede ocurrir en algunos casos que al dar nosotros una definición precisa de la secuencia estemos obstruyendo la posibilidad de "verla" de otras maneras y, por lo tanto, de producir fórmulas diferentes.

El problema que presentamos a continuación se ubica en esta problemática. Se parte de la consideración de tres figuras, y se invita a los alumnos a buscar regularidades en ellas. La reflexión colectiva permitirá llegar a acuerdos acerca de qué características permiten realizar la descripción de estas figuras, características a partir de las cuales se define toda una colección. Se trata de un delicado equilibrio entre habilitar en el aula diferentes miradas y, al mismo tiempo, definir la secuencia sin ambigüedad.

Problema 3

El cálculo de la cantidad de cuadraditos

Se presentan las tres figuras siguientes:

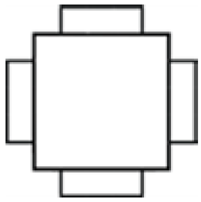


Encuentren en las 3 figuras las cosas que cambian y las que no. ¿Qué tienen en común las tres figuras? ¿Qué características se observan en las tres por igual? ¿Pueden describirlas de alguna forma?

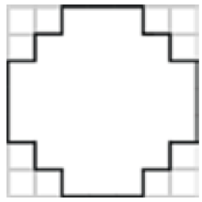
La consigna del problema anterior puede darse en forma oral, al igual que las tareas subsiguientes que se irán proponiendo.

La riqueza de este problema consiste en que hay muchas maneras de mirar regularidades en estas figuras. Por ejemplo:

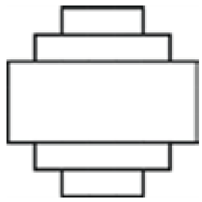
- pueden verse como un cuadrado central con cuatro tiras pegadas en los cuatro laterales;



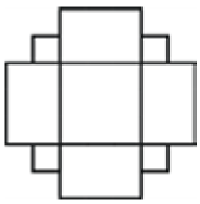
- otra posibilidad es verlas como cuadrados a los cuales se les quita 3 cuadraditos en cada vértice;



- también pueden verse como rectángulos a los que se les agregan dos tiras arriba y abajo;



- otra posibilidad es verlas como dos rectángulos iguales superpuestos, uno vertical y otro horizontal, a los cuales se les agregan 4 cuadraditos; esta misma figura puede considerarse también como un cuadrado central con cuatro rectángulos adosados y cuatro cuadraditos en las esquinas.



La idea es fomentar esta diversidad de miradas en la clase y ponerlas en común, no para unificar un punto de vista, sino para habilitarlas a todas como criterios válidos para pensar en otras figuras.

Una vez establecidas con los alumnos las características que tienen estas tres figuras, se propone pensar en figuras de este tipo pero de mayor tamaño, con mayor cantidad de cuadraditos en la base. Quizás sea necesario acordar que "la base", en estas figuras, son los cuadraditos en los que la figura se "apoya".

Hasta ahora, se trabajó la regularidad de la forma (las tres figuras mantienen la misma forma); ahora se plantea el problema de contar los cuadraditos de figuras de este tipo.

Por ejemplo, se puede proponer:

¿Cuál es la cantidad total de cuadraditos de la figura, cuando en su base hay 5?

En esta nueva tarea, se elige trabajar con 5 cuadraditos de base, ya que de esta manera la figura no resulta la "siguiente" a las tres anteriores y, por otro lado, el número a considerar es aún pequeño: el hecho de que no sea la "siguiente" figura hace necesario poner en juego la relación entre la cantidad de cuadraditos de la base y la forma de cada figura, y no las relaciones entre esa figura y la anterior; el hecho de trabajar con un número pequeño hace que una estrategia posible sea hacer el dibujo de la figura y contar los cuadraditos que la componen.

Con la finalidad de que los alumnos abandonen el conteo de uno en uno, se propone:

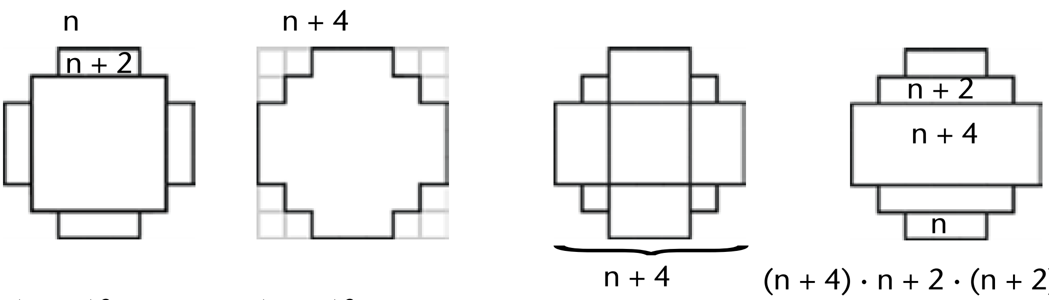
Calcular la cantidad total de cuadraditos cuando la base tiene 50 cuadraditos, detallando los cálculos que hay que realizar.

De este modo, los alumnos irán pensando en formas de contar en relación a cómo ellos vieron y describieron las tres figuras iniciales.

Después de esta tarea, es conveniente discutir colectivamente las distintas maneras de contar. La participación del docente colaborando en la organización de la escritura de los cálculos, y eventualmente en la realización de los esquemas de las figuras, será un soporte para la realización de la siguiente tarea:

*Escribir una fórmula que permita calcular la cantidad total de cuadraditos para una figura de estas características con **n** cuadraditos de base.*

Se espera que las diferentes maneras de "mirar" las figuras deriven en diferentes maneras de calcular la cantidad de cuadraditos, y en la producción de fórmulas diferentes:



$(n + 2)^2 + 4 \cdot n$ $\quad$ $(n + 4)^2 - 12$ $\quad$ $(n + 4) \cdot n \cdot 2 - n^2 + 4$ $\quad$ $(n + 4) \cdot n + 2 \cdot (n + 2) + 2 \cdot n$

Es importante que el docente remarque que **n** designa la cantidad de cuadraditos de la base; de lo contrario podrían aparecer fórmulas escritas en función de variables diferentes y no comparables, y no sería posible entonces estudiar las equivalencias entre esas fórmulas.

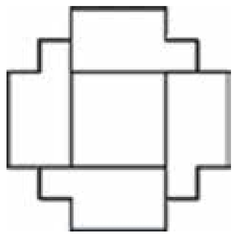
El hecho de que haya muchas fórmulas para contar lo mismo permite trabajar en la clase en torno a la equivalencia de esas expresiones. Los alumnos podrán decir que las fórmulas "Son equivalentes, porque dan lo mismo". Para ellos puede resultar suficiente esa explicación; para que se adentren en el trabajo algebraico, el docente puede solicitarles que prueben si todas las fórmulas se van a poder escribir de la misma manera. El trabajo consistirá, entonces, en transformar todas las fórmulas en una expresión común.

EPISODIOS EN EL AULA[7]

Incluimos aquí el relato de situaciones relevantes para mostrar la riqueza y la potencia de una clase en la que el conocimiento matemático se construye colectivamente. Los episodios intentan comunicar algunas producciones de los alumnos, interacciones entre pares e intervenciones docentes.

Una producción no prevista

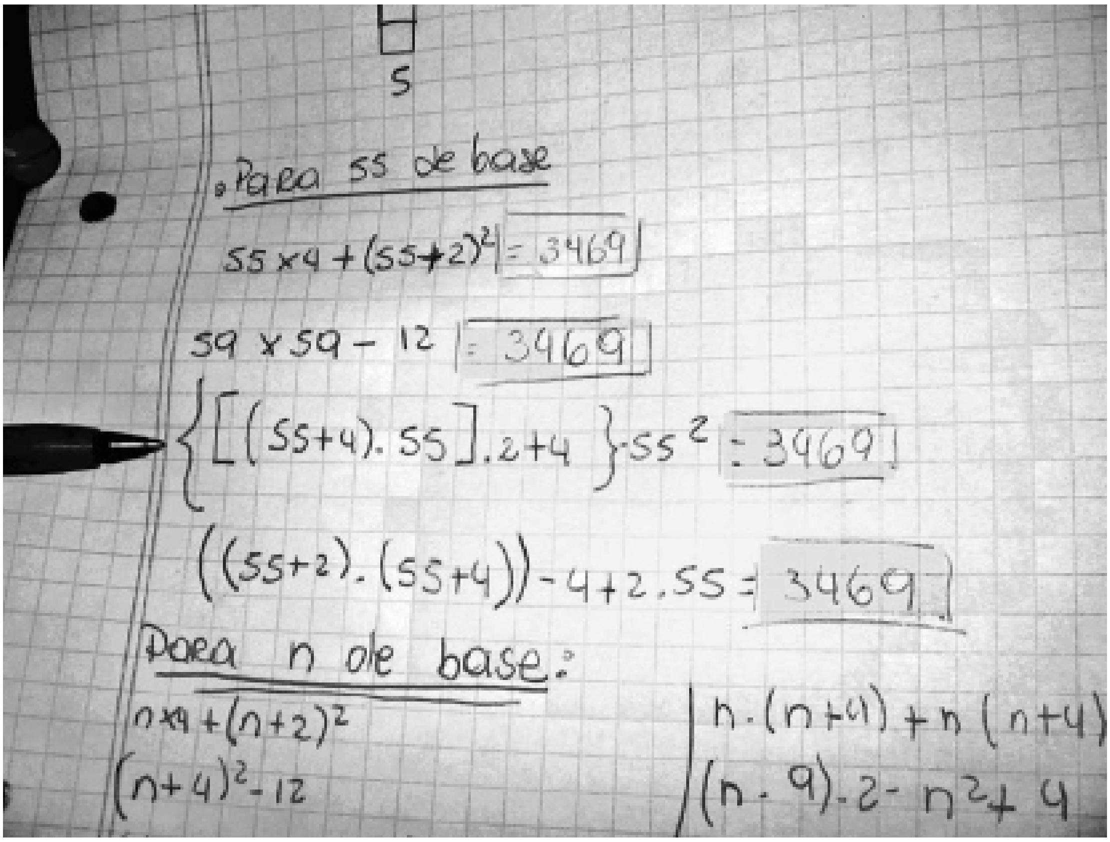
En un aula, un grupo de alumnos produjo una nueva forma de contar que no habíamos previsto en nuestras anticipaciones: la forma es un cuadrado cuyo lado es la base de la figura, y se le suman cuatro partes que son "el lado más el lado más uno". Para calcular la cantidad de cuadraditos de la figura con base 5, los alumnos escribieron: $\mathbf{(50 + 51) \cdot 4 + 50^2}$ y produjeron la siguiente fórmula: $\mathbf{(n + n + 1)\ 3) \cdot 4 + n^2}$.



En la puesta en común, algunos alumnos eligieron una manera de contar producida por sus compañeros, de la que se apropiaron porque les pareció "más clara", "más sencilla" o "más cómoda". La interacción con los pares les permitió explicar su propio procedimiento, entender procedimientos de otros, compararlo con el propio y analizar la validez.

Una vez recuperados todos los procedimientos producidos, el/la docente propone escribir una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos para un **n** cualquiera. Mostramos una carpeta de un alumno que muestra cómo se pasa de la escritura con números a la utilización de **n** para generalizar en la fórmula.

7 Este problema se trabajó en cursos de escuelas medias de la ciudad de Buenos Aires y de la provincia de Buenos Aires, en aulas conformadas por alumno/as de diferentes grupos sociales y con muy diferentes relaciones con la matemática; algunos habían trabajado la producción de fórmulas lineales; otros no lo habían hecho y tampoco estaban habituados a realizar actividades de exploración como esta. En todos los cursos, el entusiasmo de los alumnos ante esta situación didáctica fue gratificante.



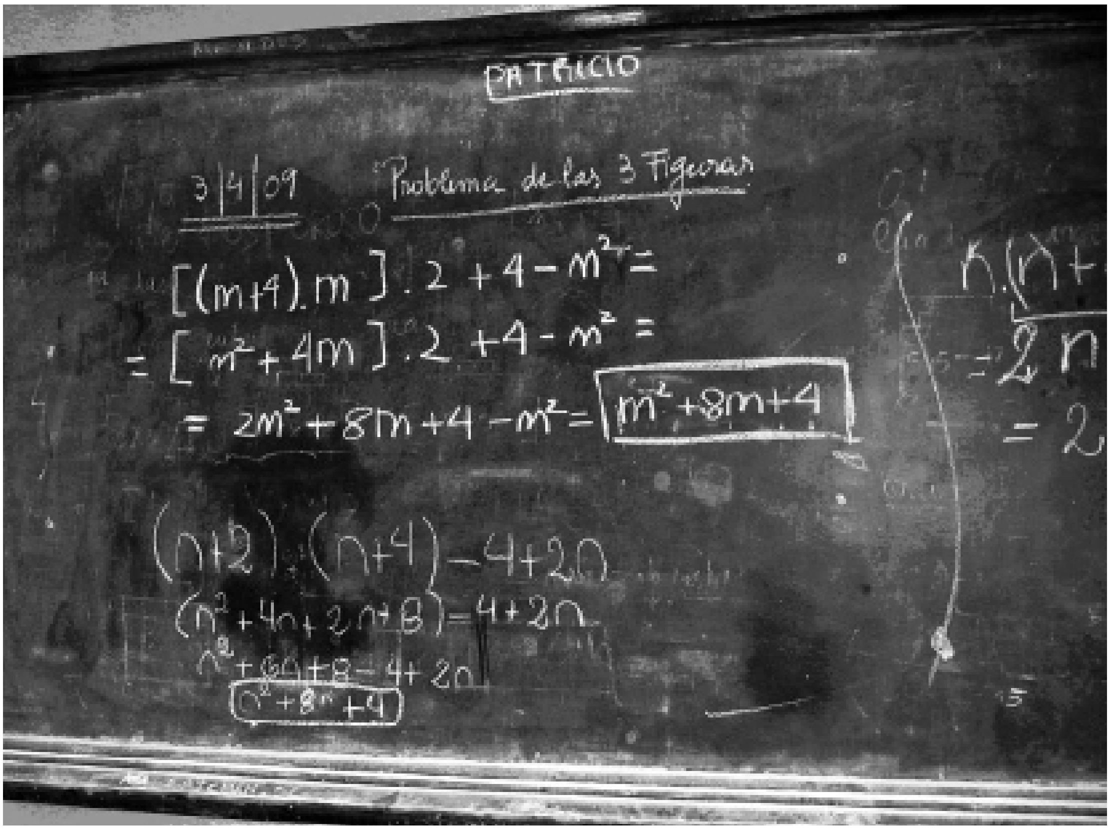
Trabajo con equivalencia de fórmulas

En la puesta en común, el docente propone probar la equivalencia de las fórmulas.

Como ya dijimos para los alumnos, esto es evidente "porque cuentan lo mismo". Un alumno responde a la convocatoria de la docente diciendo: "Para qué, si lo pruebo con la calculadora".

Se discute el sentido de este trabajo, y es el docente quien sugiere que "Para probar que son equivalentes, tienen que poder transformarse todas en una misma expresión". De esta manera, los invita a entrar en el trabajo algebraico.

El pizarrón registra lo producido por los alumnos en relación con la equivalencia en el momento de la puesta en común:



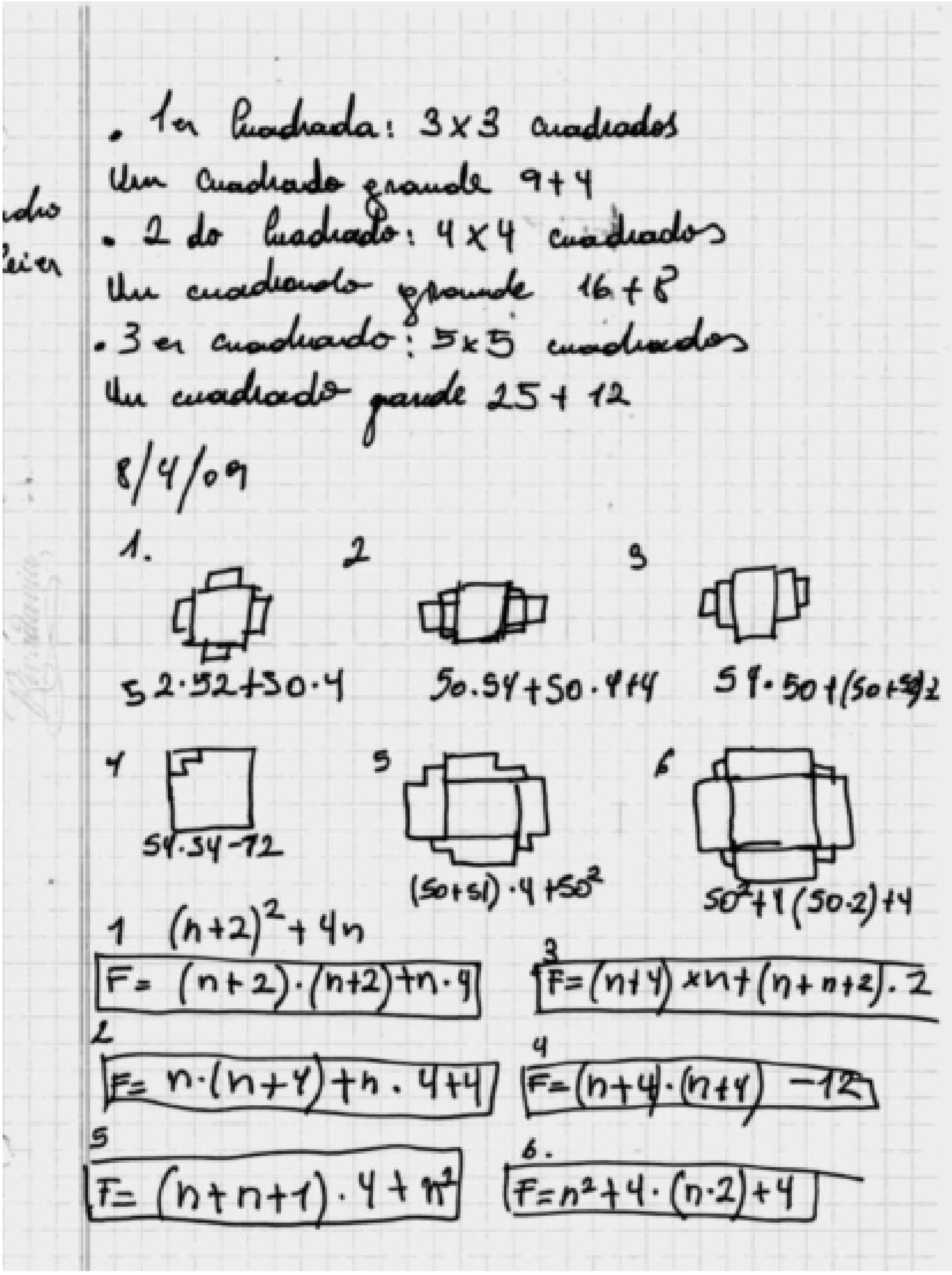
La carpeta del alumno

Una actividad que propusieron las docentes como tarea para la casa fue “Reconstruir el problema de las tres figuras”, con el objetivo de que los alumnos recuperaran y organizaran las ideas trabajadas en clase. Esta tarea tiene varias finalidades: por un lado, para realizarla, los alumnos deben recurrir a un trabajo de reconstrucción, de volver a pensar cómo se produjo colectivamente la solución de este problema; por otro lado, ayuda a instalar en los estudiantes el hábito de guardar un registro escrito, en su carpeta,[8] de lo realizado; finalmente, al ser una tarea para la casa, obliga a cada alumno a trabajar individualmente en relación con producciones que en gran parte fueron grupales.

Por otra parte, esto le sirve al docente para evaluar en qué medida los alumnos comprendieron el tema, y para recoger información acerca de qué aprendieron y cómo lo hicieron.

8 En el documento *Estudiar matemática* se lee: “La carpeta es el espacio en el que se deja registro de las interacciones que se producen en la clase a propósito de un saber matemático. Tiene –o debería tener– un valor instrumental importante. Para que este valor instrumental pueda construirse, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo. El problema no se resolvería dictándole al estudiante aquello que el profesor considera esencial. Lo esencial tiene que estar en la carpeta, pero elaborado por el alumno”. Disponible en estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf

A continuación, se presentan ejemplos de registros de las carpetas de alumnos:



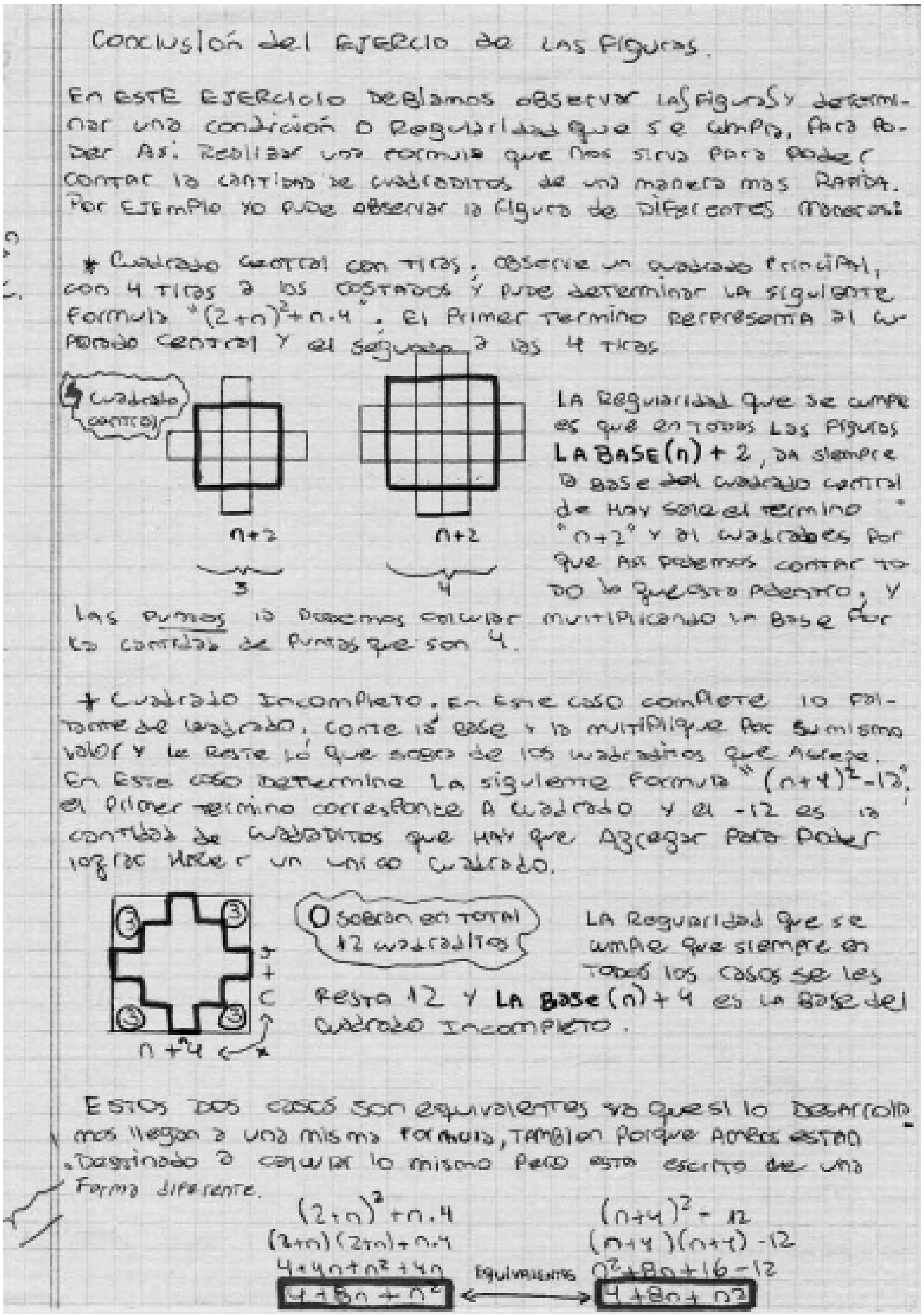
. 1er Cuadrado: 3x3 cuadrados
Un cuadrado grande 9+4
. 2do Cuadrado: 4x4 cuadrados
Un cuadrado grande 16+8
. 3er cuadrado: 5x5 cuadrados
Un cuadrado grande 25+12

8/4/09

1. $52 \cdot 52 + 50 \cdot 4$
2. $50 \cdot 54 + 50 \cdot 4 + 4$
3. $54 \cdot 50 + (50+50) \cdot 2$
4. $54 \cdot 54 - 12$
5. $(50+51) \cdot 4 + 50^2$
6. $50^2 + 4(50 \cdot 2) + 4$

1 $(n+2)^2 + 4n$

1. $\boxed{F = (n+2) \cdot (n+2) + n \cdot 4}$
2. $\boxed{F = n \cdot (n+4) + n \cdot 4 + 4}$
3. $\boxed{F = (n+4) \times n + (n+n+2) \cdot 2}$
4. $\boxed{F = (n+4 \cdot (n+4) - 12}$
5. $\boxed{F = (n+n+1) \cdot 4 + n^2}$
6. $\boxed{F = n^2 + 4 \cdot (n \cdot 2) + 4}$



Conclusión del ejercicio de las figuras.

En este ejercicio debíamos observar las figuras y determinar una condición o regularidad que se cumpla, para poder así realizar una fórmula que nos sirva para poder contar la cantidad de cuadraditos de una manera más rápida. Por ejemplo yo pude observar la figura de diferentes maneras:

* Cuadrado central con tiras. Observé un cuadrado principal, con 4 tiras a los costados y pude determinar la siguiente fórmula "$(2+n)^2+n.4$". El primer término representa al cuadrado central y el segundo a las 4 tiras.

La regularidad que se cumple es que en todas las figuras **LA BASE (n) + 2**, da siempre la base del cuadrado central de ahí sale el término "n+2" y al cuadrado es porque así podemos contar todo lo que está adentro, y las puntas lo podemos calcular multiplicando la base por la cantidad de puntas que son 4.

* Cuadrado incompleto. En este caso completé lo faltante de cuadrado, conté la base y lo multipliqué por su mismo valor y le resté lo que sobraba de los cuadraditos que agregué. En este caso determiné la siguiente fórmula "$(n+4)^2-12$". El primer término corresponde a cuadrado y el -12 es la cantidad de cuadraditos que hay que agregar para poder lograr hacer un único cuadrado.

La regularidad que se cumple que siempre en todos los casos se les resta 12 y **LA BASE (n) + 4** es la base del cuadrado incompleto.

Estos dos casos son equivalentes ya que si lo desarrollamos llegan a una misma fórmula, también porque ambos están destinados a calcular lo mismo pero está escrito de una forma diferente.

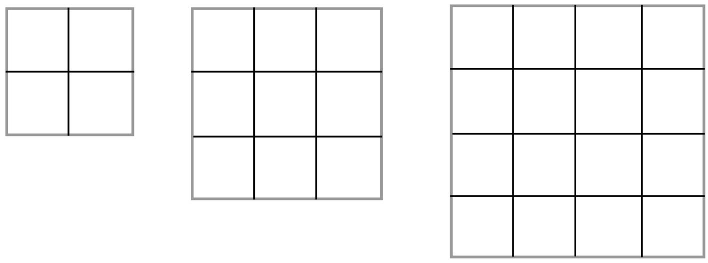
$$(2+n)^2+n.4 \qquad (n+4)^2-12$$
$$(2+n)(2+n)+n.4 \qquad (n+4)(n+4)-12$$
$$4+4n+n^2+4n \quad \text{equivalentes} \quad n^2+8n+16-12$$
$$\boxed{4+8n+n^2} \longleftrightarrow \boxed{4+8n+n^2}$$

Las profesoras del grupo –que en principio veían complejo este problema para llevar a sus aulas– quedaron muy contentas por el entusiasmo con que participaron los alumnos y por todo el trabajo matemático que pudieron desplegar en torno al problema.

Presentamos a continuación un último problema de "fórmulas para contar", con sugerencias para su gestión en el aula.

PROBLEMA 4

En un cuadrado cuadriculado se pinta de rojo el borde. Algunos cuadraditos de la grilla tendrán 1 lado rojo, otros cuadraditos 2 lados rojos, y otros, ninguno. Se presentan 3 ejemplos de esto:



(En estos gráficos, el color rojo se reemplaza por gris.)

a) ¿Cuántos cuadraditos con 1 lado rojo hay en cada figura? ¿Cuántos habría, si el lado del cuadrado tuviera 60 cuadraditos?

b) ¿Cuántos cuadraditos con 2 lados rojos hay en cada figura? ¿Cuántos habría, si el lado del cuadrado tuviera 60 cuadraditos?

c) ¿Cuántos cuadraditos sin ningún lado pintado hay en cada figura? ¿Cuántos habría, si el lado del cuadrado tuviera 60 cuadraditos?

d) Proponer una fórmula para calcular la cantidad de cuadraditos con 1 lado rojo, otra para calcular la cantidad de cuadraditos con 2 lados rojos, y otra para calcular la cantidad de cuadraditos sin ningún lado pintado, para una grilla de n cuadraditos en el borde.

Como en los problemas anteriores, se trata de discutir con los alumnos diferentes maneras de contar estas cantidades. Puede resultarles sorprendente que la respuesta a la pregunta *b* es siempre 4, independientemente de la cantidad de cuadraditos del borde. Una vez discutidas las resoluciones a las primeras tres consignas, se plantea la búsqueda de una fórmula para figuras con **n** cuadraditos en el borde.

Comentarios

- Podría ser que algunos alumnos, para calcular una de las tres fórmulas solicitadas en la última consigna, restaran de $\mathbf{n^2}$ la fórmula obtenida para los otros dos casos. Por ejemplo, podrían contestar:

  Cuadraditos con 1 lado pintado: $\mathbf{(n - 2) \cdot 4}$
  Cuadraditos con dos lados pintados: $\mathbf{4}$
  Cuadraditos con ningún lado pintado: $\mathbf{n^2 - (n - 2) \cdot 4 - 4}$

- Otros alumnos podrán contar esto último de manera directa; por ejemplo, para ningún lado pintado: $\mathbf{(n - 2)^2}$

Esto permitiría trabajar en el aula la equivalencia entre las dos fórmulas.

Si todos los alumnos calcularan cada caso de manera independiente, puede ser el docente quién plantee que todo debe dar $\mathbf{n^2}$, que es la cantidad total de cuadraditos de la grilla. Y proponerles llegar a eso algebraicamente.

En el Anexo 1 de este documento presentamos un conjunto de actividades que pueden incorporarse como otra vía de entrada al trabajo algebraico y que explotan la idea de modelizar el cálculo de áreas y perímetros de figuras. Es un trabajo que puede plantearse en primer año y ser continuado en segundo. Se podría acompañar con otras actividades que trabajen en torno a la noción de área.[9] Muchas de esas actividades, al poner el juego la producción de fórmulas para medir áreas de cuadrados y rectángulos, se ubican en el espacio de trabajo con expresiones cuadráticas, como el resto de las actividades planteadas en este capítulo.

[9] Ver documento *Geometría* (2007). Disponible enwww.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/serie_aportes.php.

Capítulo 2

Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos

Comenzamos este capítulo estudiando la función cuadrática a partir de la resolución de problemas en un contexto geométrico. Proponemos abordar en primer lugar el análisis del modo de variación de una función cuadrática y la forma de su gráfico.

Abordar la función cuadrática requiere estudiar los tipos de problemas que esta función modeliza, analizar el modo de crecimiento, la simetría, la existencia de máximo o mínimo, todas las formas de representarla (contexto, tabla de valores, gráfico cartesiano, fórmula) y la relación entre las distintas representaciones.

También se propone un trabajo de producción de fórmulas para las funciones estudiadas. Se intenta provocar la producción de diferentes fórmulas para abordar nuevamente (como se hizo en los problemas del capítulo 1) el trabajo algebraico que justifique la equivalencia entre ellas.

Elegimos cuatro problemas que aluden a situaciones geométricas porque pensamos que apoyándose en pocos conocimientos geométricos los estudiantes podrán caracterizar el tipo de variación de la variable y algunos rasgos de la función y de su gráfico. Los alumnos podrán determinar que en estas situaciones la variación de la función no es uniforme –que la forma en que crece "no es siempre la misma"–, que no es siempre creciente o siempre decreciente, que el gráfico es simétrico, que existe un máximo o un mínimo.

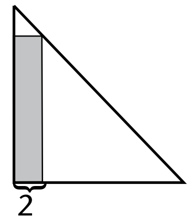
Estamos partiendo del supuesto que los alumnos han trabajado anteriormente con la noción de función lineal y que han analizado cómo se manifiesta el crecimiento uniforme en una tabla de valores y en un gráfico cartesiano.

En caso de no ser así sería conveniente que el docente proponga primero a sus alumnos algunos problemas que se modelicen con función lineal, con la idea de analizar cómo es el crecimiento: a aumentos iguales de la variable **x** hay aumentos iguales de la variable **y**.

Analizamos con más detenimiento los dos primeros problemas y presentamos el tercero y el cuarto como otros ejemplos para que el docente pueda elegir según se sienta más cómodo con uno u otro.

En el problema 1, que se presenta a continuación, se busca analizar la variación del área de ciertos rectángulos inscriptos en un triángulo isósceles como el de la figura que acompaña al enunciado escrito que se dará a los alumnos. Para entrar a trabajar con el problema es necesario caracterizar a estos rectángulos con precisión y esto podría hacerse oralmente antes de la entrega del texto. El docente puede conversar con sus alumnos acerca del "tipo de rectángulos" con los que se va a trabajar, presentando estas figuras en el pizarrón, describiendo las características de las mismas y dedicándole el tiempo necesario para que todos los alumnos comprendan la situación. Una descripción podría ser: "son los rectángulos que tiene dos lados apoyados en los catetos del triángulo y un vértice en la hipotenusa", nosotros optamos por no incluirla en el texto.

PROBLEMA 1



Se tiene un triángulo isósceles rectángulo, cuyos catetos miden 11 cm. Considerar los rectángulos que se pueden dibujar dentro de la figura de la siguiente manera:

a) ¿Cuál es el área del rectángulo de base dos? (es el rectángulo que está dibujado)
b) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área mayor que el que está dibujado? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.
c) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área menor que el de base dos? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.
d) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área igual que el de base 2? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.

Los alumnos podrían comenzar a resolver este problema en pequeños grupos. Es bastante natural que en el inciso a) calculen el área del rectángulo dibujado, considerando que la altura mide 9 cm porque "se ve" que el triangulito tiene los dos lados iguales.

El docente podría indagar sobre esta afirmación que hacen los alumnos, provocando la necesidad de elaborar una prueba (sin la propuesta del docente los alumnos se quedarán con la evidencia proveniente de lo que se ve en el dibujo). Esta discusión puede ser retomada para trabajar entre todos:

Una posible explicación sería:
El triángulo original es isósceles y rectángulo por lo tanto sus ángulos agudos miden 45°. Como los dos triángulos que se forman al sacar el rectángulo de lado 2, son rectángulos y uno de sus ángulos agudos mide 45°, el otro también mide 45°. Por lo tanto, el triangulito de arriba resulta isósceles y su lado vertical mide 2. Lo que valida que el otro lado del rectángulo mida 9.

Otra explicación se puede apoyar en el hecho de que los ángulos del triángulo pequeño y el original son iguales al ser correspondientes.

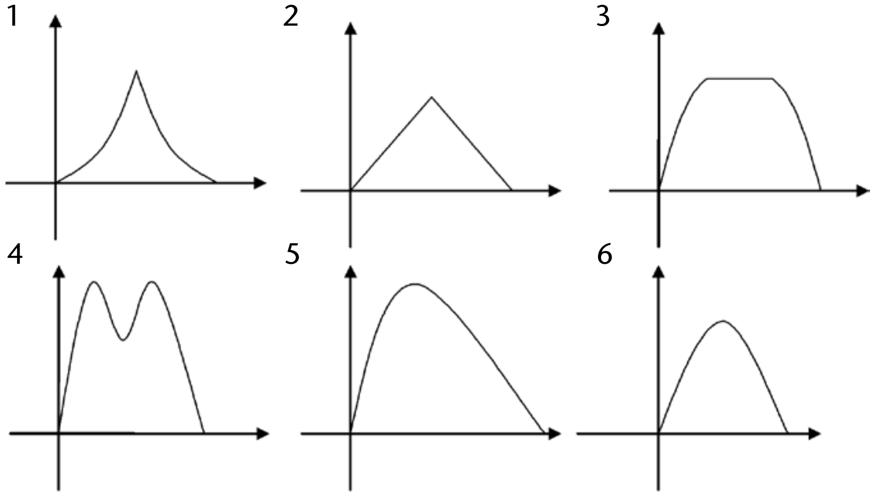
A partir de esto pueden calcular el área de otros rectángulos variando la base. En la búsqueda de otros rectángulos, de mayor y menor área, los alumnos pueden registrar otra propiedad de estos rectángulos: todos tienen el mismo perímetro.

Al finalizar el trabajo sobre estos cuatro ítems, el docente puede proponer hacer una tabla, escribiendo la variación del área en relación con la base y altura del rectángulo tomando los datos que generaron los alumnos.

BASE	ALTURA	ÁREA
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	2	18
10	1	10

Si ninguno propone datos no enteros, que es lo que generalmente sucede, será mejor dejar esta cuestión para más adelante porque van a necesitar recurrir a ellos en la siguiente actividad que el docente propone a continuación:

e) Para cada uno de los siguientes 6 gráficos, decidir si puede corresponder o no a la representación gráfica de la variación del área del rectángulo en función de la base del mismo. En cada caso, dar argumentos para justificar la respuesta.



Será importante que el docente aclare que deben estudiar cada gráfico –explicitando las razones por las cuales eligen y/o descartan cada uno–, y no solo elegir el gráfico que modeliza la situación.

Comentarios

Estudiar cada uno de los seis gráficos, buscando razones para aceptarlo o descartarlo, es una tarea que comporta una complejidad diferente a la de confección de un gráfico, que clásicamente se resuelve en la escuela siguiendo el siguiente recorrido: fórmula de la función –> confección de tabla de valores –> marcado de puntos en un sistema de ejes cartesianos –> dibujo de un gráfico aproximado uniendo los puntos.

Con esta tarea se pretende que el análisis de cada gráfico se apoye en características del fenómeno. Para ello habrá que convertir al registro de los gráficos cartesianos los aspectos identificados en el trabajo previo con el problema y, al mismo tiempo, al estudiar los gráficos los alumnos podrán elaborar nuevas relaciones en torno a la función estudiada.

Los seis gráficos comparten con la función área algunas características identificadas a partir de los ítems anteriores; en ese sentido, decidir si un gráfico corresponde o no a esta función obligará a los alumnos a estudiar de manera más precisa la variación.

Por ejemplo, se espera que los alumnos al estudiar el gráfico 2, lineal a trozos, identifiquen un aspecto característico de la situación: el área "crece primero y decrece después a medida que la base aumenta". Sin embargo, la linealidad en la totalidad del intervalo donde el área crece (o decrece), es una característica de este gráfico que no se corresponde con la situación. Para analizar esto último es necesario recurrir a los datos numéricos recogidos en la tabla de valores.

Hacer una tabla de valores no necesariamente lleva al alumno a establecer alguna relación sobre el tipo de variación del fenómeno que está estudiando. Es necesario pensar en un trabajo de análisis sobre la tabla ya construida para atrapar algunas características de la variación.[10]

La actividad de buscar razones por las cuales se puede descartar un gráfico y razones por las cuales se lo podría elegir, es probablemente nueva para los alumnos y representa una oportunidad de volver a discutir asuntos generales en torno de los gráficos cartesianos de funciones.

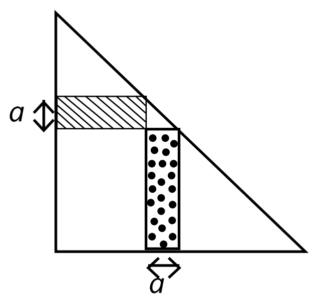
Es probable que en el aula empiecen a circular cuestiones relativas a la variación del área, que aumenta y disminuye o que hay dos valores donde da igual. Teniendo en cuenta estas primeras conclusiones, es posible que los alumnos no descarten el tercer gráfico porque asuman implícitamente que entre 5 y 6 el área no varía. El valor

10 Parte de este análisis se encuentra en el trabajo: "Construcción en el aula de la idea de curva en un entorno de funciones cuadráticas". Comunicación de Borsani, Valeria; Luna, Juan Pablo; Sessa, Carmen al Congreso REPEM (2008).

11 impar para el cateto del triángulo está puesto expresamente para que el máximo no aparezca directamente en la tabla de valores, que en general se arma solo con números naturales para la variable independiente.

Podría ser necesaria una intervención docente preguntando sobre valores intermedios entre 5 y 6 para la medida del lado. Esto favorece la profundización en el estudio de la forma del gráfico y la posible conclusión de que dentro del triángulo hay infinitos de estos rectángulos.

En general, los alumnos no tienen duda de que si el lado del rectángulo mide 5,5, el área que se obtiene es máxima. Si bien validar esta afirmación no es la tarea central en este problema, es posible también que el docente la desarrolle ya que está muy bien adaptada a los conocimientos de los alumnos.



Presentamos una explicación de este hecho basada en cuestiones geométricas y comparaciones de áreas.

El valor máximo corresponde al área del cuadrado de lado 5,5, pues cuando disminuimos la base del cuadrado, el segmento *a* que le sacamos a la base se lo agregamos a la altura. La base del nuevo rectángulo es menor que 5,5. El área blanca es común al cuadrado y al rectángulo. Se necesita comparar los dos rectangulitos.

El área punteada del rectangulito que se saca ($a \times 5{,}5$) es menor que el área rayada del rectangulito que se agrega (menos que 5,5) x a.

Por lo tanto el área del nuevo rectángulo es menor que el área del cuadrado. El razonamiento es el mismo cuando aumentamos la base del cuadrado.

También se puede expresar algebraicamente el área del rectángulo como : $(5{,}5 - a)\cdot(5{,}5 + a) = 5{,}5^2 - a^2$, y esto resulta siempre menor que el área del cuadrado, $5{,}5^2$, porque a^2 es positivo.

Episodios en el aula

Mostramos ejemplos de argumentaciones posibles de los alumnos; algunas generaron debates en la clase:

Un alumno encaró la actividad realizando él mismo un gráfico a partir de la tabla: "yo hago el gráfico y veo qué forma tiene". Tomando como base su dibujo, empezó a estudiar los otros gráficos.

- **En torno al gráfico 1**, se escucharon distintos argumentos:
- "El 1 puede ser, porque tiene el mismo crecimiento y decrecimiento, y tiene un máximo". Este argumento es refutado por un compañero, que expresa: "como la diferencia entre 1 y 2 es 8 y entre 3 y 4 es 6, después 4 después 2, entonces sube con esta forma (hace el gesto con las manos) y en ese, primero crece primero rápido y después más lento".
- En otro grupo dijeron: "El gráfico 1 no puede ser, porque al principio sube lentamente y luego aumenta con mayor velocidad, y el gráfico de nuestra función primero aumenta notablemente y luego más lento". Todo esto fue expresado mirando la tabla en la cual se habían marcado las diferencias.

Base	Área	
1	10	8
2	18	6
3	24	4
4	28	

Para descartar el gráfico 2:
- "El 2 no puede ser, porque el crecimiento no es constante".
- "El gráfico 2 no corresponde porque crece proporcional y uniformemente y no presenta variaciones en la pendiente, o mejor dicho en el crecimiento y decrecimiento, mientras que la función del problema crece deformemente y sí varía".

En torno al gráfico 3:
Como anticipáramos, muchos alumnos pensaron que este gráfico se correspondía con la tabla al leer en esta que "entre 5 y 6 la función era constante". Después de una intervención docente, la tabla comenzó a poblarse con más valores:
- Una argumentación fue: El gráfico 3 no corresponde, ya que entre los puntos 5 y 6 del gráfico se mantiene constante y no presenta las variaciones de centésimos existentes hasta llegar al pico máximo de 30,25.

Base	Área
5	30
5,1	30,09
5,2	30,16
5,3	30,21
5,4	30,24
5,5	30,25
5,6	30,24
5,7	30,21
6	30

El gráfico 4:
- "Porque hay 4 puntos con la misma área y en el que te pide, hay 2".
- "No es porque se repite 4 veces una misma área. Además hay 2 puntos máximos".
- "Porque no decrece y crece dos veces".

El gráfico 5:

- "No es, porque el crecimiento y el decrecimiento no es igual".
- "Tampoco es, porque no tiene el máximo en el punto medio".
- "Está como chanfleado, no tiene el mismo valor, no crece igual".

Un episodio centrado en el trabajo sobre la tabla

En un aula un alumno se puso a estudiar ciertas regularidades que observaba en la variación del área. Si bien el crecimiento no era uniforme, había algo uniforme en ese crecimiento: para aumentos de una unidad en la variable **x**, el área aumentaba cada vez menos, y la diferencia entre esos aumentos era siempre 2.

El docente decide tomar estas ideas y organiza una tabla ampliada como la siguiente:

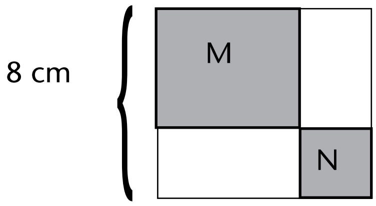
x	11 – x	A(x) = x · (11–x)	Variación del área	
1	10	10		
2	9	18	+8	–2
3	8	24	+6	–2
4	7	28	+4	–2
5	6	30	+2	–2
6	5	30	0	–2
7	4	28	–2	–2
8	3	24	–4	–2
9	2	18	–6	–2
10	1	10	–8	–2

La decisión del docente de dar cabida a estas ideas estuvo motivada por dos cuestiones:

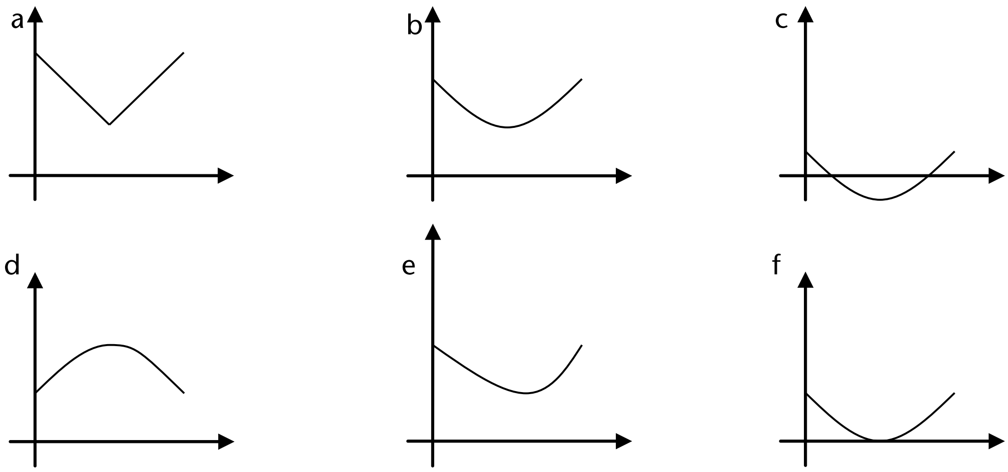
1. Reflexionar con los alumnos sobre el sentido de esta constante y distinguirla de una supuesta "pendiente" de la curva.
2. Destacar en este ejemplo un fenómeno que compartirán todas las funciones cuadráticas: la variación de la variación es constante. Esta propiedad importa una complejidad fuera de lo abarcable en la enseñanza de función cuadrática en la escuela media. Los alumnos que dispongan en algún momento de herramientas de análisis matemático podrán reencontrar esta característica (la segunda derivada de un polinomio de segundo grado es constante).

PROBLEMA 2

En un cuadrado de lado 8 cm. se trazan dos segmentos paralelos a los lados de manera que queden determinados dos cuadrados M y N.



a) Si el lado del cuadrado N mide 3 cm. ¿Cuál es el área sombreada?
b) ¿Y si el lado del cuadrado N mide 5,7 cm?
c) ¿Habrá algún valor del lado del cuadrado N tal que el área de la región sombreada sea mayor que 45 cm^2? ¿y menor?
d) ¿Habrá algún valor del lado del cuadrado N tal que el área de la región sombreada sea menor que 30 cm^2?
e) Decidir cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la representación del área sombreada en función de la medida del lado del cuadrado N. Justificar la respuesta.



Comentarios

Este problema es similar al anterior con algunas diferencias:

- Hay un mínimo, que se puede validar por el contexto como en el problema anterior
- Hay un mínimo y un máximo que tienen sentido en el contexto de la situación (en el problema anterior el mínimo se correspondía con un rectángulo de área 0).
- La gráfica de la función no llega hasta cero y por lo tanto no corta al eje **x**.

Del mismo modo que en el problema anterior, después de discutidos los incisos hasta el **d**, se puede elaborar colectivamente una tabla de valores; por ejemplo:

lado$_N$	lado$_M$	Área sombreada
1	7	50
2	6	40
3	5	34
4	4	32
5	3	34
6	2	40
7	1	50

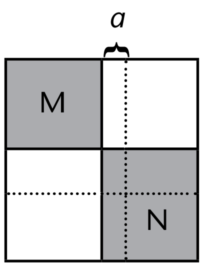
Casi siempre los alumnos dan a la variable solo valores enteros positivos. El docente puede proponer la inclusión de los valores extremos (8 y 0 para el lado N) y valores no enteros como por ejemplo 0,1; 0,01; etcétera.

Los alumnos podrían asumir, a partir de la lectura de la tabla, que el mínimo es 32, cuando **lado$_N$ = lado$_M$ = 4**, o sea, cuando los cuadrados M y N son iguales. El docente podría generar en el aula la duda de que el mínimo sea 32 y la necesidad de validarlo. Aunque los alumnos no estén en condiciones de elaborar una explicación por sí mismos, el docente puede ofrecerla. Proponemos una posible organización de la explicación.

Si M = N (que corresponde al valor 4 para la medida del lado N), el área sombreada es igual al área blanca, o sea 32, que es la mitad del área del cuadrado grande.

Si M no es igual a N, veamos que el área de la parte sombreada (M + N) es mayor que el área de la parte blanca, y por lo tanto mayor que 32 (de esto resultaría que el área sombreada es mínima cuando M = N).

Supongamos que el lado de M se agranda un segmento de medida *a*.



Al área sombreada original se le agrega y se le quita algo. El área que se agrega es la de dos rectangulitos blancos mayores a los dos rectangulitos grises que se restan. El rectangulito blanco es mayor que el gris, porque ambos tienen un lado de medida *a* y el otro lado mide 4 en el rectangulito blanco y menos de 4 en el gris. Este argumento es una buena validación de que si N no es igual a M, el área sombreada mide más que 32.

Si expresamos algebraicamente estos argumentos, obtenemos otra validación. Como el lado de M se agranda en una cantidad *a*, su nuevo valor será $(4 + a)$ y el lado de N será $(4 – a)$, porque ambos suman 8.

El área del nuevo M + N es:
$(4 + a)^2 + (4 – a)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot a + a^2 + 4^2 – 2 \cdot 4 \cdot a + a^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot a^2$,
que siempre será mayor que $2 \cdot 4^2$, porque se le suma “algo” positivo.

En la discusión colectiva del item **e)** se requiere, como en el problema anterior, que los alumnos den razones para descartar o aceptar cada uno de los 6 gráficos. Concluida esta discusión se proponen nuevas tareas.

f) Escriban una fórmula que permita calcular el área de la región sombreada a partir de la medida del lado del cuadrado M.

g) Escriban una fórmula para el área de la parte blanca, teniendo como dato la misma medida del lado del cuadrado M.

La producción de estas fórmulas puede dar lugar a la realización de un trabajo algebraico con sentido, si median algunas intervenciones docentes que lo provoquen. Por ejemplo, podría ser que algunos alumnos escriban una fórmula para el área blanca a partir de restar del total el área sombreada:

$$\text{Área sombreada} = x^2 + (8 - x)^2 \qquad \text{Área blanca} = 64 - [x^2 + (8 - x)^2] \;;$$

mientras que otros pueden calcularla como la suma de las áreas de los dos rectangulitos iguales:

$$\text{Área blanca} = (x \cdot (8 - x)) \cdot 2$$

La intervención docente estaría en pedir una validación algebraica de la equivalencia de esas dos fórmulas.

Para los alumnos resulta natural que la suma de la parte sombreada y la parte blanca sea igual al área del cuadrado grande, o sea 64. Sin embargo, les puede resultar desconcertante si se escribe:

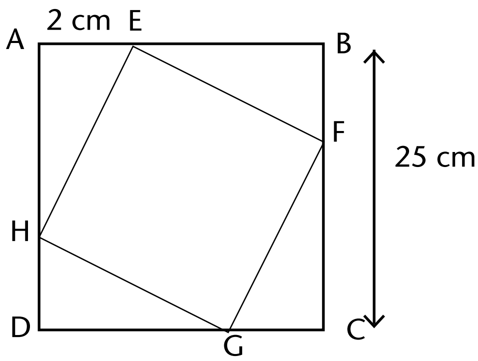
$$x^2 + (8 - x)^2 + x \cdot (8 - x) \cdot 2 = 64$$

¿Cómo un número es el resultado de la suma de términos que tienen letras? A propósito de ese desconcierto, el docente puede proponer hacer los cálculos para probar esa igualdad.

Nuestra experiencia muestra que en un comienzo los alumnos, para demostrar, reemplazan la variable por números enteros: 4, 6 ó 7. Para ellos, eso es suficiente. Es el docente quien tiene que explicitar la necesidad de generalizar la demostración, de validarlo para cualquier valor de la variable **x** y que eso significa ir transformado la expresión en otra equivalente, desarrollando el cuadrado, distribuyendo el factor **x**, etcétera.

Escribir las fórmulas, discutir sobre el uso de los paréntesis y realizar una compleja manipulación algebraica tiene en este caso un sentido para los alumnos y pueden, además, apoyarse permanentemente en el contexto geométrico para validar sus afirmaciones.

Problema 3



Dado un cuadrado ABCD de 25 cm de lado, se considera el cuadrado EFGH, cuyos vértices están a una misma distancia de los vértices del cuadrado original, como se indica en la figura.

a) ¿Cuál es el área de EFGH cuando la distancia de E a A es 2 cm?

b) ¿Habrá algún cuadrado construido de esta forma cuya área sea menor? Si lo hay, encontrar alguno y decir cuál es la distancia que consideraste para encontrarlo.

c) ¿Habrá algún cuadrado construido de esta forma cuya área sea mayor al del ítem **a**)? Si lo hay, encontrar alguno y decir cuál es la distancia que consideraste para encontrarlo.

Comentarios

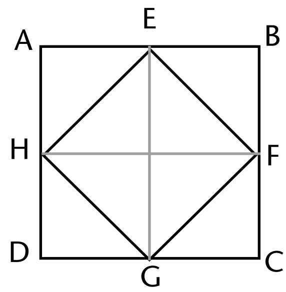
Este problema podría hacerse en lugar del **problema 1**, porque tiene características similares. Presenta una complejidad mayor, porque independientemente de la argumentación, no es inmediato el cálculo de las dimensiones del cuadrado interno. Además, son 25 los valores enteros para intentar hacer una tabla que los incluya a todos.

Para comenzar a trabajar en torno a esta situación, habría primero que discutir por qué EFGH es un cuadrado.

El trabajo en los tres primeros ítems permite que los alumnos se familiaricen con la situación y se encuentren con el hecho de que agrandando un poco el valor de la distancia de E a A el área del cuadrado EFGH es menor. Es posible construir una tabla con algunos valores; por ejemplo:

Longitud del segmento	Área
0	625
2	533
8	353
12	313
12,5	312,5
13	313
25	625

Apoyándose en la tabla y en el dibujo, es posible conjeturar que el área es mínima cuando el valor del segmento AE es la mitad del lado del cuadrado grande. Queda pendiente su fundamentación.

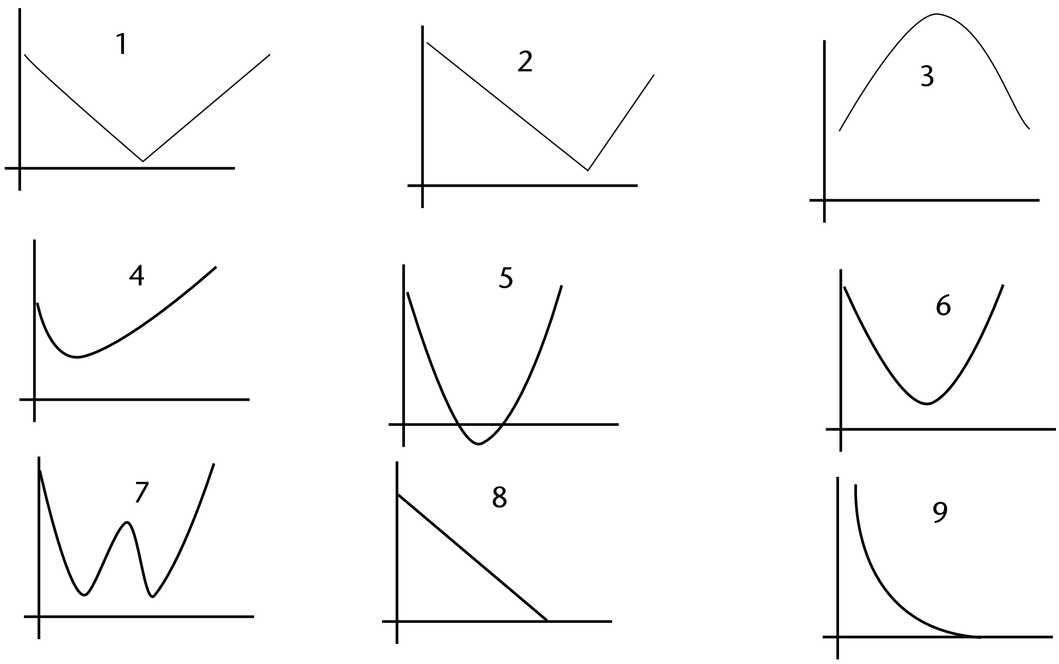


El área resulta la mitad del área total. Esto último se puede deducir geométricamente trazando las diagonales del cuadrado interno y registrando que los triángulos determinados son todos iguales.

Una vez discutidos estos ítems, se propone un trabajo de análisis de gráficos.

Si este problema se ha planteado como el primero de esta serie, los gráficos a estudiar podrían ser los siguientes (este inciso provocará un análisis exhaustivo del tipo de crecimiento):

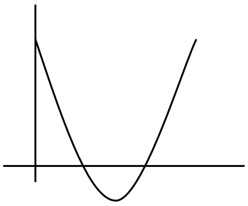
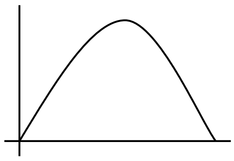
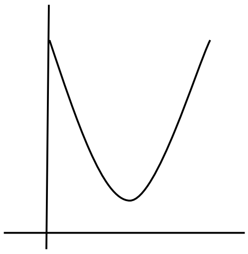
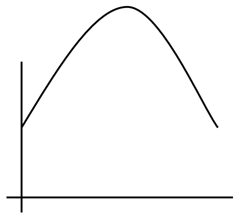
d) Decidir cuáles de estos gráficos representan la variación del área del cuadrado EFGH en función de la distancia AE. Explicar por qué.



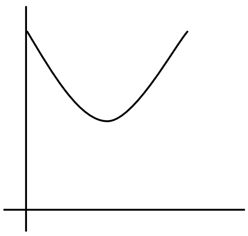
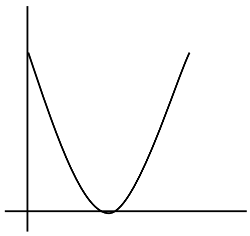
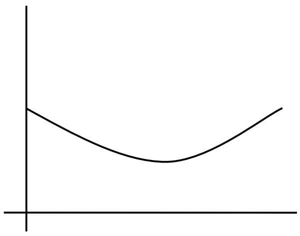
Se anticipan argumentos similares a los que presentamos para el primer problema.

Si, en cambio, este problema se lo presenta como último de esta serie, entonces los gráficos anteriores serían muy evidentes y proponemos cambiarlos por estos otros:

1. **2.** **3.** **4.**

5. **6.** **7.**

En este caso, será necesario mirar "algo más" para determinar cuál corresponde a la situación.

Por ejemplo:
- el área no puede ser negativa y nunca vale 0,
- el área es la máxima posible (625 cm^2) cuando el segmento AE tiene longitud 0 ó 25,
- el área es la mínima cuando el segmento vale 12,5 y vale la mitad que la máxima.

Los gráficos 3, 5 y 7 podrían ser candidatos. Sin embargo, en el gráfico 3, el área mínima no es la mitad del área del cuadrado grande. Por lo tanto, los únicos gráficos posibles son 5 y 7.

Ambos representan la situación, pero con escalas distintas para los dos ejes.

Este análisis permite identificar las coordenadas del vértice y de la ordenada al origen de esta parábola.

Otra tarea interesante para los alumnos será:

> e) buscar una fórmula para el cálculo del área en función de la distancia AE.

Pueden proponer fórmulas distintas.

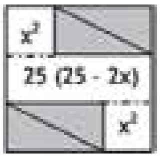
- Si se restan los 4 triángulos al cuadrado, resulta

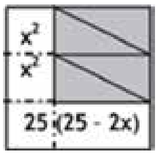
$$\text{Área} = 25^2 - \frac{4 \,.\, (25 - x)}{2}$$

• Si los alumnos ya conocen el teorema de Pitágoras, pueden proponer calcular el lado del cuadrado interior como la hipotenusa de cada triangulito; entonces, el área de ese cuadrado resulta:

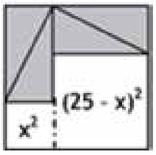
$$\text{Área} = \left(\sqrt{x^2 + (25 - x)^2}\right)^2 = x^2 + (25 - x)^2$$

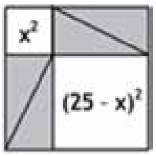
• Si se recompone la figura, reubicando los cuatro triangulitos, se puede calcular el área como la suma de las áreas de cuadrados y rectángulos; por ejemplo:





Área = $x^2 + x^2 + 25\,(25 - 2x)$



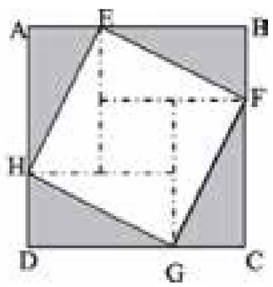


Área = $x^2 + (25 - x)^2$
(como en el problema 2)

Será muy productivo demostrar que las fórmulas son equivalentes, porque requiere una compleja manipulación algebraica y se apoya en que todas calculan lo mismo.

Si los alumnos solo proponen una fórmula, también se puede jugar con que la suma del área del cuadrado más la de los 4 triángulos tiene que dar 25^2.

La fundamentación de que el área es mínima cuando el segmento AE mide 12,5 cm. ha quedado pendiente. Proponemos aquí una posible justificación:



Se vio anteriormente que si AE es 12,5 cm., entonces, el área es la mitad del área del cuadrado grande.

Si AE no es 12,5 cm, entonces vamos a ver que el área del cuadrado EFGH es mayor que la mitad del cuadrado grande ABCD.

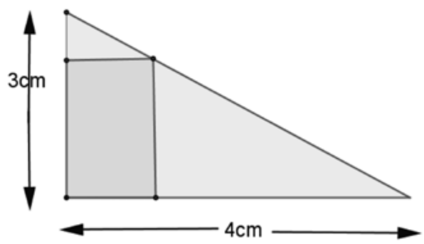
Para eso, podemos duplicar dentro de la zona blanca los 4 triángulos rectángulos, vemos que todavía queda un cuadradito adentro sin tapar (los lados de este cuadradito son iguales a la resta de los dos catetos de los triángulos). Esto nos dice que la zona pintada tiene menos área que la blanca, o lo que es lo mismo, que el área de la zona blanca es más que la mitad del cuadrado grande.

Por último, presentamos un problema que es una variante del problema 1 y trae aparejada una mayor complejidad relacional entre las medidas de longitudes y áreas.

PROBLEMA 3

Se tiene un triángulo rectángulo con catetos de 3 cm y 4 cm.

Determinar el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en el triángulo si dos lados del rectángulo están sobre los catetos, como se muestra en la figura.



La diferencia de este problema con respecto al del triángulo isósceles es que los rectángulos inscriptos no tienen perímetro fijo, lo cual exige establecer "otras" relaciones entre la base y la altura de los mismos.

En este sentido, se puede probar que el rectángulo inscripto determina dos triángulos "pequeños" que son semejantes entre sí y con el triángulo "original".

De este modo, se puede deducir que: $b/4 = (3 - h)/3$, luego: $h = 3 - 3/4\, b$, siendo b y h la base y la altura del rectángulo inscripto.

Y en esta relación se puede "ver", cómo varía la altura del rectángulo inscripto a medida que varía la base del mismo.

Base (b)	Altura (h)
0	3
1	$3 - 3/4 = 9/4$
2	$3 - 6/4 = 6/4$
3	$3 - 9/4 = 3/4$
4	$3 - 3 = 0$

Para explorar como varía el área del rectángulo, se podría confeccionar otra tabla, aprovechando los valores de la tabla anterior y analizar como varía el área del rectángulo inscripto, a medida que la base del mismo aumenta una unidad:

Base (b)	Altura (h)	Área (A)
0	3	0
1	9/4	9/4
2	6/4	3
3	3/4	9/4
4	0	0

De esta manera se puede apreciar que el área del rectángulo inscripto, aumenta desde 0 hasta alcanzar el valor 3, luego disminuye nuevamente hasta 0. Pero además, la tabla también permite “ver” que el **ritmo** de ascenso del área es **igual** al de descenso porque para los mismos intervalos de variación de la base, el área aumenta las mismas cantidades, que luego disminuye.

Por otra parte como llega hasta 3 y luego desciende permite elaborar la conjetura de que 3 es el máximo.

Igualmente, sería interesante estudiar la variación del área para valores de la base más próximos a 2, para abonar o abandonar esta conjetura. Para agilizar los cálculos sería conveniente determinar la fórmula de la función que modeliza la variación del área del rectángulo inscripto a medida que varía la base del mismo.
Con este propósito, se llegaría a la expresión $A = b \cdot (3 - \frac{3}{4} b)$. El cálculo de la función cerca del valor 2 se muestra en la tabla:

Base (b)	Área (A)
1,5	2,8125
1,75	2,95
2,25	2,95
2,5	2,8125

La tabla abona la conjetura de que 3 es el área máxima posible de un rectángulo inscripto y que se obtiene cuando la base es 2. Sería posible validar esta conjetura recurriendo a propiedades geométricas; la validación es un poco más compleja que en el caso del triángulo isósceles y decidimos no incluirla aquí.

Capítulo 3

Estudio de la función cuadrática a partir de la forma canónica de su fórmula

En el capítulo 2, el trabajo está planteado a partir de situaciones geométricas que involucran funciones cuyo gráfico es una parábola. Se propone ahora tomar como punto de partida la fórmula de la función cuadrática.

Se comienza con fórmulas cuadráticas expresadas en forma canónica o similar, es decir, donde aparece la suma de un término cuadrático y otro constante, por ejemplo, $3(5x + 1)^2 + 6$. Se incursiona más adelante, en el capítulo 4, en otras expresiones de la cuadrática, en particular la forma factorizada y la desarrollada: $ax^2 + bx + c$.

En este capítulo se proponen problemas, donde la búsqueda de resultados se puede apoyar en el análisis de la fórmula. Por ejemplo, si la fórmula es $\mathbf{y} = (x + 1)^2 + 20$, se puede inferir que el mínimo es 20 porque se le suma a 20 un cuadrado que es positivo, por lo tanto los valores de la variable *y* son todos mayores o iguales a 20. También se sugiere la búsqueda de pares de valores que tienen la misma imagen apoyándose en que dos números opuestos al cuadrado dan el mismo resultado.

Se proponen otras actividades que permiten establecer relaciones entre una fórmula y el gráfico de una parábola, vinculando las coordenadas del vértice con su ubicación en la parábola y con el eje de simetría; los valores de **x** que tienen la misma imagen permiten identificar puntos simétricos respecto del eje de simetría de la parábola.

Un aspecto interesante de esta propuesta es que el alumno pueda “leer” información en la fórmula y mediante un trabajo más bien artesanal pueda buscar, por ejemplo, extremos o raíces, sin necesidad de hacer manipulaciones algebraicas complejas o desconocidas para él. De esta manera, se pueden ir construyendo estrategias para la resolución de ecuaciones cuadráticas como una alternativa a la utilización de técnicas estandarizadas y a la memorización de fórmulas.

Las fórmulas de tipo canónica permiten ese trabajo que consideramos formativo para el alumno, optamos entonces por comenzar con ellas dejando otro tipo de expresiones como factorizada o desarrollada para más adelante. Estas serán consideradas en el capítulo 4.

PROBLEMA 1

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras.
Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula, que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora:

$$\mathbf{G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2}$$

a) Miguel propone cobrar $56 por hora. ¿Cuánto ganarían en ese caso?
b) Ernesto quiere aumentar la ganancia. ¿A qué precio podrían cobrar la hora?

Comentarios

Este es un problema en contexto para el cual se da el modelo algebraico de la variación de la ganancia en función del precio por hora. La diferencia con los problemas del capítulo anterior es que el análisis de la información será realizado a partir de la fórmula.

Los alumnos hasta aquí han producido algunas fórmulas cuadráticas, pero no están familiarizados con su uso. Con este problema nos proponemos que los estudiantes comiencen a utilizar una fórmula para responder preguntas relativas al contexto del problema. El análisis de una fórmula puede ser una tarea nueva para los alumnos, la experiencia nos ha mostrado que los chicos pueden resolver y justificar lo que hacen y en este sentido comienzan a construir conocimientos sobre el comportamiento de las fórmulas cuadráticas.

Los alumnos podrían trabajar en pequeños grupos y el docente podría hacer una recopilación de los datos obtenidos en el pizarrón con la intención de discutir colectivamente el hecho de que "no siempre que se aumenta el precio por hora aumenta la ganancia".

Es probable que los chicos para buscar valores más grandes de ganancias hayan propuesto valores de precio mayores a 80: en ese caso la frase anterior sería fácil de aceptar y validar. Si esto no sucede y todos los chicos hubieran calculado valores hasta 80 esta cuestión que queremos analizar no será evidente y para ello el docente podrá provocar la situación, ya sea en los pequeños grupos o en la puesta en común, pidiéndoles a los chicos que averigüen la ganancia para valores mayores que 80. De este modo, en la recolección se podrá hacer visible que la función no es siempre creciente.

Para algunos alumnos resultará extraño que, a pesar de que el precio por hora aumenta, la ganancia disminuye. Quizás haya que explicar que la ganancia se calcula teniendo en cuenta también otros factores, como por ejemplo la cantidad de clientes y la cantidad de trabajo que encargan, y que estas cantidades pueden variar mucho según el precio que se cobre por hora. Además para calcular la ganancia hay que descontar los gastos fijos (alquiler de local, gastos de luz, etcétera). El amigo economista armó la fórmula considerando todos esos factores y dejando como variable el "precio por hora".

¿Qué explicación podría tener que la ganancia disminuye aunque aumente el precio por hora? El comportamiento de la función nos permite suponer que al aumentar el precio por hora excesivamente, disminuye la cantidad de clientes o la cantidad de trabajo que encargan. Es algo que podría haberse supuesto por el sentido de la situación, y que el comportamiento de la función confirma.

Discutidas las dos primeras preguntas, se presentan nuevas cuestiones:

c) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia de $2.048?
d) ¿Es posible obtener una ganancia de $1.400? ¿Y de 3.500?

Es interesante reflexionar acerca de los números involucrados en la fórmula propuesta, ya que distintos números ofrecen distintas dificultades en la resolución del problema. En el inciso a) elegimos tomar $56 porque necesita la construcción de ciertas relaciones entre valores de igual ganancia que se perderían si se proponen números como 60. En este caso los estudiantes podrían tomar saltos de 10 en 10 y "descubrir " que primero sube y después baja evaluando solo en 4 o 5 valores, 60, 70, 80, 90, 100. Por el contrario, partir de $56 y buscar otros valores para obtener la misma ganancia obliga a anticipar lo que se va a obtener analizando la fórmula.

Los alumnos podrían responder la pregunta c) despejando **p** en la ecuación $3.200 - 2\,(p - 80)^2 = 2.048$, manipulación que podrían realizar sin conocer la fórmula resolvente. Es probable que en este caso "pierdan" el 56 como solución.

Otra forma sería buscando otro valor de **p** que dentro del paréntesis dé el número opuesto a (56 – 80). Si el docente deja en el pizarrón la resolución del inciso a) desplegada, o sea deja escrito $G(56) = 3.200 - 2(56 - 80)^2 = 2.048$, los alumnos podrían recurrir a esta escritura para buscar otro número que tenga el mismo cuadrado que (–24). Es decir un valor de **p** tal que **p** – 80 = 24 ó –24; **p** puede ser 56 ó 104.

Sería interesante que las dos resoluciones anteriores aparezcan en la clase por que la segunda servirá como apoyo para analizar por qué la ecuación tiene dos soluciones.

No será tan novedoso para el alumno que haya dos valores de precio por hora para los cuales se obtiene la misma ganancia, ya que se ha trabajado esto, aunque en distintos contextos, en los problemas del capítulo anterior. Lo nuevo es que ese valor se puede obtener usando la fórmula, a diferencia de los problemas geométricos donde la búsqueda se realizaba apoyándose en el contexto.

El ítem d) está puesto con la intención de manipular un poco la fórmula y ver que con ella se puede analizar si una ganancia es posible o no.

Con las preguntas c) y d) se está propiciando además un trabajo "artesanal" con ecuaciones cuadráticas. Por la forma de la expresión es posible hallar las soluciones de las ecuaciones que se plantean sin necesidad de recurrir a ningún procedimiento estandarizado; a eso nos referimos cuando decimos artesanal.

A continuación, se puede plantear a los alumnos la siguiente pregunta, si es que no surgió en el debate sobre los incisos anteriores:

e) ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener? ¿Qué precio por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?

Se pretende que los alumnos puedan responder esta última pregunta "leyendo" la fórmula y analizando que 3200 es el mayor valor que se puede lograr porque se le resta siempre un número mayor o igual que cero. La ganancia $3.200 se obtiene cuando $(p - 80)^2 = 0$.

f) En la pregunta c) se analizó que existen dos valores de precios por hora en los cuales la ganancia que se obtiene es de $2048, ¿cuál de los dos precios elegirían para obtener esa ganancia?

Es interesante, una vez encontrados los dos precios con los que se obtiene una ganancia de $2048, volver al contexto del problema y hacer un análisis de los resultados con los alumnos. Si para dos valores de precio por hora la ganancia es la misma y los costos fijos son los mismos, se puede concluir del modelo que con un precio mayor por hora se trabaja menos. Ahora bien, el modelo no permite decidir qué es más conveniente: alguien puede preferir tener más trabajo y alguien menos, eso no lo dice la matemática. Estamos frente a los supuestos, conjeturas y recortes de la realidad que se plantean al trabajar la noción de modelo y su representación a través de una fórmula. ¿Qué cosas permite decir y qué no el modelo matemático? Este asunto no es exclusivo del tema función cuadrática, la idea de modelo es un concepto transversal en la enseñanza de la matemática.

Se podría aún agregar otra pregunta: *analizar para que valores la ganancia da 0,* y discutir con los alumnos qué sentido tendría que a pesar de cobrar algo por hora, se gane cero. La explicación podría ser: "lo recaudado apenas alcanza para los gastos fijos". Este fenómeno habilitaría también la posibilidad de obtener ganancia negativa.

Con este problema se espera que los alumnos acepten que a partir de una fórmula –que no ha sido producida por ellos– es posible obtener nueva información de la situación modelizada por esa función.

Para seguir trabajando sobre la misma situación se puede dejar la siguiente tarea a cargo de los alumnos:

Y si la fórmula de la ganancia fuera $G(p) = 400 - 3(p - 170)^2$

a) ¿Pueden dar dos valores de p que den la misma ganancia?

b) ¿Cuál sería la máxima ganancia y para qué precio?

Se busca que los alumnos resuelvan este problema leyendo información de la fórmula y sin hacer una tabla de valores.

El problema 1 plantea un trabajo sobre la fórmula en contexto, se propone ahora un conjunto de problemas sin contexto. Estos propician, al igual que el anterior, que los alumnos aprendan a "leer" información de la fórmula. Incluimos, en el anexo 2, el relato de una profesora sobre el trabajo de sus alumnos con este problema.

PROBLEMA 2

Dada la siguiente función $f(x) = (x - 2)^2 + 4$

a) Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = 5$. ¿Cuántos hay?

b) Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = -3$. ¿Cuántos hay?

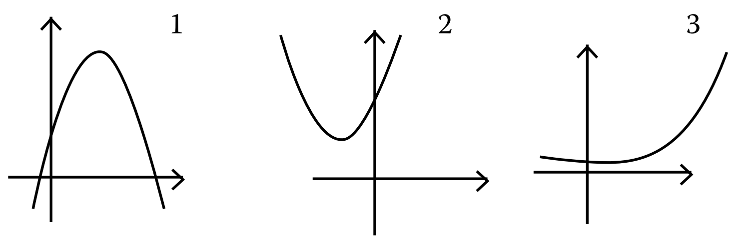
c) Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = 2$. ¿Cuántos hay?

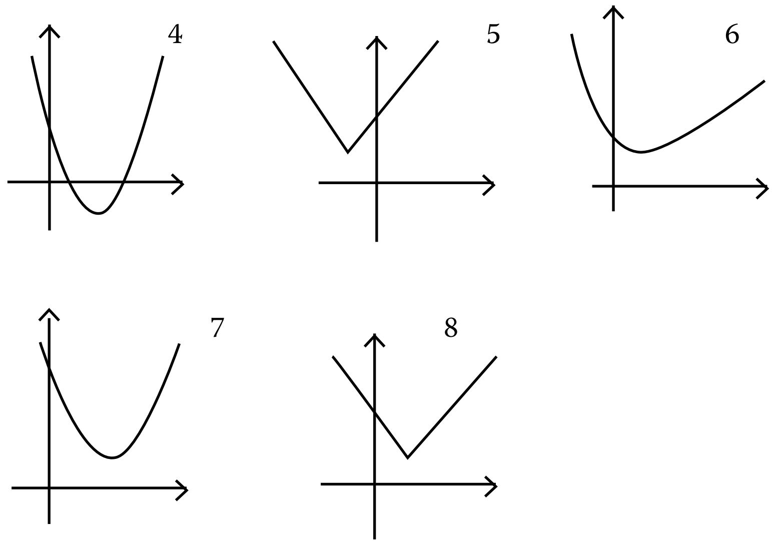
d) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 13. ¿Cuántos hay?

e) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 3. ¿Cuántos hay?

f) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 4. ¿Cuántos hay?

g) Analicen cuáles de los siguientes gráficos podría corresponder con la función analizada.





Comentarios

Los primeros ítems de esta actividad requieren de un trabajo algebraico y con ecuaciones como el que se ha desplegado en el problema anterior.

Vamos a utilizar el término “compañeros” para designar los valores de **x** que tienen la misma imagen. Este término, no matemático, fue tomado de un curso donde se trabajó con estos problemas. Lo hemos incorporado porque los alumnos se apropian rápidamente del término y facilita la comprensión del concepto de valores con la misma imagen.

El ítem c) se puede aprovechar para discutir: ¿cómo muestra la fórmula que el 2 no tiene compañero?

A partir de los ítems d), e) y f) se puede reflexionar que:

- hay valores de la variable *y* que son imagen de dos valores de **x** “compañeros”,
- hay un único valor de *y* que es imagen de un solo valor de **x**,
- hay valores de *y* que no son imagen de ningún valor de **x**.

Se deja para el problema 4 la definición y el reconocimiento del conjunto imagen de la función.

Sería interesante trabajar con los chicos que el ítem f) se puede responder trabajando con ecuaciones o con la lectura de la fórmula sin necesidad de “despejar”.

En el ítem g) la idea es recuperar lo estudiado en los ítems anteriores para identificar características del gráfico. Los alumnos podrían comenzar seleccionando los gráficos que corresponden a una función con mínimo en **x** = 2. Para descartar los dos gráficos rectilíneos podrían armar una tabla de valores y analizar, a partir de la tabla, que el crecimiento no es uniforme. Esto incluye discutir qué valores de **x** elegir para el análisis. Finalmente, habrá que poner en juego cierta simetría del gráfico, considerando distintos pares de "compañeros".

Con lo trabajado hasta aquí, los alumnos han comenzado a reconocer máximo y mínimo de una función tanto a partir de la gráfica de la función como analizando su fórmula. El problema siguiente pretende afianzar ese concepto.

PROBLEMA 3

Dadas las siguientes funciones, hallar el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una de ellas y en qué valor de x lo alcanza.

a) $f(x) = (x + 5)^2 - 4$

b) $g(x) = -2(x - 5)^2 + 1$

c) $h(x) = 5 - (4x + 3)^2$

d) $i(x) = (7x - 5)^2 + 18$

Comentarios

Para los alumnos, las cuatro fórmulas pueden parecer muy diferentes. Proponemos un trabajo de análisis para empezar a identificar características comunes.

¿Dónde hay que focalizar o "poner el ojo" para hallar el máximo o el mínimo de la función? No nos interesa imponer una regla de búsqueda de máximo o mínimo.

Apuntamos a que en el aula surja que:

- En todos estos casos la fórmula consta de un término constante y otro término cuadrático.
- Si el término cuadrático está restando a la constante, los valores de la función serán siempre menores que la constante, por lo tanto el máximo valor de la función es esa constante. Ese máximo se alcanza en el valor de **x** que anula la expresión que está adentro del paréntesis.
- Si el término cuadrático está sumando, los valores de la función serán siempre mayores que la constante por lo tanto el mínimo es esa constante. Ese mínimo se alcanza en el valor de **x** que anula la expresión que está adentro del paréntesis.
- Notemos que las fórmulas que se dan para las funciones *h* e *i*, requieren algo más que la "lectura de información" para calcular el valor dónde alcanzan máximo o mínimo.

PROBLEMA 4

Dada la función $f(x) = (x + 3)^2 - 9$.

a) Decidir, en cada caso, si es cierta la afirmación:
   i) Hay dos valores de **x** tales que $f(x) = 160$.
   ii) Hay dos valores de **x** tal que $f(x) = 5$.
   iii) Hay dos valores de **x** tal que $f(x) = -20$.

b) Para cada una de las siguientes frases, completarlas con un número para que resulten verdaderas:
   i) Hay un único valor de **x** tal que $f(x) =$ ....
   ii) No hay valor de **x** tal que $f(x) =$ ....
   iii) Hay tres valores de **x** tales que $f(x) =$ ......

c) Hacer un gráfico aproximado de la función *f*.

Comentarios

En este problema se pone el foco en el estudio de las imágenes y pre-imágenes y en la determinación del conjunto imagen. Tanto en el inciso a) como en el b) sería interesante que los alumnos puedan responder sin hallar los valores de **x**, es decir, sin necesidad de hacer cuentas, aunque dispongan de ellas.

Por ejemplo en el primer ítem del inciso a), considerando que el mínimo valor de la función *f* es –9, se puede deducir que hay valores de x para los cuales $f(x) = 160$; para ver que hay dos valores de **x** los alumnos se podrán apoyar en lo estudiado en el problema 2. En este caso se trata de encontrar dos valores de x de manera que $(x + 3)^2$ es igual a *169*.

Una vez resueltos los tres ítems del inciso a), sería interesante analizar con los alumnos si se puede cambiar el 160, el 5 y el –20 por otros números, de tal manera que las frases anteriores mantengan el mismo valor de verdad. “Mantener el mismo valor de verdad” es un enunciado que tiene cierto grado de complejidad; cada docente puede enunciarlo oralmente en el aula de forma que sea comprensible para sus alumnos.

De esta discusión debería emerger la particularidad del valor $y = -9$.

Esto servirá de apoyo para la parte b) del problema. Los distintos valores que den los alumnos para responder i) y ii) permitirá discutir entre todos: ¿cuáles serían todos los valores con los que se pueden completar las frases para que resulten verdaderas?

Lo trabajado en las partes a) y b) puede funcionar como insumo para realizar el gráfico que se pide en el inciso c). La idea es discutir antes con los alumnos de manera de anticipar algunas características del gráfico. Por ejemplo, podrían ubicar el mínimo, y afirmar que no podría tener “curvitas que suben y bajan”, porque en ese caso habría valores de $f(x)$ que tienen más de dos preimágenes.

Recorridos estos cuatro problemas con los alumnos, el docente puede ir informando que "este tipo de curva" –nos referimos al gráfico– se denomina parábola. Reuniendo las características encontradas durante el trabajo, se puede hablar de un aspecto redondeado en forma de U, que sube y después baja o al revés, que tiene un máximo o un mínimo al que llamamos *vértice*. No es nuestra intención definir formalmente la parábola y no sería posible "demostrar" con los alumnos que, efectivamente, los gráficos de este tipo de fórmulas tienen forma de U. Sin embargo, esta caracterización resulta útil para seguir avanzando.

PROBLEMA 5

Dada la función $f(x) = (2x - 5)^2 + 14$, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no:

a) El gráfico de $f(x)$ corta al eje **x**.
b) $f(8) = 135$.
c) $f(-8) = -135$
d) $f(1) = 5$
e) El valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = 5$.

Comentarios

En este problema se ponen en juego distintas formas de validar una afirmación: en los incisos b), c) y d) alcanza con calcular el valor de la función $f(x)$ para un determinado valor de **x**, mientras que en el primero y en el último de los incisos es necesario hacer un análisis de la fórmula.

Una vez trabajados los problemas anteriores se podría hacer en el aula una reflexión sobre el tipo de fórmulas que estamos estudiando: registrar qué información se puede leer en la fórmula, cómo calcular imágenes y preimágenes, cómo leer en la fórmula el máximo o el mínimo de la función o cómo hallar pares de valores que den la misma imagen. En los problemas del capítulo anterior, estas cuestiones se resolvían apoyándose en el contexto; ahora se analizan con la lectura de la fórmula que define a la función.

Sabemos que queda pendiente el hecho de que, si desarrolláramos el paréntesis en estas fórmulas, obtendríamos una expresión donde ya no es tan fácil leer información.

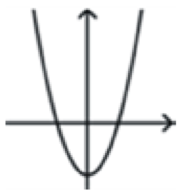
Por ahora, seguiremos un tiempo más estudiando las funciones cuadráticas cuando vienen dadas por una fórmula "acomodada", como en los problemas anteriores.

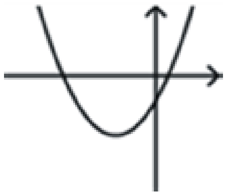
Problema 6

Dadas las siguientes fórmulas y gráficos de funciones, relacionar las fórmulas con los gráficos.

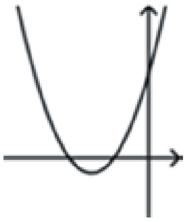
$f(x) = (x - 2)^2$ $g(x) = (x + 5)^2 - 4$ $h(x) = -(x - 3)^2 + 4$

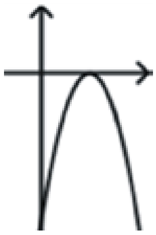
$t(x) = 2\ (x + 5)^2 + 2$ $k(x) = 4 - (2x - 1)^2$

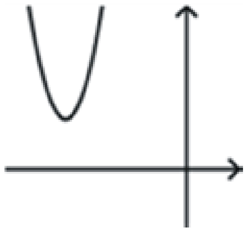
1)


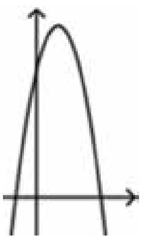
2)


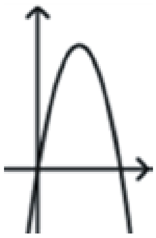
3)

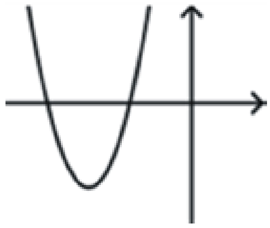

4)


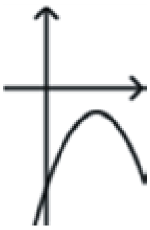
5)


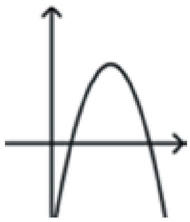
6)


7)


8)


9)


10)


11)


Comentarios

Este problema propone profundizar la relación gráfico-fórmula, afinando la lectura de información que se puede hacer en cada uno de estos dos registros de representación de la función.

Una primera lectura de información puede identificar varios gráficos como posibles para una fórmula. Por ejemplo, en el caso de la función h, tanto el gráfico 7 como el 8 y el 11 pueden corresponder, porque son parábolas cóncavas hacia abajo y sus vértices podrían ser el punto de coordenadas (3; 4). Para elegirlos o descartarlos será necesario recurrir a mayor información. Un punto del gráfico que puede considerarse para tomar esta decisión podría ser la intersección de la parábola con el eje **y**; la fórmula informa que ese punto debe tener la segunda coordenada negativa, lo cual permite descartar los gráficos 7 y 8.

Es probable que muchos chicos consideren que la ordenada al origen es "el número que suma o resta en la fórmula" (el término constante, en este caso 4), extendiendo lo trabajado en función lineal. Es interesante rescatar que la ordenada al origen (el valor de la función para $\mathbf{x} = 0$) se puede "leer" en una fórmula lineal del estilo $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, ya que cuando $\mathbf{x} = 0$ resulta $f(0) = \mathbf{b}$; al mismo tiempo, habrá que analizar por qué esa lectura no es válida con estas fórmulas cuadráticas.

También se podría identificar qué características o elementos de la fórmula inciden en la orientación de las ramas de su gráfico. Se podrá analizar que si el término cuadrático suma a la constante, habrá mínimo y esto implica que el gráfico tendrá ramas hacia arriba. En cambio, si el término cuadrático resta a la constante, habrá un máximo y, por lo tanto, las ramas del gráfico serán hacia abajo.

Proponemos no incorporar en este momento el estudio de las raíces de la función. Se dejaría para más adelante (ver problema 10).

Los dos problemas que siguen tienen la finalidad de estudiar la simetría de la parábola.

Problema 7

Dada la siguiente función $y = (x - 3)^2 - 5$

a) Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = 0$. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

b) Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = -1$. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

c) Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = 1$. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

Comentarios

En el inciso a), la idea es que los alumnos –quizás con intervención del docente– busquen otro valor de x para el cual $(x - 3)^2 = 9$; de aquí resulta que $(x - 3)$ debe ser 3 ó –3, pero –3 se logra con $\mathbf{x} = 0$; entonces, el otro valor buscado proviene de la condición $\mathbf{x} - 3 = 3$, de lo cual resulta $\mathbf{x} = 6$. Es una manera "artesanal" de trabajar con una ecuación cuadrática sin necesidad de contar con una fórmula o un procedimiento estandarizado para hallar las raíces.

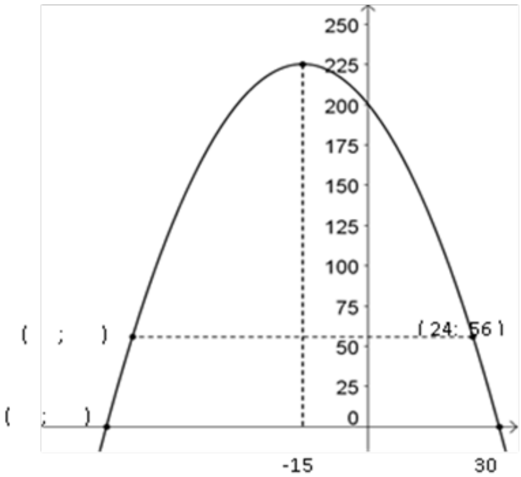
Del mismo modo se podrán trabajar los otros incisos.

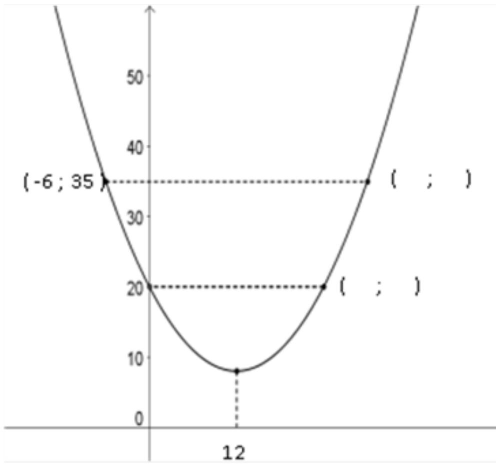
A partir de las respuestas de los chicos a los tres incisos, el docente podría llamar la atención sobre el hecho de que cada par de compañeros son puntos simétricos en la recta, respecto de la abscisa del vértice. Esto se corresponde con que el término cuadrático da el mismo resultado para los dos valores.

Esta simetría de los compañeros puede "verse" en los puntos de la parábola y lleva a identificar un eje de simetría. De eso trata el siguiente problema.

PROBLEMA 8

Para las siguientes parábolas, completen las coordenadas de los puntos marcados:





Comentarios
En este caso, el docente podría preguntar si estos gráficos tienen un eje de simetría y proponer a los alumnos que identifiquen cuál es ese eje de manera gráfica y numérica.

Se podrá concluir que cada par de compañeros, permite encontrar dos puntos de la parábola que se ubican, en el gráfico, "a la misma altura" y de forma simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola a la que identificaremos como su eje de simetría.

PROBLEMA 9

Justificar la respuesta en cada caso:

a) ¿Es posible que una parábola pase por los puntos (100; 1) y (–100; 1) y que su vértice sea (0; 2)?

b) ¿Cuál puede ser el vértice de una parábola que pasa por los puntos (0; 2), (10; 2)?

c) ¿Es posible que un parábola pase por los puntos (–126; 8) y (124; 8) y su vértice sea (2; 1)?

d) ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del vértice de una parábola que pasa por los puntos (–235; 15) y (242; 15)?

e) ¿Es posible que una parábola con vértice en el punto **v** = (0; –3) pase por los puntos (4; 2) y (–4; –2)?

Comentarios

En esta actividad no se ofrece ni la fórmula ni el gráfico. Es un problema para seguir reflexionando acerca de la simetría. El interés radica en los argumentos que los alumnos tienen que elaborar para responder cada una de las preguntas y en la identificación de que el eje de simetría determina la abscisa del vértice pero no su ordenada.

Por ejemplo, en el inciso a) no se tiene la fórmula, y los valores grandes no invitan a graficar (100; 1) y (–100; 1); la respuesta tendrá que apoyarse en que 100 y –100 son compañeros y, por lo tanto, la abscisa del vértice tiene que ser **x** = 0; además, la ordenada del vértice puede ser cualquiera menos el mismo valor 1; por lo tanto, es posible que valga 2.

PROBLEMA 10

Hallar el vértice de cada parábola. Estudiar si la parábola corta al eje **x**, y dónde.

a) $y = 2(x - 2)^2 + 1$

b) $y = -(x + 2)^2 + 4$

c) $y = -2(3x - 1)^2 - 12$

d) $y = (2x + 2)^2 - 9$

e) $y = 4(x + 2)^2 - 1$

f) $y = (2x + 2)^2 - 1$

g) $y = 4(x - 2)^2$

h) $y = x^2$

Comentarios

Lo nuevo de este problema es que obliga a encontrar las raíces o ceros de la función cuadrática; los alumnos pueden anticipar la existencia y cantidad de ceros a partir de lo trabajado anteriormente.

Se quiere decir con esto, que los alumnos no necesitan, en principio, resolver la ecuación cuadrática $f(x) = 0$, para saber si tiene o no solución; pueden apoyarse en la lectura de la fórmula, porque ya saben determinar el vértice, y si las ramas de la parábola van hacia arriba o hacia abajo. Pueden anticipar si la parábola cortará o no al eje **x**.

Además el trabajo hecho con "compañeros" permitirá controlar que los valores obtenidos sean simétricos respecto de la abscisa del vértice, o bien, encontrar uno de los ceros a partir de la fórmula y calcular el otro por simetría.

Los números están puestos intencionalmente para que las soluciones, si las hay, sean todas racionales.

Es posible que algunos alumnos planteen la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ y la resuelvan. En ese caso, puede suceder que en el despeje se pierda una solución. El trabajo hecho anteriormente y la anticipación de la cantidad de ceros de la función, le permite al docente hacer una reflexión acerca de la resolución de una ecuación cuadrática de este tipo: si $x^2 = \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{x} = \pm\sqrt{\mathbf{a}}$.

El docente puede aprovechar este problema para informar que los valores de **x** donde la parábola corta al eje horizontal se llaman ceros o raíces de la función.

Con lo trabajado hasta el momento, se podrían identificar las siguientes nuevas cuestiones:

- la abscisa del vértice es el valor de **x** que hace 0 el paréntesis del término cuadrático;
- la ordenada del vértice es la constante de la fórmula;
- el signo del coeficiente que multiplica al término cuadrático determina si las ramas de la parábola van para arriba o para abajo;
- la identificación del vértice y el signo del coeficiente que multiplica al término cuadrático, permiten anticipar si habrá o no raíces.

El problema siguiente vuelve sobre la relación gráfico $\longleftrightarrow$ fórmula.

Problema 11

Dadas las siguientes funciones y gráficos, relacionar cada una de las fórmulas con uno de los gráficos:

1) $y = 4(x + 3)^2 - 1$

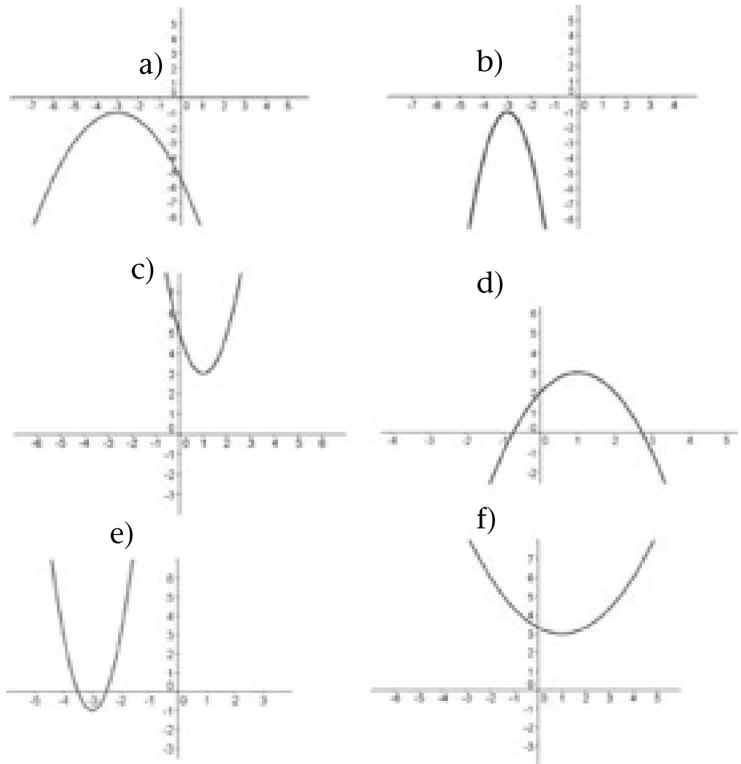
2) $y = -(x - 1)^2 + 3$

3) $y = -3(x + 3)^2 - 1$

4) $y = 2(x - 1)^2 + 3$

5) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

6) $y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 + 3$



Comentarios

En este problema se eligieron pares de fórmulas similares, que difieren solamente en el coeficiente que acompaña al término cuadrático. La idea es identificar cómo se muestra en los gráficos esa diferencia. Por ejemplo, las parábolas que corresponden a las funciones 4) y 6) tienen el mismo vértice y ramas hacia arriba. Para distinguirlas, los alumnos podrán buscar dónde cortan al eje y. Con el soporte del docente se puede reflexionar en el aula cómo influyen los coeficientes 2 y $\frac{1}{3}$ en la apertura de las ramas de la parábola.

De forma similar se pueden diferenciar las parábolas correspondientes a las funciones 3) y 5).

Se les podría pedir a los alumnos que marquen en los gráficos los ceros de cada función y encuentren sus coordenadas.

En los dos problemas siguientes, los alumnos tendrán que producir una fórmula para una función que cumpla determinadas condiciones.

PROBLEMA 12

Si es posible, escribí lo que se indica (si no es posible, explicá por qué).

a) La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 9 en $x = 5$. ¿Hay una sola posibilidad?
b) La ecuación de una parábola que tenga un máximo igual a 8 en $x = -7$, y que pasa por el punto (5; 1).
c) La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 3 en $x = 7$ y pase por el punto (5; 0).
d) La ecuación de una parábola que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no corte al eje de las abscisas.
e) Las ecuaciones de dos parábolas que pasen por los puntos (4; 9) y (8; 9).

Comentarios

Este problema permite a los alumnos la posibilidad de "ensayar" distintas fórmulas y controlar de manera autónoma si responden a las condiciones pedidas.

Una posibilidad interesante, es tomar las propuestas de los alumnos y hacer un trabajo de "chequeo" colectivo para decidir si son correctas o no. Es probable que aquellos alumnos que no hayan podido proponer una fórmula como la pedida, puedan involucrarse en la tarea de controlar las respuestas de los otros. Las explicaciones de sus compañeros pueden permitirle construir nuevas relaciones y comenzar a producir respuestas propias.

Este problema requiere una síntesis de la información y una sistematización acerca de la influencia de cada parte o elemento de la fórmula sobre el comportamiento global de esta.

En el inciso a) no es necesario poner atención al coeficiente que acompaña al término cuadrático, pero la pregunta acerca de si hay otras posibilidades habilita a la reflexión de la influencia de tal coeficiente en la fórmula. En cambio, en el inciso b) no es posible desatender la influencia de este coeficiente, y es por esto que se vuelve más compleja la resolución. Será interesante, entonces, dedicarle un espacio a la discusión del ítem a) para aprovecharla en b). Se puede proponer, primero, la búsqueda de una función que tenga el vértice pedido (teniendo en cuenta la variedad de posibilidades) para luego poner el foco en el coeficiente que acompaña al término cuadrático e ir ajustándolo para que se cumpla que pase por el punto (5; 1).

A partir de los puntos b) y c) se puede llegar a formular y validar que "siempre hay una parábola con un vértice dado y que pase por otro punto que no tenga la misma ordenada que el vértice. Esta parábola es la única que cumple con esas condiciones".

Al finalizar esta tercera parte, los alumnos están en condiciones de decidir, dada la expresión cuadrática del tipo $a(bx - c)^2 + d$, si la parábola tiene ramas hacia arriba o hacia abajo, dónde está el vértice y el eje de simetría de la parábola, cuáles son las coordenadas de los puntos donde la parábola corta a cada uno de los ejes y, por ende, ya pueden reconocer su gráfico.

Capítulo 4

Estudio de la función cuadrática a partir de distintas escrituras de su fórmula

En los capítulos anteriores los alumnos resolvieron problemas que ponían en juego conocimientos sobre la parábola. Tuvo un lugar importante la lectura de información que provee una fórmula de tipo canónica (o más en general, de la forma $\mathbf{a(bx - c)^2 + d}$), sobre el tipo de variación de una función cuadrática y el gráfico que la representa. En este capítulo, el trabajo se amplía a distintas expresiones algebraicas de una función cuadrática.

Las primeras actividades instalan en el aula la idea de que hay distintas formas de escribir la fórmula de una función cuadrática y que cada una de ellas porta una información particular sobre la parábola.

Se plantea luego un conjunto de problemas que focalizan o ponen el "ojo" en la búsqueda de máximos y mínimos; al principio, con problemas en contexto que requieren de la modelización algebraica para su resolución; la fórmula –o las fórmulas– de una función cuadrática aparece como necesidad para resolver el problema y la búsqueda de máximos se apoya en el análisis de los datos que aporta la lectura de la fórmula. Para seguir elaborando estos asuntos, se propone hacer el mismo trabajo con funciones dadas por una fórmula sin contexto.

Poniendo en juego todos estos conocimientos, los alumnos ya estarían en condiciones de calcular los ceros de una función cuadrática a partir de una fórmula cualquiera.

Para esto hay que tener en cuenta:

- Si se conocen dos compañeros de una función cuadrática, se puede calcular la abscisa del vértice de la parábola. Si además se tiene alguna fórmula para calcular $f(x)$, entonces se puede calcular la ordenada del vértice.
- A partir de la fórmula desarrollada se puede calcular el compañero del "0", y luego las coordenadas del vértice.
- Si se conoce el vértice y un dato más, se puede armar una fórmula en forma "canónica".
- Entonces, partiendo de una fórmula cualquiera para la función, se puede llegar a la forma canónica y a partir de esta es posible calcular los ceros.

A lo largo de este capítulo se proponen varios problemas para el análisis de cada una de estas cuestiones.

Finalmente, se generaliza el procedimiento para calcular los ceros de la función cuadrática a una fórmula cualquiera $\mathbf{ax^2 + bc + c}$. Se obtiene así la fórmula general de la resolvente que se usa habitualmente para calcular los ceros de la función.

La fórmula: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

estará, de este modo, dotada de sentido por el trabajo que se hizo hasta el momento. Si los alumnos conocían esta fórmula de algún aprendizaje anterior (por ejemplo, de las clases de Física), encontrarán ahora una fundamentación de aquello que aplicaban mecánicamente.

Es habitual que los alumnos usen esta fórmula sin mucho control sobre lo que están haciendo, y con dificultades para interpretar ciertos resultados. Que los alumnos accedan a una fundamentación de la fórmula, apoyada en su propio trabajo, puede aportar a la construcción de sentido y al desarrollo de estrategias de control.

Una vez que los alumnos conocen la fórmula resolvente, la podrán utilizar y elegir como una estrategia de resolución más económica.

El estudio de este tema en la escuela continuaría con la resolución de ecuaciones de segundo grado. Las soluciones de una ecuación de segundo grado, $\mathbf{ax^2 + bc + c = d}$ (en un determinado dominio) se pueden pensar a partir de la función cuadrática $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, definida en el mismo dominio, como el conjunto de valores de **x** que cumple $\mathbf{f(x) = d}$. En particular, cuando $\mathbf{d = 0}$ resultan las raíces o ceros de la función **f(x)**.

En este documento hemos optado por no incluir el tratamiento de las ecuaciones de segundo grado. Problemas interesantes sobre esta temática pueden encontrarse en los libros de texto actuales.

PROBLEMA 1

Marcar todas las fórmulas que pueden corresponder al primer gráfico del problema 8 del capítulo anterior. Explicar por qué.

a) $y = -\frac{1}{9}\,(x + 15)^2 + 225$

b) $y = \frac{1}{9}\,(x + 15)^2 + 225$

c) $y = -\frac{1}{9}\,(x + 60)\,(x - 30)$

d) $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}\,x + 225$

e) $y = \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{30}{9}\,x + 200$

f) $y = -\frac{1}{9}\,x^2 - \frac{30}{9}\,x + 200$

Comentarios

Es probable que los alumnos comiencen analizando las fórmulas dadas en a) y b) que están expresadas en la forma canónica que ya conocen. Para identificar cuál de las dos funciones corresponde al gráfico mencionado, los alumnos pueden comenzar leyendo en la fórmula las coordenadas del vértice. Pero esto no alcanza para decidir, cualquier fórmula de la forma $\mathbf{a \cdot (x + 15)^2 + 225}$ sirve.

Se puede entonces probar con las coordenadas de cualquiera de los otros tres puntos que se conocen del gráfico –retomando lo trabajado en el problema 12 b) de la parte 3– para decidir que el parámetro **a** es –1/9. También se puede elegir analizando que la fórmula dada en a) tiene máximo y la dada en b) tiene mínimo.

El docente puede proponer a los alumnos que construyan una fórmula que corresponda al gráfico y recién entonces optar por a) o b).

Una vez elegida la función del inciso a), los alumnos pueden decidir cuáles de las otras fórmulas son expresiones algebraicas equivalentes, por medio de un trabajo algebraico, eliminando los paréntesis. Podrán concluir entonces que las fórmulas de los incisos c) y f) definen la misma función y corresponden al mismo gráfico. En relación con la fórmula c), es una oportunidad para relacionar los ceros de cada paréntesis con los puntos del gráfico sobre el eje de las **x**.

Con este problema y el que sigue se pone en juego la idea de que hay distintas fórmulas para una misma función cuadrática. En particular, en el problema 1 se incorporó la lectura de información de una fórmula factorizada. En el problema 2 se propone analizar qué datos de la parábola y de la función –los ceros, el vértice, el eje de simetría– se pueden obtener a partir de la lectura de cada una de las fórmulas.

PROBLEMA 2

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones tienen el mismo gráfico que $\mathbf{y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4{,}5}$?

I) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

II) $y = -\frac{1}{2}(x - 4)(x + 2)$

III) $y = -\frac{1}{2}(5x - 5)^2 + 4{,}5$

IV) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)\,x + 4$

V) $y = -\frac{1}{2}(x - 6)(x + 4) - 8$

b) Considerando todas las funciones de la parte a), ¿en cuáles de las fórmulas podés "leer" dónde está el vértice de la parábola que define? ¿En cuáles podés "leer" cuáles son sus raíces?

c) ¿Qué informaciones podemos obtener a partir de las fórmulas IV) y V)?

Comentarios

Para resolver la primera pregunta es necesario desarrollar los distintos paréntesis. Resultan equivalentes a la fórmula original, la I, la II, la IV y la V.

En cuanto a la pregunta b), se trata de que los alumnos entren en el juego de leer información de cada fórmula.

Por ejemplo, en la expresión II, un alumno puede leer cuáles son las raíces de la función, puede deducir que el vértice tiene abscisa igual a 1 y calcular la ordenada del vértice (ya sabe que se trata de una parábola, pues la fórmula es equivalente a la original).

Se trata de leer información de una fórmula y ponerla en relación con los conocimientos que se construyeron antes.

Las fórmulas IV y V requieren alguna intervención docente: en la IV se puede leer que el 2 y el 0 son compañeros por tener ambos ordenada 4; similarmente, en la V, si asume que esta fórmula también corresponde a una parábola, se puede leer que 6 y –4 son compañeros, porque ambos tienen ordenada –8. A partir de estos datos, es posible calcular las coordenadas del vértice.

La idea es que se reconozca que la fórmula I no permite "leer" la información necesaria para contestar las preguntas directamente.

La fórmula original, la I, la II, la IV y la V, son cinco expresiones algebraicas equivalentes y definen la misma función, pero en cada una podemos leer diferente información. Es una propiedad fundamental del lenguaje algebraico el que se está poniendo en juego en este ejemplo: una misma función admite diferentes escrituras de su fórmula, y cada una de ellas "porta" una información visible diferente.

Dada cualquiera de estas expresiones, ¿cómo sabe el alumno que su gráfico tendrá la forma de una parábola? ¿Cuáles son todas las fórmulas cuyo gráfico tiene la forma de una parábola?

Este puede ser un buen momento para que el docente defina: "Se dice que una función f es cuadrática siempre que la expresión desarrollada (o expresión sin paréntesis) de su fórmula sea de la forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, con **b** y **c** números cualesquiera incluso 0, pero $\mathbf{a} \neq 0$".

Y adelante una información que todavía no puede fundamentarse: "El gráfico de toda función cuadrática es una parábola".

Los alumnos ya saben esto en el caso en que la fórmula está dada en forma canónica (es todo el trabajo realizado en el capítulo 3), pero todavía no saben que toda expresión cuadrática admite una escritura canónica. Es lo que aprenderán al resolver los problemas de este capítulo.

A continuación, se proponen dos problemas en contexto en los cuales se pregunta por un valor máximo. La complejidad de los problemas reside en la construcción de un modelo algebraico de la situación, para resolverlos.

En ambos casos se obtiene una fórmula factorizada de una función cuadrática, a partir de la cual se puede calcular el máximo de la función.

PROBLEMA 3

En una chacra se quiere cerrar un área rectangular para la huerta aprovechando una pared existente. Para hacer los otros tres lados del rectángulo se dispone de 170 m de tejido metálico.

a) ¿Cuál será el área de la huerta, si uno de los lados de la cerca mide 30 m?
b) Hallar las dimensiones de la cerca para que la huerta tenga la mayor superficie posible.

Comentarios
La primera pregunta ubica a los alumnos en el contexto y los convoca a investigar la relación de dependencia entre las dos dimensiones del rectángulo. Si fuera necesario, el docente puede explicitarles que busquen una fórmula que relacione las dos dimensiones.

Para calcular el área, se puede elegir como variable independiente cualquiera de las dos dimensiones de la cerca, y resultarán entonces dos modelos algebraicos posibles y válidos para la misma situación:

Modelo A
Área de la huerta (x) $= x \cdot (170 - 2x)$
donde ***x*** es la medida de los lados adyacentes a la pared
Modelo B
Área de la huerta (z) $= z \cdot \dfrac{170 - z}{2}$
donde z es la medida del lado opuesto a la pared.
(Seguramente en un aula las dos fórmulas van a ser escritas con la misma letra, **x**).

El docente puede alentar a los alumnos a analizar si las fórmulas obtenidas son o no equivalentes, y destacar que la variable independiente representa longitudes de distintos lados en una y otra función. Hay diferentes modos de abordar este estudio:

- las dos expresiones no son equivalentes porque para un mismo valor de la variable dan resultados diferentes.
- otra manera es hacer transformaciones algebraicas en una y otra fórmula para llegar a una expresión desarrollada de las dos fórmulas y controlar que son diferentes.
- un tercer modo que puede proponer el docente es hacer los gráficos de las dos funciones, para ver que sus gráficos son distintos.

Sería interesante que todos estos modos convivan en un aula y sean puestos en relación. Este análisis permitiría profundizar la noción de expresiones equivalentes.

Las dos expresiones estudiadas permiten calcular el área de la huerta y alcanzan el mismo valor máximo, aunque en distintos valores de la variable independiente.

Cualquiera sea la fórmula producida, ¿cómo podría el alumno reconocer que hay un máximo y encontrarlo? Las fórmulas corresponden a una función cuadrática; ellos saben entonces que el gráfico es una parábola y que el valor máximo de las funciones se corresponde con la ordenada del vértice.

Si se elige el modelo A, los ceros de la función son 0 y 85, y pueden leerse esos valores en la fórmula. El vértice está en el eje de simetría, y por lo tanto tiene abcisa $\mathbf{x} = 42{,}5$. El máximo será la ordenada del vértice: $42{,}5 \cdot (170 - 2 \cdot 42{,}5) = 3.612{,}5$.

Si se elige el modelo B, los ceros son 0 y 170. La abcisa del vértice es $\mathbf{z} = 85$, y el máximo será $85 \cdot \frac{170 - 85}{2} = 3.612{,}5$.

Cualquiera sea entonces el modelo que se utilice, las dimensiones de la cerca para obtener una huerta de área se obtendrán de la operación se obtendrán de la operación 42,5 x 85.

Puede suceder también que los alumnos, antes de pensar en una fórmula, calculen el área para distintos valores de las dimensiones de la cerca.

En un curso donde se probó el problema, los alumnos asumieron rápidamente que se trataba de una función cuadrática, porque armaron una tabla de valores, observaron que al aumentar el valor de **x**, el valor del área subía pero luego bajaba, y pudieron encontrar valores diferentes de *x* en los que la función área daba igual (por ejemplo, 40 y 45).

Para ellos, esto fue suficiente para concluir que se trataba de una cuadrática y calcularon el valor dónde se alcanzaba máximo como el punto medio entre dos valores "compañeros".

La intervención docente entonces fue pedirles que justificaran el hecho de que se trataba de una parábola:"¿No puede tratarse de otra función? ¿Por ejemplo, de una función módulo?"

En este caso, la búsqueda de la fórmula estuvo motivada por la necesidad de justificar que se trataba de una función cuadrática.[11]

En otro curso, una docente cambió el número 170 por 171, con el objeto de hacer más difícil la obtención del vértice a partir del cálculo de algunos valores en la función. En este curso, los alumnos tuvieron que producir una fórmula para poder hallar el valor máximo.

PROBLEMA 4

El dueño de un ciber decidió emplear un sistema de socios con un cargo fijo durante el mes, para los clientes habituales. El sistema consiste en que los clientes se hacen socios y pagan una cuota fija por mes, que los autoriza a utilizar las computadoras cuando quieran y el tiempo que quieran. La cuota salía $26, y se hicieron socios 100 personas. Luego de variar el precio algunas veces, el dueño registró que por cada $1 que aumentaba, siempre perdía 2 socios. Suponiendo que esto es cierto, respondé las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto recaudó, cuando la cuota salía 26?
b) ¿Con cuántos socios se va a quedar, si aumenta la cuota $4? ¿Ycuánto recaudará en ese caso?
c) Propongan otros posibles aumentos e indiquen cuántos socios quedarán y cuánto recaudará el dueño en esos casos.
d) Propongan una fórmula que permita calcular cuánto dinero va a recaudar por mes, dependiendo de cuánto se aumente la cuota.
e) ¿Podrías decir cuánto tiene que aumentar el dueño para obtener la máxima recaudación? ¿Y cuál sería esa recaudación?
f) Proponé otra fórmula que permita calcular el dinero que se va a recaudar en función del valor de la cuota.

Comentarios

Este problema tiene una estructura similar al anterior, pero la producción de una fórmula que permita calcular lo recaudado y su lectura son más complejas.

Para llegar a la fórmula $(26 + x) \,.\, (100 - 2 \,.\, x)$, incorporamos los ítems intermedios b) y c). Dependiendo del curso, el docente decidiría si estos ítems son necesarios.

Antes de la pregunta d), el docente podría reunir las repuestas sobre la recaudación y dejar escrito en el pizarrón la traza de las operaciones efectuadas. Por ejemplo: b) $(100 - 2 \cdot 4)\ (26 + 4) = 92 \cdot 30$

Se puede luego construir una tabla los valores y preguntar cuál sería una expresión para lo recaudado para un **x** cualquiera:

11 Ver, en el anexo 2, un relato pormenorizado de esta clase.

Si aumenta	Recauda
2	$28 \cdot 96$
3	$29 \cdot 94$
4	$30 \cdot 92$
……	…….
x	¿?

Una vez obtenida la fórmula $(26 + x) \cdot (100 – 2 \cdot x)$, se pueden calcular los ceros de la función cuadrática, buscando los ceros de cada paréntesis: $26 + x = 0$ y $100 – 2x = 0$. Se obtiene así –26 y 50. Para hallar el máximo, se busca la ordenada del vértice de la parábola, cuya abcisa se encuentra al sumar a –26 la mitad de la distancia entre –26 y 50, es decir: $–26 + 38 = 12$.

El máximo valor de la recaudación es entonces **$(26 + 12) \cdot (100 – 2 \cdot 12) = 38 \cdot 76 = 2.888$.**

En el ítem f), la fórmula para calcular la recaudación en función del valor de la cuota es:
$x \cdot (100 – 2(x – 26))$.

En este caso, los ceros de la función son 0 y 76. La abcisa del vértice resulta 38, y el valor máximo de la recaudación resulta $38 \cdot (100 – 2(38 – 26)) = 2.888$, el mismo valor que se obtuvo antes.

Como en el problema anterior, se está en presencia de dos expresiones no equivalentes que modelizan la situación, que calculan lo mismo, pero con variables independientes diferentes.

En el problema que sigue se plantean fórmulas de funciones para profundizar en la búsqueda de máximos y mínimos de manera descontextualizada.

Problema 5

Para cada una de las siguientes funciones, decidir si tienen máximo o mínimo, y hallarlo.

a) $f(x) = –2(x – 3)(x + 5)$
b) $g(x) = (7x – 3)(x + 5)$
c) $h(x) = (x – 9)(x + 21) + 3$
d) $m(x) = x^2 + 65$
e) $p(x) = (x – 4)^2$
f) $n(x) = (2x – 5)\left(x – \frac{1}{2}\right)$

Comentarios

Se trata de que los alumnos encuentren el máximo o mínimo sin desarrollar la fórmula, aprovechando las posibilidades de las distintas escrituras y teniendo en cuenta que el vértice está en el eje de simetría de la parábola.

En los ítems a), b) y e) se pone en juego que "el producto de dos factores es cero solo si alguno de los dos es cero".

En el ítem b), los ceros son $\frac{3}{7}$ y –5. Este es un buen lugar para sistematizar que el punto medio entre los dos valores se calcula sumando, al menor, la mitad de la distancia. O sea, sumarle a –5 la mitad de la distancia entre $\frac{3}{7}$ y –5, que es 3/7 + 35/7 = 38/7. La abcisa del vértice es entonces $-5 + \frac{19}{7} = -\frac{16}{7}$. Si los alumnos tuvieron experiencias de cálculo de promedios, pueden identificar el punto medio con el promedio entre los dos valores.

En el ítem c) se puede determinar que **x** = 9 y **x** = –21 son "compañeros", porque tienen la misma imagen: h(9) = h(–21) = 3; por lo tanto, la abcisa del vértice está en el punto medio entre 9 y –21. Puede suceder que los chicos, repitiendo la estrategia de los ítems anteriores, intenten hallar los ceros de la función sin darse cuenta de que hay otros valores de "compañeros" más fáciles de encontrar.

Podríamos llamar "cuasifactorizada" a esta forma de escritura de la fórmula de una parábola. En nuestras experiencias en aula, pudimos comprobar que muchos estudiantes se apropian fácilmente de la estrategia de "mirar" compañeros en esta forma de escritura.

En los ítems d) y e), el hecho de que una de las coordenadas del vértice sea 0 puede generar desconcierto. Aun cuando la fórmula esté presentada en la forma canónica, puede ser que algunos alumnos no la reconozcan. Al estudiar la función del inciso d), se puede volver a reflexionar: como se le suma a 65 algo positivo o cero, el menor valor de la función es 65, y se alcanza cuando **x** = 0.

En el ítem f), se puede proponer escribir la fórmula como en el e). O también calcular los ceros de cada paréntesis y la abscisa del vértice como su punto medio.

Para los ítems a), b), c) y e) se podría pedir un gráfico aproximado.

Al finalizar con la discusión de los problemas 3, 4 y 5, se espera poder arribar a la siguiente conclusión:

Si se tiene la fórmula factorizada (producto de dos lineales), o la que estamos llamando "cuasifactorizada", entonces se pueden determinar sin hacer cálculos los ceros o dos "compañeros" y, con ellos, el vértice de la parábola.

Los dos problemas que siguen tienen como finalidad que los estudiantes produzcan fórmulas de parábolas que cumplan determinadas condiciones.

PROBLEMA 6

a) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática cuyos ceros sean 3 y –7? ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen esa condición? ¿Por qué?

b) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática que tenga como compañeros a **x** = 7 y **x** = 11? ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen esa condición? ¿Por qué?

c) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática f que verifique $f(5) = f(25) = 18$?

d) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática cuyo gráfico sea una parábola con vértice en el punto (5; 2)?

e) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una parábola que no corte al eje ***y***?

f) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una parábola que no corte al eje ***x***?

Comentarios

Después del ítem b) el docente puede proponer variantes, preguntando, por ejemplo, qué sucedería si se le sumara un número a la fórmula que, muy probablemente, propondrán todos: **(x – 7) (x – 11)**. Si han aparecido fórmulas de ese tipo, se podrán organizar en el pizarrón, para mostrar que todas las que cumplen la condición son de la siguiente forma: **a(x – 7) (x – 11) + b,** variando **a** y **b**.

Si bien en los dos primeros ítems se obtiene infinitas fórmulas que cumplen con lo pedido, en el primer caso queda solo un parámetro libre, y en la otra, dos. Las dos preguntas tienen infinitas respuestas, pero una tiene un grado de libertad y la otra, dos.

Para hallar una fórmula que cumpla lo pedido en el ítem c), los alumnos se podrían apoyar en lo discutido en torno el ítem c) del problema 5 para producir una fórmula "cuasifactorizada": $f(x) = a \cdot (x - 5) \cdot (x - 25) + 18$, para cualquier valor no nulo de **a**. Para resolver el ítem d) se puede armar una fórmula canónica, ya muy trabajada en la parte 3: $y = a \cdot (x - 5)^2 + 2$, para cualquier valor no nulo de **a**.

También, teniendo presente el trabajo en los ítems anteriores, en vez de escribir la fórmula canónica, podrían buscar dos valores de **x** simétricos respecto de la abcisa del vértice (por ejemplo, 3 y 7). Con estos valores, plantear una fórmula "cuasifactorizada" con parámetros, **a(x – 3) (x – 7) + b**, y ajustarla para que ***f*(5)** sea igual a 2. En este caso, obtendrán todavía un parámetro que no queda determinado.

A partir de estos ítems es interesante discutir colectivamente qué expresión resulta mejor adaptada para los datos que se tienen, es decir, cuándo es más conveniente escribir la fórmula factorizada, cuándo la "cuasifactorizada", cuándo la canónica. Para el ítem e) se trata de ver que si la parábola no cortara al eje **y**, no se la podría evaluar en **x** = 0. En el ítem f) hay que relacionar la condición con la no existencia de raíces.

Problema 7

a) Inventen la fórmula de una función cuadrática que tenga una sola raíz.

b) Si ahora se quiere que tenga una sola raíz y que sea en **x** = 3, ¿cuántas funciones distintas puede haber?

Comentarios

Es un problema similar al 6, se podría complementar pidiendo que en **x** = 3 la función tenga un máximo o un mínimo.

En los problemas 8 y 9, uno en un contexto y el otro no, el objetivo es la búsqueda de ceros y extremos de funciones cuadráticas, dadas por fórmulas desarrolladas con término independiente nulo.

Problema 8

Hay un famoso gol de tiro libre, convertido por José Luis Chilavert, arquero de Vélez, que resultó "inatajable" para Burgos, arquero de River, en el partido del día 22 de marzo de 1996. Se sabe que la trayectoria de la pelota lanzada por Chilavert puede ser representada por la siguiente función:

$\mathbf{h = -0{,}02\ x^2 + 1{,}16\ x}$

en donde **x** representa la cantidad de metros en línea recta sobre el pasto desde el pie de Chilavert hasta el lugar donde se encuentra la pelota, y **h**, la altura alcanzada por la pelota, medida en metros.

a) ¿A cuántos metros de Chilavert la pelota hubiera tocado el piso (de no haber sido interrumpida su trayectoria por la red del arco)?

b) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la pelota, y a qué distancia del lugar de partida?

Comentarios

Se está suponiendo que la trayectoria de la pelota está en el plano perpendicular al piso. Pensamos que no es necesario aclararlo en el aula, salvo que surja algún cuestionamiento respecto de la verosimilitud de la situación.

Un asunto que los alumnos deben enfrentar con este problema es poner en relación diferentes aspectos de la situación modelizada con el modelo algebraico. En particular, deben interpretar la pregunta a) en términos de los ceros de la función dada.

Un procedimiento que puede aparecer en el aula es el siguiente "despeje" de la ecuación:

$$-0{,}02\ x^2 + 1{,}16\ x = 0,$$
$$-0{,}02\ x^2 = -1{,}16\ x \quad \text{y dividiendo por } x$$
(algunos alumnos pueden retener la condición $x \neq 0$ y otros obviarla) $x = 58$.

El profesor puede proponer, como otra opción, sacar factor común **x**, obtener la fórmula factorizada de la función $x \cdot (-0{,}02\ x + 1{,}16)$ y usarla para hallar los ceros.
Esta segunda resolución se puede poner en relación con la primera para discutir la condición $x \neq 0$, necesaria para dividir por **x**.

Para responder a la pregunta b) hay que relacionar la altura máxima de la pelota con la ordenada del vértice de la parábola. La abscisa de dicho vértice se puede hallar a partir de los ceros de la función.

Interesa analizar con los alumnos para qué valores de **x** la función ***h*** representa el trayecto de la pelota. La situación tiene sentido desde que Chilavert patea hasta que la pelota vuelve al piso. Es decir, ***h*** es modelo de la situación entre las dos raíces. El docente puede preguntar, por ejemplo: *¿Que pasaría con* $x < 0$, *o con* $x > 80$*? ¿Qué querrá decir? ¿Puede ser negativo el valor de* ***h****?*

Estamos en el caso en que hay una función que se puede evaluar para cualquier valor de **x**, pero es modelo de la situación solo en un intervalo. Podríamos llamar a este intervalo el dominio de la función para este problema.

PROBLEMA 9

Decidir si cada una de las siguientes funciones tiene máximo o mínimo, y hallarlo.
a) $f(x) = -2x^2 - 7x$
b) $g(x) = 14x^2 + 3x$
c) $h(x) = x^2 - x$
Calcular las raíces o ceros de estas funciones.

Comentarios

El objetivo de este problema es la ejercitación de la técnica de sacar factor común para estudiar la función cuadrática.

En los problemas 10, 11, 12 y 13 se trabaja con fórmulas desarrolladas completas para hallar el vértice. La forma tradicional de hallar la abscisa del vértice $-x_V-$ de una parábola es calcular las raíces y hallar su promedio, o bien utilizar la fórmula $x_V = \frac{-b}{2a}$.
Proponemos otro camino: escribir la fórmula en la forma "cuasifactorizada", de manera de hacer visibles dos valores de **x** "compañeros", y con ellos calcular la abscisa del vértice, como se hizo en el inciso c) del problema 5. Uno de esos dos valores es siempre $x = 0$.

Comenzamos con un problema donde se pide que grafiquen una parábola, tarea que requiere la identificación de las coordenadas del vértice.

PROBLEMA 10

Realizar un gráfico aproximado de la siguiente parábola:
$y = x^2 + 16x + 66$

Comentarios

Si los alumnos comienzan con una tabla de valores para los primeros números naturales, como es habitual, la traza que van obteniendo en el gráfico cartesiano no muestra la "forma típica" de una parábola y no da pistas para ubicar el extremo. Se eligió adrede una fórmula para que "hacer una tabla de valores" no alcance para resolver la tarea que se propone.

Podemos identificar dos procedimientos un poco diferentes que se pusieron en juego en las aulas.

Primer procedimiento:

Cuando los chicos se ven enfrentados con la fórmula, es bastante habitual que quieran manipularla algebraicamente y que algunos saquen factor común **x** de los dos primeros términos. Les queda así **$y = x \cdot (x + 16) + 66$**. Teniendo la fórmula escrita de esta manera, se puede "leer" que los puntos (0; 66) y (–16; 66) son simétricos respecto del eje de la parábola. Por lo tanto, la abscisa del vértice es **$x_v = -8$**, y reemplazando en la fórmula, se obtiene la ordenada, **$y_v = 2$**.

Una vez calculado el vértice, se pueden buscar puntos con valores de **x** cercanos y a ambos lados de la abscisa del vértice, para dibujar aproximadamente la parábola.

Segundo procedimiento:

Muchos alumnos entre las primeras cuentas que hacen calculan **$f(0) = 66$**. Se les puede proponer entonces que calculen el "compañero" del 0, es decir, que hallen otro valor de **x** que tenga como imagen 66:

$$66 = x^2 + 16x + 66$$
$$0 = x^2 + 16x$$
$$0 = x(x + 16)$$

Por lo tanto, para **x** = 0 y **x** = –16, la ordenada es 66.

Los dos procedimientos son similares; en el primero se aprovecha una manipulación algebraica que pueden estar haciendo los alumnos, y en el segundo, el cálculo efectivo de valores de *f*.

PROBLEMA 11

Hallar el vértice de las parábolas dadas por las fórmulas que siguen.

a) $y = 2x^2 - 10x + 11{,}75$

b) $y = x^2 - 3$

c) $y = x^2 + \frac{1}{2}x$

d) $y = x^2 + 10x - 25$

e) $y = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{9}$

f) $y = x^2 + 12x + 35$

Comentarios

Es un problema que puede encararse de manera similar al anterior. El ítem b) quizás desconcierte a los alumnos, ante la imposibilidad de "sacar factor común", que es la técnica que se está poniendo en juego. En ese caso puede proponerse directamente que calculen los dos valores donde se anula la función.

PROBLEMA 12

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 metros por segundo.
Se sabe que $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo, **t** segundos después de que fue lanzada.

a) ¿A qué altura se encuentra la piedra 0,5 segundos después de que fue lanzada?
b) ¿A qué altura está la ventana?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra, y en qué momento la alcanza?
d) A partir del gráfico de la función, estimar cuándo chocará esa piedra con el suelo.

Comentarios

Como en varios problemas anteriores, en este se necesita entender una fórmula como modelo de una situación. Cada una de las preguntas que se formulan en el contexto del lanzamiento de la piedra deben ser interpretadas en términos de la fórmula de la función ***h***. Una vez hecho esto, para responder las preguntas, será necesario poner en juego los conocimientos que se han construido sobre función cuadrática.

Por ejemplo, para responder la pregunta b) hay que interpretar que la altura de la ventana se alcanza en el momento del lanzamiento, y calcular entonces $h(0)$.

Esta altura se alcanza también en otro momento, cuando la piedra está cayendo para el suelo: "¿En qué momento la piedra vuelve a pasar por la altura de la ventana?", es una pregunta que puede hacerse a los alumnos y recupera la noción de valor compañero pero en contexto. Este valor es necesario para responder la pregunta c).

En cuanto al gráfico de la función, trae la novedad de que tiene una rama más larga que otra y eso también tiene una interpretación en el contexto del problema. Para responder a lo que se pide en d) es necesario interpretar que el suelo se alcanza cuando ***h*** es igual a 0, y "leer" el valor de **x** en el punto de intersección del gráfico con el eje de las abscisas.

En el contexto del lanzamiento de la piedra se puede presentar otro problema que aborda entre otras cosas, el estudio de la intersección de dos parábolas.

PROBLEMA 13

Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la misma piedra del problema 12, simultáneamente, desde el suelo, se lanza otra piedra con una velocidad de 20 m/s. Se sabe que en este caso $j(t) = -5t^2 + 20t$ es la fórmula que permiten calcular la altura a la cual se encuentra esta piedra, medida desde el suelo, **t** segundos después de que fue lanzada.

a) ¿En qué momento esta piedra vuelve a tocar el suelo?

b) Una persona sentada dentro de la habitación, ¿puede ver pasar esta piedra?

c) ¿En algún momento las piedras alcanzan la misma altura? ¿A qué altura sucede esto?

g) ¿Dónde se encuentra la piedra que fue lanzada desde la ventana, cuando la que se lanzó desde el suelo alcanza su altura máxima?

Comentarios

El gráfico de las dos parábolas en un mismo sistema de ejes cartesianos resulta un recurso muy potente para responder las distintas preguntas de este problema.

Nos proponemos ahora abordar el cálculo de los ceros de una función cuadrática a partir de una fórmula desarrollada.

El trabajo con los problemas anteriores permitiría a los alumnos hallar el vértice de la parábola, sea cual sea la forma de la fórmula de la función. Con este conocimiento se puede armar una fórmula en su forma canónica (el problema 15 aborda esa técnica). Con esta expresión se pueden calcular los ceros.

Este recorrido que hemos ido construyendo para hallar los ceros de una función cuadrática nos permitirá llegar a la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado de manera fundamentada.

Para comenzar, en el problema 14, enfrentaremos a los alumnos directamente con la tarea de hallar los ceros de una función cuadrática.

Una vez discutidos los posibles procedimientos en el aula, queremos llegar a la conclusión de que, contrariamente a lo ya conocido, no siempre que tengo una ecuación la puedo resolver "pasando de términos". Este es un conocimiento nuevo para los alumnos, y permitirá discutir nuevamente en torno al concepto de ecuación.

PROBLEMA 14

Hallar los ceros de la siguiente función: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

Comentarios

Suponemos que muchos estudiantes intentarán "despejar la x", y será necesario discutir en el aula todos los procedimientos desplegados para eso. Es una oportunidad de volver a discutir cuestiones en torno al funcionamiento del lenguaje algebraico y también en torno al concepto de ecuación, de soluciones, etcétera.

Una vez discutido esto, la idea es reflexionar con los alumnos que en problemas anteriores (el capítulo 3 de este documento) se pudieron hallar lo ceros de una función cuadrática porque su fórmula venía "acomodada" de otra forma, es decir, en forma canónica.

Por otro lado, si recuperamos lo hecho hasta ahora en este capítulo 4, es posible encontrar el vértice de la parábola a partir de esta escritura desarrollada que enfrentamos ahora.

La fórmula de la función se puede escribir: $y = x \,.\, (\frac{1}{2}x + 2) - 6$

por lo tanto, 0 y –4 son compañeros, porque tienen la misma imagen –6. La abscisa del vértice es el punto medio $x = -2$ y la ordenada, $y = -2(\frac{1}{2}(-2) + 2) - 6 = -8$

Una vez encontradas las coordenadas del vértice, la idea es producir la escritura de fórmulas en forma canónica que correspondan a ese vértice y luego ajustar cuál de ellas sirve a partir de algún otro punto de la parábola dada (esta tarea ya había sido planteada en el problema 12 del capítulo 3). Resulta en este caso la fórmula:

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 8$$

Finalmente, la escritura canónica de la fórmula nos permitirá hallar los ceros:

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 8 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 = 8$$

$$\mathbf{x + 2} = \pm\sqrt{16}$$

$$\mathbf{x_1 = 2} \qquad\qquad \mathbf{x_2 = -6}$$

PROBLEMA 15

a) Hallar la expresión canónica de las siguientes fórmulas de funciones cuadráticas:

$f(x) = -2x^2 - 4x - 2$

$g(x) = -x^2 - 2x$

$h(x) = 3x^2 + 18x - 21$

$j(x) = 3x^2 + 5$

b) Buscar los ceros de estas funciones.

c) Buscar los ceros de la funciones del problema 11.

Comentarios

Este problema se presenta para afianzar la técnica que recién se desplegó. Al mismo tiempo, se propone aprovechar el mismo para discutir en torno al coeficiente principal. Una posible forma de plantear la discusión sería preguntar: "¿Es verdad que el coeficiente de x^2 en la forma desarrollada será siempre el mismo que sacamos fuera del paréntesis en la forma canónica?".

Los estudiantes tienen ejemplos de que esto es así, se les demanda ahora una explicación. La misma puede apoyarse en argumentos referidos a una función en particular: "$f(x) = -2x^2 - 4x - 2$, entonces en la escritura canónica $f(x) = \mathbf{a}\ (x\ ....)^2 + (....)$ **a** tiene que ser también –2, porque de lo contrario, al desarrollarla no quedaría la expresión original".

Y una reflexión sobre este argumento permitiría concluir que lo mismo pasará con una función cualquiera.

Si se plantea esta discusión después de trabajar con la función ***f***, se simplifica el trabajo para las funciones ***h*** y ***j***.

Después de la resolución de estos ejercicios, proponemos trabajar en el aula, con la participación de los alumnos, en la construcción de una fórmula general para hallar las raíces de cualquier función cuadrática. La fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

estará, de este modo, dotada de sentido por el trabajo que se hizo hasta el momento.

Si los alumnos conocían esta fórmula de algún aprendizaje anterior (por ejemplo, de la clase de Física), encontrarán ahora una fundamentación de aquello que aplicaban mecánicamente.

Ofrecemos una posible organización de la construcción en la clase de la fórmula general para hallar raíces de una función cuadrática, siguiendo la técnica que hemos desarrollado hasta aquí.

Tenemos una función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$.

Para buscar las raíces de la función, esto es, las soluciones de la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$, necesitamos buscar la fórmula canónica de la función. Entonces:

1) Calculamos dos valores de **x** que sean compañeros:

$$\mathbf{y = \underbrace{x}_{x=0}\ \underbrace{(ax + b)}_{x = -\frac{b}{a}} + c}$$

x = 0 $\quad$ **x =** $-\dfrac{b}{a}$ son compañeros, porque la imagen de los dos valores es **c**.

2) Buscamos el vértice:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\,\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + c$$

3) La expresión canónica será:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

4) Usamos esta expresión para calcular las raíces:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \qquad\qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\frac{b^2}{4a} - c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \qquad\qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad\qquad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad\qquad x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si bien es posible que los alumnos no estén en condiciones de producir solos esta deducción, consideramos que tienen herramientas en las que apoyarse para controlar y validar los diferentes pasos que se realizan. Nuestra experiencia muestra la riqueza de hacer este trabajo en el aula.

Proponemos cerrar todo este trabajo con una actividad de síntesis en torno a las diferentes escrituras de la fórmula de una función cuadrática. El trabajo puede apoyarse en un esquema como el siguiente

Escritura canónica
$y = 3(x + 3)^2 - 48$

Escritura polinómica
$y = 3x^2 + 18x - 21$

Escritura factorizada
$y = 3(x - 1)\,(x + 7)$

La idea sería proponer a los alumnos que expliquen como se recorren cada una de las flechas; habrá que discutir que las trasformaciones que marcamos en línea punteada no siempre se pueden realizar. En esta discusión se podrán recuperar las relaciones entre las diferentes escrituras, las raíces de la función y el vértice de la parábola. Hay un importante trabajo algebraico necesario para establecer estas relaciones.

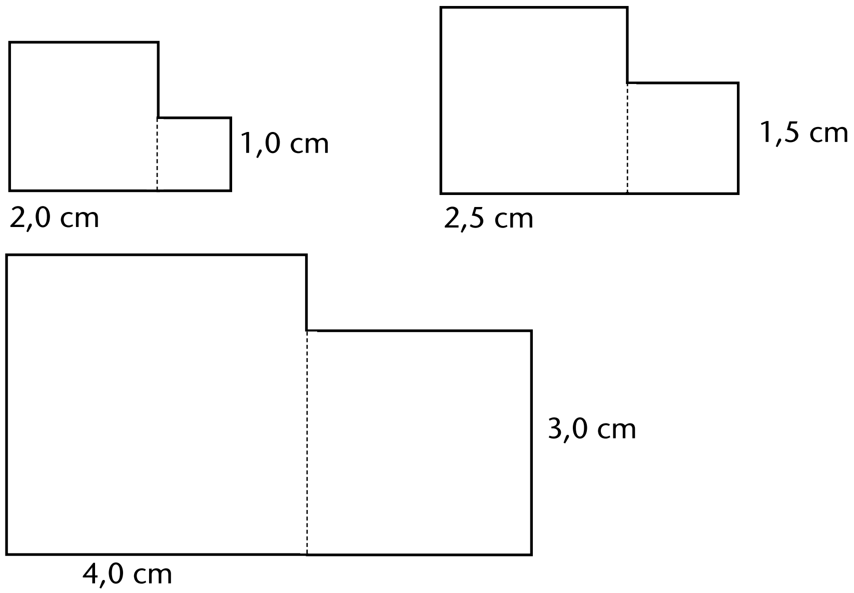
En ese sentido, pensamos que la enseñanza de estos temas representa una oportunidad para avanzar en la complejidad del trabajo algebraico de los alumnos. De la mano de aprender más sobre los objetos, sus propiedades y relaciones, los alumnos están incorporando algunos rasgos esenciales de los modos de producir en matemática.

En estos 4 capítulos hemos intentado comunicar una propuesta de enseñanza de la función cuadrática y la parábola que pone en el centro la actividad de los alumnos en la clase, haciendo matemática. Esto incluye momentos de resolución de problemas, momentos de construcción y afianzamiento de técnicas, momentos de síntesis. Y necesita de una intencionalidad del docente que organice la enseñanza priorizando la producción de los alumnos. Esperamos que este documento se pueda convertir en una ayuda para sostener esa intencionalidad.

Anexo 1
Problemas de producción e interpretación de fórmulas para medir

PROBLEMA 1

Las siguientes tres figuras responden a una misma regla: están formadas por dos cuadrados adyacentes, y el lado del cuadrado más chico es 1 cm menor que el lado del cuadrado más grande.



a) Calcular el perímetro de la tercera figura. Escribir el procedimiento utilizado.

b) Calcular el perímetro de una figura similar a las dadas, pero sabiendo que el lado del cuadrado más grande mide 34,5 cm y el lado del cuadrado más chico mide 33,5 cm.

c) Calcular el perímetro de una figura del tipo de las dibujadas, sabiendo que el lado del cuadrado menor mide 55,3 cm.

d) Escribir una fórmula que permita determinar el perímetro de las figuras del tipo de las dadas, teniendo como dato el lado del cuadrado más chico.

e) Escribir una fórmula que permita calcular el perímetro de una figura del tipo de las dadas, teniendo como dato el lado del cuadrado más grande.

f) Escribir una fórmula que permita calcular el área de una figura del tipo de las dadas, teniendo como dato el lado del cuadrado más grande.

Este problema introduce una variable continua, mediante el trabajo con fórmulas para medir, a propósito de la noción de perímetro y área. La idea es seguir trabajando con la equivalencia y no equivalencia de fórmulas.

Problema 2

Dados dos segmentos que miden, respectivamente, **a** y **b**, dibujar una figura compuesta por rectángulos y/o cuadrados cuya área sea:

$a \cdot b + a^2$

$a \cdot b + b^2$

$(a + b)^2$

$a^2 + b^2$

En este problema se trata de leer, en una expresión algebraica, información que pueda ser interpretada geométricamente en términos de áreas, y de construir una figura con esa área.

Problema 3

1. Si a un rectángulo se le triplica su base y su altura:

a) ¿Es cierto que el área también se triplica? ¿Por qué?

b) ¿Es cierto que el perímetro también se triplica? ¿Por qué?

c) Si el rectángulo fuera un cuadrado, ¿qué pasaría con su área y su perímetro, al triplicar el lado?

2. ¿Cómo varía el área de un rectángulo cuando uno de sus lados se duplica y el otro se reduce a la mitad?

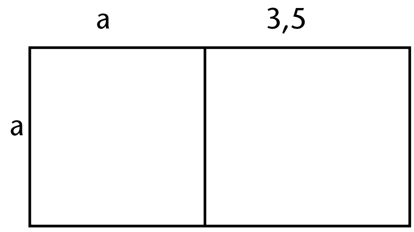
En este problema se estudian las variaciones de área y perímetro al variar la medida de los lados de ciertas figuras. La idea es trabajar con algunas transformaciones simples de las escrituras que involucran propiedades de las operaciones. El contexto geométrico valida esas propiedades.

Por ejemplo: $= (3 \cdot b)^2 = 3^2 \cdot b^2 = 9 \cdot b^2$

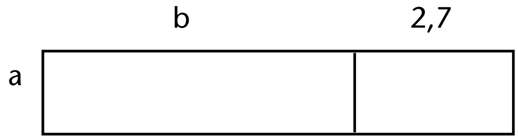
PROBLEMA 4

a) Dadas las siguientes figuras, escribir sus áreas de dos maneras distintas.

A

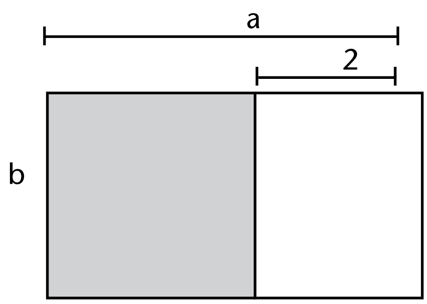


B



b) Dada la siguiente figura, escribir de dos maneras distintas el área de la parte sombreada.

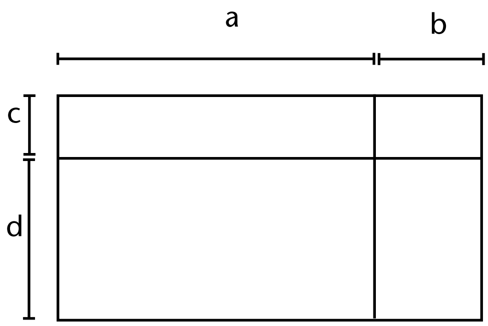
C



En este problema se pone en juego la propiedad distributiva simple (con suma y resta). Como antes, el contexto geométrico permite una validación de esta propiedad.

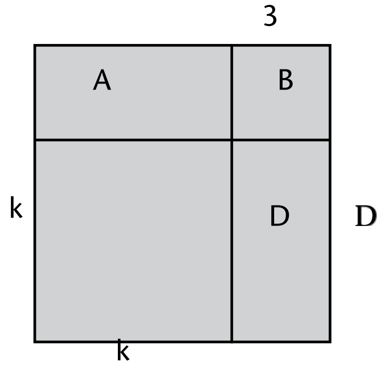
PROBLEMA 5

La siguiente figura está compuesta por 4 rectángulos. Escribir al menos dos fórmulas que permitan calcular el área de la figura.



El objetivo de este problema es arribar a la formulación y validación de la propiedad de la distributiva doble con sumas.

Problema 6



En un cuadrado, cada lado se divide en un segmento que mide 3 y otro que mide *k*.

a) Escribir la fórmula del área de A, el área de B, el área de C, el área de D y el área del cuadrado total.

b) Decidir cuáles de las siguientes expresiones permiten calcular el área del cuadrado total:

1) $k \cdot 3 + 3 \cdot 3$

2) $(k + 3) \cdot (3 + k)$

3) $k^2 + 3^2 + 2 \cdot (k + 3)$

4) $k^2 + 3^2$

5) $(k + 3)^2$

6) $k^2 + k \cdot 3 + 3^2$

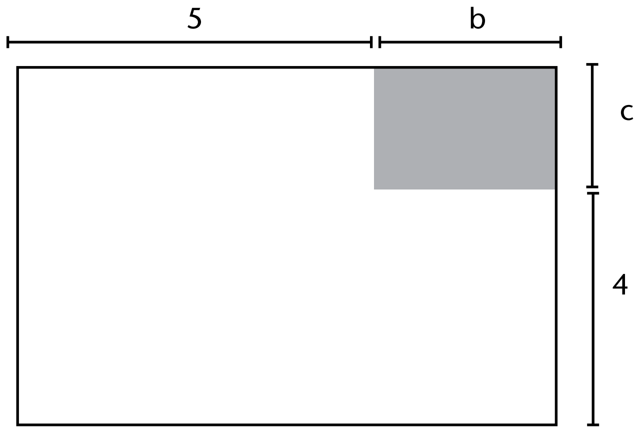
7) $k \cdot (3 + k) + 3 \cdot (3 + k)$

8) $k^2 + 2 \cdot k \cdot 3 + 3^2$

En este caso se llega a la expresión del cuadrado de una suma, con una validación para esta transformación apoyada en la figura dada.

Problema 7

Decidir cuáles de las siguientes expresiones representan el área sombreada de la figura. Explicar por qué.



1) $(5 + b) \cdot (c + 4) - 5 \cdot (c + 4) - b \cdot c$

2) $b \cdot (c + 4) - b \cdot 4$

3) $b \cdot c$

4) $(5 + b) \cdot (c + 4) - 5 \cdot (c + 4) - b \cdot 4$

5) $(5 + b) \cdot (c + 4) - 4 \cdot (5 + b) - 5 \cdot c$

6) $(5 + 4) \cdot (c + b) - 5 \cdot 4$

Con este problema se continúa trabajando la relación entre expresión algebraica y área de una figura.

Anexo 2
Relatos de clases

Relato de una profesora sobre el problema 1 del capítulo 3

Este problema (cuyo enunciado comienza: "Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras"...) resultó muy apropiado para comenzar el trabajo desde la fórmula, porque el contexto les permite a los alumnos comprender claramente la dependencia entre las variables pero no les aporta mucho más acerca del tipo de variación, ni sobre si hay o no valores de la variable independiente que tienen la misma imagen; tampoco, si existe un valor máximo o mínimo. Es decir que todo lo que quieran conocer acerca de la función ganancia lo tienen que obtener *a partir del análisis de la fórmula.*

Sin embargo, es importante aclarar que el contexto, aunque no les aporta información acerca de la variación, es útil porque otorga sentido a las preguntas y permite interpretar cuál es el significado que tiene cada respuesta en este problema.

Comenzaron trabajando en grupos con la consigna que debían resolver (los ítems a) y b)), para poder realizar entonces una pequeña discusión antes de continuar con las demás consignas.

En esa primera instancia de trabajo grupal surgieron cuestiones que merecen ser destacadas:

- Muchos alumnos supusieron que *para ganar más, habría que cobrar más*; entonces, proponían cobrar precios superiores a $56, luego reemplazaban en la fórmula esos valores y comprobaban que efectivamente se ganaba más, porque los valores que elegían para cobrar por hora eran mayores que $56 pero menores que $104, y *se quedaban provisoriamente con esa idea*.
- Otros sostenían que eligiendo un precio "alto", como $100, podrían *obtener una muy buena ganancia*, porque 100 es bastante más que 56, pero se sorprendían al ver el resultado de evaluar dicho valor en la fórmula; como primera medida, revisaban los cálculos, "desconfiando" de los mismos, para luego cuestionarse por qué el resultado no era el que ellos preveían.

Lo notable es que hasta ese momento, en que solamente trabajaban con los ítems a) y b), los alumnos, a pesar de haber trabajado antes con problemas que describían fenómenos de variación cuadrática, aún no reconocían en este nuevo problema características de ese tipo de variación, porque en el grupo de problemas del capítulo 2 era el contexto lo que les permitía "ver" que el área iba a ser la misma para dos valores de la variable independiente, *porque la figura era la misma para esos dos valores de la variable independiente* y eso les era suficiente para deducir que si, por ejemplo, el área aumentaba, lo haría hasta un cierto valor, pero luego iba a tener que descender para tomar los mismos valores que al principio.

Así, en el caso del rectángulo inscripto en el triángulo isósceles (problema 1 del capítulo 2), deducían que cuando la variable independiente tomaba valores mayores que 5,5 los rectángulos que obtenían eran los mismos, porque se intercambiaba el valor de la base por el de la altura, y entonces el área iba a ser la misma. Lo mismo que en el problema de los cuadrados sombreados (problema 2 del capítulo 2): si le asignaban a la variable independiente un valor mayor que 4, notaban que se intercambiaban los valores de los lados de los cuadrados N y M, y entonces la región sombreada que se obtenía era la misma. Y en el problema del cuadrado inscripto dentro del otro cuadrado (problema 3 del capítulo 2) reconocían el mismo comportamiento, porque exploraban cómo varía el área del cuadrado inscripto a medida que varía la distancia entre los vértices de los cuadrados, pero ya tenían la "sospecha" de que esos valores del área se repetirían cuando la distancia entre los vértices de los cuadrados superara la mitad del lado del cuadrado "grande". O sea que, hasta aquí, el trabajo que hacían era bien diferente.

Además, en este "nuevo" problema, la forma de la escritura de la fórmula no se parece a las del capítulo 2. Los alumnos no necesariamente recurren a las relaciones elaboradas en torno a los problemas de áreas para estudiar esta nueva situación. La puesta en común se convierte en un momento clave para que en el aula pueda empezar a circular la idea de que la fórmula es un elemento potente para conocer acerca de la variación.

Con este objetivo, es útil realizar en el pizarrón una tabla, no solamente con los valores que le fueron otorgando al precio y la ganancia correspondiente, sino también escribir cómo fueron calculando cada una de esas ganancias, mostrando la traza de la operatoria. De este modo, los alumnos comienzan a visualizar y poner su atención en cada uno de los términos que componen la fórmula y pueden no solo distinguir qué se modifica y qué no al evaluar los diferentes precios por hora, sino también comprender cómo funciona la fórmula.

Así, con esa idea, se confeccionó en el pizarrón la siguiente tabla:

Precio (en $)	**Ganancia (en $)**	**Cálculo**
56	2.048	$3.200 - 2(56 - 80)^2$
60	2.400	$3.200 - 2(60 - 80)^2$
70	3.000	$3.200 - 2(70 - 80)^2$

Pero, antes de completar el próximo renglón de la tabla, ya un alumno dijo:
—Yo también obtuve 2.400, pero puse un precio de 100.
Le respondí:
—Sí... Contanos qué cuenta hiciste (para escribirla en la tabla y que todos pudieran compararlas con las otras).

Luego les pregunté:
—¿Y cómo puede ser? ¿Hay 40 pesos de diferencia en el precio por hora, y se gana lo mismo?

Precio (en $)	Ganancia (en $)	Cálculo
100	2.400	$3.200 - 2(100 - 80)^2$

Entonces, algunos dijeron:
—Porque cuando se pone 60 o 100, el cuadrado da lo mismo, y entonces a 3.200 se le resta lo mismo.

—¡Ah! ¡Muy bien!
Y enseguida, otros agregaron:
—Si cobramos 90 la hora, también se va a ganar 3.000.

—Claro, se va a ganar lo mismo que cobrando 70 la hora.

Con esta primera puesta en común, los chicos ya estaban "mirando" en la fórmula y atribuyendo al cuadrado la responsabilidad de obtener la misma ganancia para dos precios distintos, y además tratando de crear por sí mismos una estrategia para encontrar tales precios. Algunos llegaban rápidamente al razonamiento de que "Para lograr la misma ganancia, la cuenta encerrada en el paréntesis debía dar números que elevados al cuadrado den el mismo resultado, y eso ocurre cuando los números son opuestos".

La tarea siguiente era atribuirle significado en el contexto al hecho de que dos precios diferentes dieran la misma ganancia. En torno a esto surgieron distintas posturas, sobre si está bien o no cobrar tal o cual precio, si da resultado o no "cobrar mucho" y otras cuestiones que escapan al análisis de lo matemático, pero que igualmente hacen a la formación de un criterio propio por parte de los alumnos.

Por supuesto que continuar con el ítem c) del problema ahora resultaba muy simple, porque los alumnos ya sabían que el paréntesis les tenía que dar 24, porque con 56 por hora el paréntesis les había dado –4. Además, hubo quienes ya habían encontrado que 104 era el precio que se debía cobrar por hora para obtener la misma ganancia que con 56. Inclusive, hubo quienes ya habían llegado a concluir que cuando el precio por hora era de 80, se obtenía la máxima ganancia "Porque a 3.200 no se le resta nada, debido a que el segundo término se hace 0". Me pareció importante que los alumnos por sí mismos analizaran cómo "jugaban" entre sí esos dos términos de la fórmula. Ellos decían que para cualquier otro p distinto de 80, el 3.200 siempre se "achica", porque se le resta "algo" positivo.

Este razonamiento les sirvió para resolver el ítem d), porque decían que para obtener una ganancia de 1.400, a 3.200 había que restarle 1.800, así que debían averiguar cuándo el paréntesis al cuadrado daba 900; luego, la cuenta que encierra el mismo podía ser 30 ó –30, y entonces p podía valer tanto 110 como 50.

También observaban que el 80 juega un rol importante para buscar dos valores de *p* que permitan ganar lo mismo, porque habían logrado "atrapar" que aquellos valores de *p* que permiten ganar lo mismo son los que están a igual distancia del 80.

Un alumno, al percibir que esos valores equidistaban del 80, dijo:
—Ese 80 es como el 0 de la recta numérica, porque todos los números tienen su opuesto, menos el 0, por estar en el medio.

Algunos alumnos empleaban otras estrategias para buscar valores de *p* que tuvieran la misma imagen; no tenían en cuenta el 80, sino que lo hacían a partir de algún par de valores de *p* de los cuales ya sabían que tenían la misma imagen, "desplazándose" las mismas unidades hacia la derecha de uno de ellos y hacia la izquierda del otro, o viceversa.

Algunos alumnos también habían podido advertir que "los pares de precios por hora" que permiten obtener la misma ganancia eran aquellos que sumaban 160, como 110 y 50; 90 y 70; 56 y 104, y decían que 80 es la mitad de 160 y está en el medio entre 0 y 160 y también va a estar en el medio de cualquier par de valores que sumen 160.

En cuanto a la pregunta de si se puede obtener una ganancia de 3.500, les resultó sencillo contestar que era imposible, porque la ganancia máxima era 3.200. También analizaron si se podía obtener ganancia 0, o ganancia negativa.

En el caso de la ganancia 0, que se obtiene cuando $p = 120$ o $p = 40$, interpretaban que 40 era muy poco, y solo alcanzaba para cubrir los gastos, pero que 120 era demasiado, y entonces podría ser que hubiera pocos clientes dispuestos a pagar ese dinero y, por lo tanto, el poco trabajo también permite nada más que afrontar los gastos.

Luego, deducían que para obtener ganancia negativa había que cobrar más de 120 o menos de 40, porque "basta con desplazarse hacia la derecha del 120 la misma cantidad que hacia la izquierda del 40 para obtener la misma ganancia" y el hecho de que sea negativa significaba que no alcanzaba para cubrir los gastos.

Este problema resultó muy importante para comenzar con el trabajo de lectura de información de la fórmula cuadrática en su forma canónica, no solo por ser el primero que exigía este tipo de trabajo, sino también porque se constituyó en un referente para las actividades que se propondrían a continuación.

Relato de una profesora sobre el problema 1 del capítulo 4

Primer momento

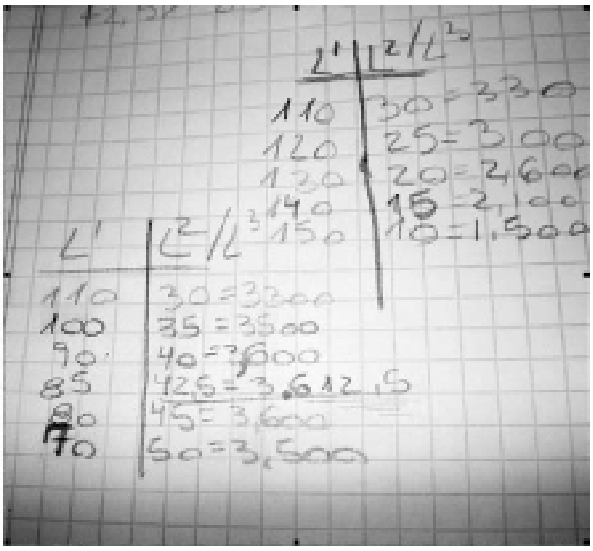
El primer momento de este relato remite al trabajo en el aula, en dos clases, en torno al problema 3 del capítulo 4 (el problema del alambrado y la pared). Durante este trabajo estuvo presente otra integrante de nuestro grupo.

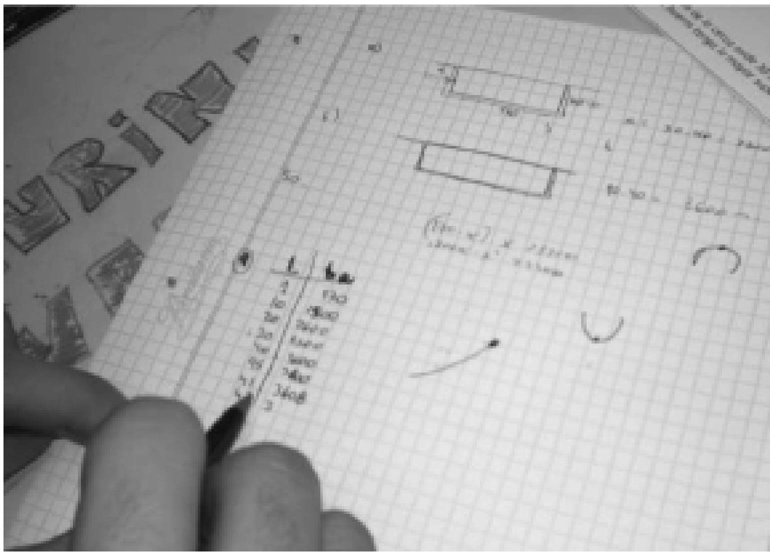
En la primera clase, los chicos estuvieron trabajando en grupos. Nosotras fuimos pasando por los grupos e interviniendo.

Todos los grupos encararon el problema probando con valores para los lados. El hecho de pedir en la primera pregunta el valor del área para una dimensión dada de uno de los lados los "invitó" a seguir probando con otros valores para contestar la pregunta b). Fueron armando tablas de valores con los resultados que iban obteniendo.

La visión de la tabla les "devolvió" que al aumentar el valor de *x*, el valor del área subía, pero luego bajaba. La búsqueda les permitió encontrar valores diferentes de *x* en los cuales la función área daba igual (esto se lograba para valores enteros, por ejemplo 40 y 45). Para muchos chicos estas ideas resultaban suficientes para afirmar que se trataba de una cuadrática. Aceptado eso, el valor dónde se alcanzaba el máximo lo calculaban como el punto medio entre dos valores "compañeros".

A continuación, presentamos dos fotos de carpetas de los chicos. En la primera se puede apreciar la escritura personal de una estudiante que quiere explicitar cómo una de las dimensiones del rectángulo depende de la otra. En la segunda foto, la estudiante produjo una fórmula, pero no se apoyó en ella para concluir que se trataba de una parábola. La fórmula fue utilizada solamente para producir la tabla de valores.

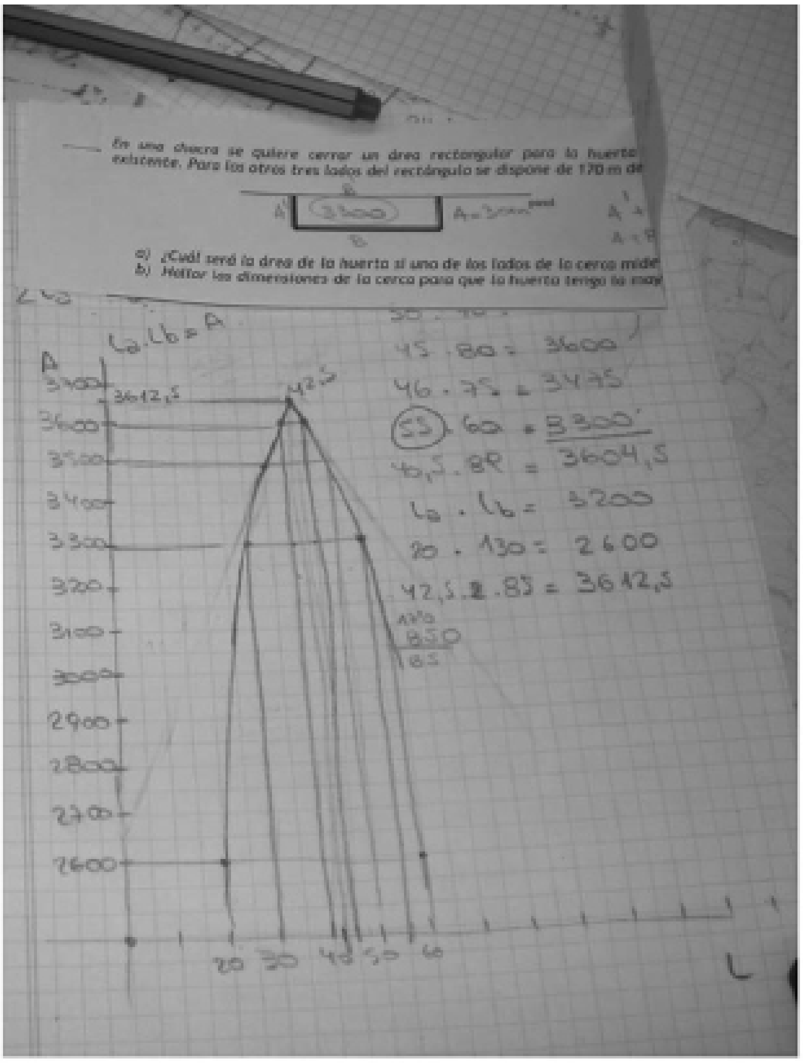




Para la mayoría de los chicos, estos valores calculados eran suficientes para dar respuesta a la pregunta b). Ellos no percibían ningún "agujero" en su razonamiento, ni veían la necesidad de asegurarse, por ejemplo, de que efectivamente se tratara de una función cuadrática.
Detengámonos un momento en la producción del grupo de Y. Al acercarme, se produce el siguiente intercambio:

Alumno 1: *Tomo 170 dividido 2, da 85. Ese es el lado largo. Luego, 85 dividido 2 da 42,5; ese es el lado corto.*
Yo: *¿Pero por qué?*
Alumno 1: *No puedo justificarlo. No sé por qué. Me parece.*
Yo: *¿Y cómo llegaste a eso?*
Alumno 1: *Puse valores y vi algunos que se repetían, entones…*
Alumno 2: (interrumpiendo) *Debe ser una parábola, estoy haciendo el gráfico.*

El alumno 2 tiene incorporada la herramienta del gráfico cartesiano; en este caso, busca una confirmación de que se trataba de una parábola.



Más adelante, este estudiante tampoco se conformó con el gráfico, y fue en busca de una fórmula para poder confirmar que se trataba de una parábola.

Después de esto, planteamos a todo el grupo la pregunta "¿Cómo pueden estar seguros de que es una cuadrática?". Estos chicos ya habían visto la función módulo, que tiene las mismas características de simetría que la parábola, con lo cual fue bastante simple hacerlos dudar acerca de si efectivamente se trataba de una parábola, porque también "Podría ser una función módulo u otra función en donde pase lo mismo".

Esto desencadenó la búsqueda de una fórmula para la variación del área. La fórmula vino entonces a ubicarse como herramienta para poder explicar, validar o justificar algo que ya sabían. Si bien nosotros habíamos pensado el problema para instalar la fórmula como herramienta para resolver, este uso que apareció en mi curso es diferente y muy valioso para dotar de sentido a la herramienta algebraica.[11]

Veamos ahora en detalle el trabajo de un grupo mientras está buscando una fórmula. Los que les ocurrió a ellos se repitió en varios otros grupos. Ya habían calculado el valor del área para varios valores de la variable; sin embargo, están bastante detenidos en la búsqueda de una fórmula. Me llaman.

Alumno: *¿Cómo era eso de la fórmula?* (varios escriben:) $(x - xv)^2$ *...*
Yo: *No traten de acordarse: ¡pongan la fórmula que resulte del método de cálculo que están usando!* (Gestos de incomprensión en los alumnos; no me entienden).
Yo: *A ver, veamos en la tabla. Ustedes acá hicieron una cuenta para calcular el área* (señalo los distintos renglones de la tabla). *¿Qué pasaría si ponemos* x *de partida?* (les dejo esa pregunta y me retiro del grupo).

Estos alumnos estaban buscando una forma para la fórmula de una cuadrática que les resultaba familiar, que es la forma canónica. Habían trabajado mucho el año anterior[12] con esa forma y muy poquito este año con otras expresiones de la fórmula cuadrática. Ellos buscaban obtener, a partir de los datos del problema o de los cálculos que hicieron, los valores de los parámetros que debían poner en la fórmula. No se daban cuenta de que si ya hubieran tenido esos valores —las coordenadas del vértice— perdería sentido la necesidad de construir una fórmula para validar que corresponden al valor máximo.

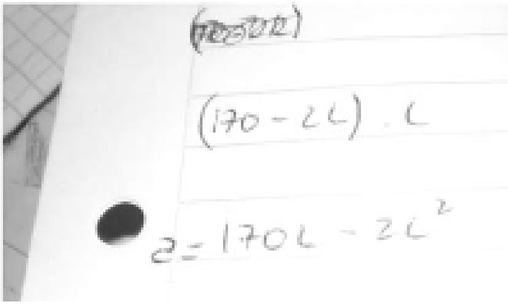
La elección de este problema estuvo guiada por el hecho de que anticipábamos que los alumnos producirían una fórmula "factorizada" para la función área, basándose en el cálculo de la superficie del rectángulo (base por altura). Queríamos explotar el hecho de que en ese tipo de forma se puede leer cuáles son dos valores compañeros;

11 La historia escolar de estos chicos, los hábitos que tienen, permitieron que aceptaran rápidamente involucrarse en la búsqueda de una fórmula para validar o justificar un hecho al cual ya habían arribado. Es para reflexionar qué trayecto deben haber recorrido como para que se acepte este tipo de tarea. Hay que pensar en la necesidad de una construcción en el aula a largo plazo, de una intencionalidad docente sostenida con tareas y con discurso.

12 En esta escuela se trabaja en tercer año con la expresión canónica de la función cuadrática y en cuarto con la expresión desarrollada y la factorizada. Estos episodios relatados corresponden a un cuarto año.

para muchos chicos, la expresión factorizada era una expresión a la cual se le debía realizar una transformación para librarse de los paréntesis.

Veamos al respecto la producción de un grupo en una carpeta y un pequeño diálogo en torno a eso:



La fórmula factorizada aparece como un paso intermedio para la obtención de la última expresión. Me acerco.

Yo: *Ustedes tienen acá dos fórmulas* (señalando la de arriba también, aunque en principio ellos no la habían considerado una verdadera fórmula). *¿Son equivalentes?*
Alumnos: *Sí.*
Yo: *¿Cuál de las dos les sirve más?* (estaba implícita la tarea que habían encarado al buscar la fórmula: dar una justificación de por qué las medidas 85 y 42,5 daban un rectángulo de área máxima).
Alumnos: *Esta* (señalando la fórmula desarrollada).

Pareciera que para algunos estudiantes era necesario desarrollar ese paréntesis para aceptar "legalmente" la fórmula. Por otro lado, como la fórmula venía solamente a corroborar/justificar algo que ya tomaban por cierto, lo único que buscaban algunos alumnos era obtener una fórmula cuadrática, para afirmar que se trataba de una parábola. En ese sentido, la fórmula sin paréntesis lo mostraba de una manera más concluyente: aparecía una x elevada al cuadrado.

Otra novedad que traía este problema es que se podía considerar como variable independiente de la situación el lado "frente" a la pared o el lado del costado. Efectivamente, hubo en el curso quienes consideraron uno y quienes consideraron otro.

En uno de los grupos, al acercarme, les pregunto cuál de los tres lados consideraron que medía 30. Una estudiante afirma que es lo mismo, y otra estudiante del grupo afirma que no. Finalmente, comprueban considerando 30 para el lateral o para el enfrentado, y confirman que no da lo mismo. Este asunto de las dos modelizaciones dio pie a un trabajo muy interesante en la segunda clase.

Un grupo de tres chicas consideró la medida del lado lateral como variable independiente y produjeron la escritura:

$$\frac{2}{b \times (170 - 2b)}$$

para calcular el área encerrada en función de la medida de uno de los lados laterales (es el único grupo que tomo esa medida como variable independiente). Ahora están tratando de utilizarla para hallar el valor máximo. Las alumnas están trabajando y me muestran: *2a + b = 170.*

Alumno 1: *Tengo que lograr que los dos sean lo más grandes posible, 85 y 85: a = 42,5; b = 85.*
Yo: *Ajá ¿Y por qué será?*
Alumno 2: *No sabemos bien.*
Yo: *¿Cómo llegaron?*
Alumno 1: *Usamos la fórmula que hicimos antes. Es un polinomio.*
Yo: *¿De qué grado es?*
Alumno 1: *De grado 2.*
Alumno 2: *No, falta el cuadrado.*
Alumno 1: *No importa.*
Yo: *¿Y cómo llegaron a qué el máximo era con 42,5 y 85?*
Alumno 2: *No sé, nos pareció que tenían que ser lo más grandes posible* (se refiere a los sumandos en la expresión *2a + b = 170*, que habían puesto más arriba).

No seguimos preguntando. Este procedimiento será estudiado colectivamente en la puesta en común. Al terminar la primera clase, todos los grupos, excepto uno, habían llegado a la fórmula (170 – 2x) · x. No se hizo puesta en común, que quedó para el día siguiente.

Para la segunda clase, pensé que debía organizar la puesta en común de forma de que los chicos atendieran, a pesar de ya haber resuelto el problema. ¿Qué aporte nuevo puede traer la puesta en común, para un chico que ya hizo el problema?

Decidí hacer pasar, en primer lugar, al único grupo que había trabajado con la fórmula **x(85 – x/2)**, y me parece que con eso logré que los demás escucharan.

Las chicas plantean *2a + b = 170* y explican que al principio empezaron probando con distintos ejemplos, haciendo *a · b*, y que se dieron cuenta que si *a* o *b* eran "chicos", el producto era chico. Entonces pensaron que el producto iba a ser lo más grande posible cuando *2a* valiera 85 y *b* valiera 85.

Como les pedimos que justificaran esto y no podían, cambiaron de método y empezaron a trabajar con las fórmulas de área y perímetro hasta obtener la fórmula:

$$\left(\frac{170 - b}{2}\right) b = \left(85 - \frac{b}{2}\right) b = 85b - \frac{b2}{2}$$

que calcula el área del rectángulo en función del lado enfrentado a la pared.

Ellas, en el trabajo del día anterior, habían anticipado que el gráfico de la función iba a ser una parábola, "Porque se pedía el área máxima", a lo cual les pregunté si no podría ser, por ejemplo, una función módulo. Cuando llegaron a la fórmula, les sirvió para justificar que era efectivamente una parábola, pero no la usaron para calcular el vértice. Con la ayuda de algunos "compañeros" que ya habían encontrado antes, calcularon las coordenadas del vértice de la parábola.

Parecía que todo estaba muy claro, pero cuando, a último momento, les pedí que hicieran un gráfico aproximado de la función, dibujaron la parábola y, como valor en el que el área es máxima, escribieron 42,5. Se inició una discusión.

Después, pasó un alumno de otro grupo, que trabajó con la fórmula L (170 – 2L), explicó su método de resolución y la forma de hallar el vértice.

Notemos que con ambas resoluciones se obtiene el mismo valor de área máxima, pero para distintos valores de la variable independiente.

En el pizarrón quedaron dos gráficos cartesianos, hechos con escalas diferentes y que representaban las dos funciones que se pusieron en juego para modelizar.

Conversamos entre todos acerca de que cualquiera de las fórmulas sirve para resolver el problema, y pregunté si las fórmulas eran equivalentes. Hay algunas discusiones, pero en general el consenso fue que sí, "Porque sirven para calcular lo mismo: el área del rectángulo encerrado por el alambrado y la pared".

Una alumna, V, propuso, para comprobar si eran equivalentes, "igualar las fórmulas". Pasó al pizarrón y realizó su propuesta. Le pedimos que anticipara qué tendría que suceder para poder afirmar que las fórmulas eran equivalentes. V respondió que "Pasa algo raro", pero no se acordaba de qué. Se discutió colectivamente y los alumnos llegaron a la conclusión de que debería dar $0 \cdot x = 0$, o bien $0 = 0$.

La alumna V resolvió la ecuación, llegó a $x^2 - \frac{170}{3}x$; y preguntó si se podía pasar la *x* dividiendo. Hubo un intercambio en torno a esto, ya que era nuevo para esta clase. Otro alumno, J, dijo que no se podía tachar *x* "porque las ecuaciones de segundo grado no se pueden despejar así, pasando de término" (este chico venía de otra escuela donde ya habían visto ecuación de segundo grado). Finalmente, nosotros explicamos que es posible simplificar la *x* siempre que se pueda asegurar que x es $\neq 0$. Ante la complejidad de este procedimiento, propusimos otro camino:

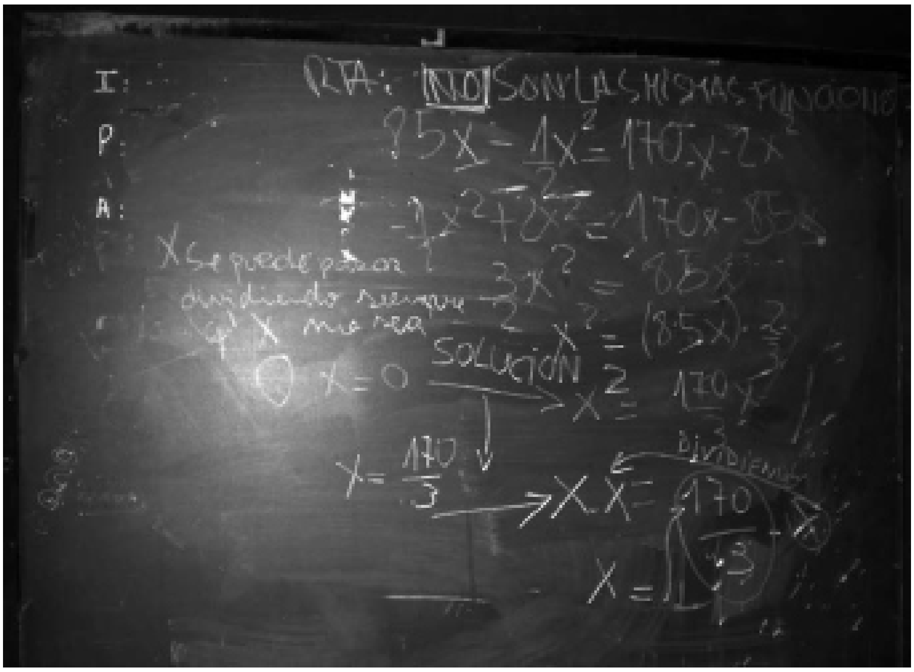
Pasar todo de un lado y llegar a $x^2 - \frac{170}{3}x = 0$.

Sacar factor común para obtener $x\,(x - \frac{170}{3}) = 0$, cuyas soluciones son 0 y $\frac{170}{3}$.

Los chicos entendieron, pero les parecía un poco raro todo. Se concluyó, al final, que las raíces de la ecuación son 0 y $\frac{170}{3}$, con lo cual las fórmulas no eran equivalentes.

Otra alumna, Y, dijo que en realidad ella había probado con 40 en las dos fórmulas y que no le había dado el mismo resultado. Todo el mundo estuvo de acuerdo en que no eran equivalentes las fórmulas, aunque las dos servían.

A pesar del acuerdo, se oye la voz de V que dice: "Yo no entiendo bien qué es lo que hice" (mostramos a continuación el pizarrón con su trabajo).



Con la intención de que puedan dar un sentido a esos valores 0 y 7 $\frac{170}{3}$, les pedimos que, en un mismo sistema de ejes cartesianos, representaran las dos funciones. Entre todos, pusimos en relación el dibujo obtenido con la ecuación que escribió V y, con nuestra intervención, se pudo identificar que las raíces que habían encontrado eran las x de los puntos donde se cortan las parábolas. A algunos chicos, eso les causó asombro.

Nos hizo pensar en la necesidad de fortalecer la idea de ecuación como modelo de la intersección de dos funciones, más allá del tema de función cuadrática.

Quedó pendiente para muchos la maniobra que se hizo para despejar la x. Efectivamente, es una técnica que deberemos retomar.

Uno de los grupos comentó que, antes de encontrar la fórmula, ya sabían que no podía ser una función módulo, porque mirando en la tabla se veía "que los valores no crecían o decrecían de manera uniforme".

Segundo momento

Quisiera ahora relatar un episodio que ocurrió la primera vez que los chicos enfrentaronuna fórmula desarrollada.

Después de haber trabajado bastante tiempo con la forma canónica, comenzaron a lidiar con otras escrituras e identificar diferentes informaciones. Por ejemplo, escrituras del tipo: $y = -\frac{1}{2}(x - 4)(x + 2)$, o $g(x) = (7x - 3)(x + 5)$, que permite leer los ceros, o aun expresiones del tipo: $y = -\frac{1}{2}(x - 2)x + 4$, novedosas para mí, por todo el trabajo que permitieron desplegar.

También se trabajó con fórmulas del tipo $f(x) = x^2 + 5x$, que, simplemente con extraer factor común, se pueden llevar a la forma factorizada, para poder leer cuáles son las raíces y hallar el vértice.

Para mí no había nada demasiado novedoso en el tema, sí el orden en la secuencia de ejercicios. Lo que me llamó la atención fue el trabajo con expresiones del tipo $y = (x - 4)(x + 2) + 3$. En esta fórmula podemos leer que tanto para 4 como para –2, la ordenada es 3. Por lo tanto, tenemos un par de puntos simétricos de la parábola y podemos calcular cuál es su vértice. A estas fórmulas las llamamos "cuasifactorizadas".

Detengámonos ahora en el momento en que enfrentamos a los alumnos por primera vez con la forma polinómica o desarrollada. Les presentamos la fórmula $y = x^2 + 16x + 66$, y les pedimos que hicieran el gráfico. Elegimos esta fórmula porque al tener el vértice en (–8; 2), es probable que hacer la tabla de valores no alcanzara para resolver la tarea propuesta.

La idea que habíamos trabajado en nuestro grupo era la siguiente: era muy probable que los chicos reconocieran en la fórmula que la ordenada al origen es 66 y entonces, a partir de allí, podíamos pedirles que calcularan el otro valor de x cuya imagen también fuera 66 (lo que llamamos "el compañero del 0"). Planteando entonces la ecuación $x^2 + 16x + 66 = 66$, llegarían a $x^2 + 16x = 0$ que podrían resolver extrayendo factor común (ya lo habían visto en ejercicios anteriores).

Resultaría entonces que para $x = 0$ y $x = -16$, la ordenada es 66. Ya tenemos un par de puntos simétricos de la parábola, el eje de simetría está entonces en $x = -8$. Reemplazando en la fórmula, obtenemos la ordenada del vértice.

Lo que ocurrió en las aulas fue un poco distinto: Cuando les di la fórmula de la parábola a graficar, los chicos (en las dos divisiones en que lo probé), lo primero que hicieron fue sacar factor común x de los dos primeros términos:

$$\mathbf{y = x^2 + 16x + 66}$$

Ahí me di cuenta de que estábamos en presencia de la cuasifactorizada, y de que simplemente leyendo en la fórmula, concluían que para 0 y para –16 la ordenada es 66. Con estos datos, calculaban el vértice. ¡Cuántas veces los chicos habrán sacado factor común x de los dos primeros términos, y yo les decía que no servía para nada!

Relatos de una profesora sobre un momento de trabajo con problemas del capítulo 4

Relato de clase

Para las siguientes funciones, decir si tienen máximo o mínimo, hallar el compañero del 0, hallar el vértice y hacer un gráfico aproximado de cada una.

a) $y = x^2 + 6x + 12$

b) $y = x^2 + 16x + 66$

Para los chicos, decir si las funciones tienen máximo o mínimo ya no resulta ninguna dificultad, porque dicen que depende del signo del término cuadrático. Si es positivo la concavidad es positiva, y si es negativo la concavidad es negativa.

El problema apareció cuando tenían que buscar el compañero del 0. Los chicos trabajan en grupo. Pero un alumno no se junta con nadie. Tiene profesor particular, que no tiene la menor idea de lo que estamos haciendo. Al chico le resulta un poco complicado lo que propongo, pero tiene buena voluntad y quiere hacerlo como sus compañeros. Me acerqué a él.

Escribe en su hoja (0; 0), y se queda ahí. Se establece el siguiente diálogo:
Yo: *¿Qué significa (0; 0)?*
Alumno: *Es uno de los ceros de la función.*
Yo: *¿Cómo sabés?*

Alumno: (expresando muchas dudas) *Porque dice el problema encontrar el compañero del 0.*

Yo: *¿Qué significa encontrar el compañero del 0?* (Silencio.) *¿Qué significa "compañeros"?* (Silencio.) *Buscá una parábola y marcá compañeros.*
Alumno: *0 y 85,5 (se fija en la parábola de la huerta).*
Yo: *¿Por qué decís que son compañeros?*
Alumno: *Porque están a la misma distancia del eje de simetría.*
Yo: *¿Son los únicos compañeros?*
Alumno: *No.*
Yo: *Señalá otros compañeros.*
Alumno: *Son puntos que están a la misma altura respecto de* y.
Yo: *¿Quiénes son compañeros?*
Alumno: *2 números de* x.
Yo: *Entonces, ¿qué significa encontrar al compañero del 0?*

Alumno: *Un punto que esté a la misma distancia del eje de simetría que el 0 y que esté a la misma altura respecto del eje* y.
Yo: *¿Qué tenés que calcular primero, entonces?*
Alumno: *La* y *del 0.*
Yo: *¿Cuál es?*
Alumno: *12.*
Yo: *Escribilo.*

(Escribe: *Cuando* $x = 0$, $y = 12$.)
Yo: *¿Cómo hacés para encontrar al compañero?* (El alumno anota $y = x\,(x + 6) + 12$.)
Alumno: *Es* -6.
Yo: *¿Por qué?*
Alumno: *Porque cuando* $x = -6$, $y = 12$.

A partir de allí, ubicó los dos puntos en el gráfico, encontró el eje y el vértice. Este episodio me confirma la necesidad de establecer diálogos individuales para poder comprender la manera de pensar de los alumnos.
Ahora, quisiera relatar un pequeño diálogo con otro alumno a quien en general, le cuesta sostener sus argumentos. Él hizo:
a) $y = x^2 + 16x + 66$
b) $y = x(x + 16) + 66$
Escribió entonces: *Cuando* $x = 0$, $y = 66$, y dijo: *"Tengo que encontrar otro valor de* x *que haga que* y *sea 66."*
$66 = x(x + 16) + 66$ $0 = x(x + 16)$
Y dijo: *Es* -16 *y* 0.
Yo intento proponerle otra manera de abordar el problema:

Yo: *Lo que hiciste está perfecto. Ahora te quiero preguntar algo: ¿era imprescindible plantear una ecuación para encontrar el compañero del 0?*
Alumno: *No, me podría haber fijado en* $y = x(x + 16) + 66$. *Eran los dos valores de* x *que hacen que el primer término valga 0.*

Esta forma de trabajar, llevando la fórmula a una forma cuasifactorizada, y luego leyendo allí toda la información necesaria, fue espontáneamente desplegada por los alumnos de otra compañera del grupo. Estos hechos se relataron en el punto 2 de este anexo. Yo me había enterado de esto en las reuniones, y me pareció importante llevarlo a mi aula.

Reflexiones acerca del trabajo de mis alumnos
Los chicos han trabajado tanto y tan bien con la fórmula cuasi-canónica, y han trabajado tanto con la equivalencia de expresiones algebraicas, que han resuelto los primeros ejercicios de esta parte sin dificultad. Una de las ideas más potentes para los chicos es la de "compañeros". Los encuentran de distintas maneras. A partir de ellos, encuentran el eje de simetría y luego el vértice.

Respecto del problema de la huerta (problema 3 del capítulo 4), me he sorprendido grande y gratamente. Los chicos abordaron el problema sin mayores dificultades. Pueden "ver", se dan cuenta de muchas cosas. Por ejemplo:

Si consideran que el lado de 30 m es el lado paralelo a la pared, es distinto que si fueran los otros lados los que miden 30 m. Calcularon el área para ambos casos.

Cuando les pregunté si las dos fórmulas son equivalentes, dijeron "No, pero con ambas puedo calcular el área, y con las dos deberíamos llegar al mismo resultado".

Calcularon el área máxima y respondieron cuánto deben medir los lados de la huerta.

Cuando les pregunté cuál es la representación gráfica de ambas ecuaciones, dijeron que la parábola, porque si se aplica la propiedad distributiva, x queda elevada al cuadrado.

Cuando representaron las dos parábolas, conjeturaron sobre el punto de intersección. Una de las hipótesis que tenían es que era el cuadrado.

Pero todas estas consideraciones no se aplican por igual a todos los alumnos. Son solamente algunos los que se dan cuenta. Tampoco son cuestiones comprendidas totalmente, ni siquiera por quienes las plantean. Es aquí donde me resultaron de mucha ayuda las intervenciones de otra docente del grupo presente en la clase. En una oportunidad en que habíamos pedido explicaciones, las respuestas de los chicos no eran claras. Mi compañera intervino, proponiendo que consensuaran las respuestas primero entre ellos. Esto sirvió para que aclararan sus ideas y se sintieran más seguros. Cuando las explicaban nuevamente a toda la clase, lograban expresarse con mucha mayor claridad.

Me parece muy difícil que, en un curso, el 100% de los chicos comprenda todo. Creo que hay cuestiones personales que influyen para que esto suceda o no. Por ejemplo, el compromiso de cada uno con su propio aprendizaje. Me pregunto cómo podemos hacer, desde la enseñanza, para que todos se comprometan.

Pero, seguro, lo que yo estoy experimentando como algo nuevo para mí es que son muchos más que antes los que comprenden y pueden explicar un concepto. Lo que para mí era una utopía, esto de "hacer matemática" en el aula, que los chicos sean productores de conocimiento, esto se hace realidad, puede ser realidad.

Estoy leyendo un libro de Patricia Sadovsky. Ella habla de la tarea docente y su responsabilidad para la clase; también habla de la responsabilidad del alumno en su propio aprendizaje; pero también remarca la importancia del intercambio entre docente y alumno y de alumnos entre sí.

La responsabilidad del docente y la responsabilidad del alumno yo la tenía clara. La importancia del intercambio entre docente y alumno la sabía, pero no tenía claro cómo hacerlo, "hasta dónde" debía preguntar. Estas clases y los encuentros de los lunes, las lecturas, me están ayudando mucho. Pero no me resulta fácil.

Lo que menos tenía en cuenta es el intercambio *entre* alumnos, y es algo que ahora veo como sumamente importante. Para lo que me resta trabajar, cuento con la excelente disponibilidad de los chicos y todo lo que han construido hasta ahora. Espero y deseo que mi gestión favorezca a hacerlo de la mejor manera.

ANEXO 3
PROPUESTAS DE TRABAJO CON *GEOGEBRA*[13]

13 *Geogebra* es un software libre de uso gratuito que puede bajarse de www.geogebra.org.

OBJETIVOS GENERALES DE LA PROPUESTA

Utilizar parámetros en la definición de una función cuadrática para representar gráficamente familias de parábolas definidas a partir de características comunes:

- Analizar lo invariante entre diferentes parábolas que cumplen cierta condición.
- Identificar en la estructura de una fórmula qué es invariante y qué no, a partir de las condiciones de los problemas.
- Usar parámetros para representar lo invariante de una familia de funciones mediante una fórmula.
- Analizar cómo incide la variación de parámetros en la parábola, y resignificar el rol de los parámetros en la fórmula a partir de los cambios en la parábola.
- Aprovechar las herramientas del programa *Geogebra* para profundizar estas ideas.
- Comprender conceptual y operativamente los comandos del programa *Geogebra* para la resolución de problemas asociados al estudio de la función cuadrática.

El programa habilita una muy interesante forma de exploración y el planteo de conjeturas que en parte se apoyan en lo visual, facilitando las representaciones. Por un lado, permite el abordaje de problemas más complejos que cuando solo se dispone de papel y lápiz. Por otro, puede dificultar algunos aspectos del trabajo matemático que se pretende instalar en las aulas, en cuanto a que la certeza acerca de una conjetura (porque se ve) puede ir en desmedro de la necesidad de validación. Será entonces tarea del docente promover la búsqueda de argumentos que trasciendan lo visual o lo intuitivo, lograr que los alumnos distingan entre una conjetura y un enunciado validado por medio de propiedades de los objetos puestos en juego o por las condiciones del problema. El foco no estaría tanto en estar seguros o convencidos de que una afirmación es verdadera o no, sino en buscar las razones de por qué lo es. El programa puede ser usado también como herramienta de cálculo, por ejemplo, para evaluar funciones.

Las actividades 1 y 2 tienen como objetivo dar sentido a la parametrización de las formas canónica y cuasi-canónica de las funciones.

Las actividades 3 y 4 buscan poner en relación cambios de valores en la fórmula de funciones cuadráticas con traslaciones de sus gráficas, en particular corrimiento vertical y horizontal.

Las actividades 5, 6 y 7 trabajan con las formas factorizada y cuasi-factorizada.

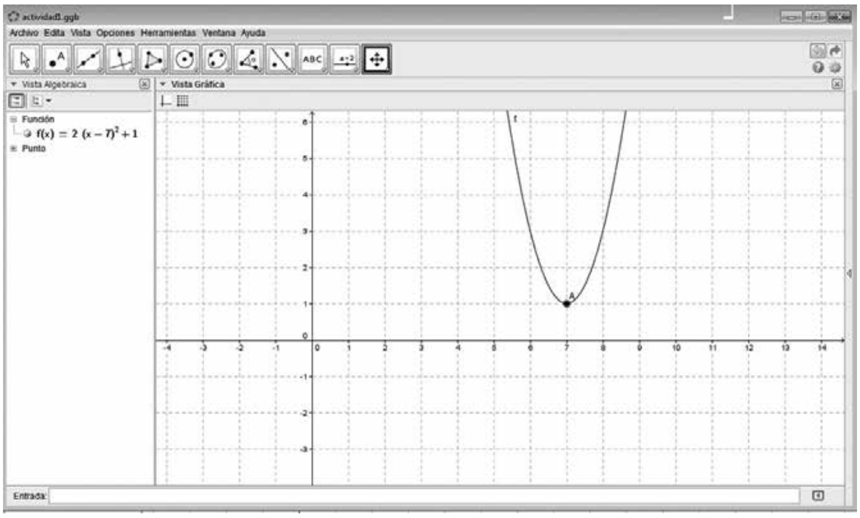
Actividad 1

Cambiá algo de la fórmula para que quede otra parábola con el mismo vértice. ¿Cuántas podrías encontrar?

(Tipear en el campo de entrada de *software*, ubicado al pie de la pantalla, la definición de la función:)

El punto (7; 1) está fijo, no se puede mover. Se define en el *software* a partir de las “Propiedades” de un objeto a las cuales se accede a través del menú contextual (haciendo clic sobre el objeto con el botón derecho del *mouse*).

Objetos libres
$f(x) = 2(x - 7)^2 + 1$
Objetos dependientes



Los objetivos del punto 1 son:

- Parametrizar el coeficiente principal **a** en la forma canónica.
- Analizar la forma en que incide la variación del coeficiente principal de la fórmula en la parábola (notemos que variando el coeficiente principal en una forma canónica se conserva el vértice, mientras que en la forma desarrollada o la factorizada, no).
- Familiarizarse con el programa *Geogebra*.

El trabajo previo realizado con los alumnos permitiría identificar en la forma canónica cuáles números corresponden a las coordenadas del vértice.

Los alumnos pueden cambiar fácilmente los números 2, 7 y 1 y registrar el efecto de estos cambios. Se espera que muchos cambien directamente solo el 2. Es probable también que algunos jueguen con los tres números; esta situación habilitaría a revisar las coordenadas del vértice en la forma canónica. Se sugiere que lleven un registro en papel de las distintas funciones que van produciendo, para poder luego compartirlas con el grupo.
La posibilidad que ofrece el programa de graficar instantáneamente la función al ser modificada su fórmula permite la exploración de posibles valores y el control de los mismos.

Al mismo tiempo, el software legitima de algún modo que esos son los gráficos correctos.

En su exploración, los alumnos pueden llegar a cambiar alguno de los números que establecen el vértice de la parábola. Por eso el punto (7; 1), vértice de la parábola y representado en la ventana gráfica, está definido independientemente de la parábola y es inamovible (fijo), con la intención de que los alumnos lo sigan teniendo de referencia al cambiar en la fórmula alguno de los dos valores que lo determinan.

Luego de una etapa de exploración, el docente puede anotar en el pizarrón las diferentes fórmulas propuestas por los alumnos para favorecer que el grupo identifique qué es invariante y qué no.

El docente puede plantear a la clase preguntas como: "¿Cómo podemos escribir todas estas parábolas?"; "¿Qué es lo que tienen en común?"; "¿Qué podemos cambiar en la fórmula y qué no?".

Los alumnos podrían intentar diferentes escrituras de esta familia de fórmulas; por ejemplo:

Cualquier número multiplicado por $(x - 7)^2 + 1$

$$\_ \cdot (x - 7)^2 + 1$$
$$x \cdot (x - 7)^2 + 1$$
$$n \cdot (x - 7)^2 + 1$$
$$a \cdot (x - 7)^2 + 1$$

En el lugar del coeficiente principal podrían proponer dejar un espacio para completar con cualquier número o bien recurrir a una letra. Dada la frecuencia de su uso y al papel que comúnmente cumple como variable, los alumnos pueden apelar a la letra **x** para parametrizar el coeficiente principal. Habrá que discutir la ambigüedad que resultaría de indicar con la misma letra dos variables que pueden tomar valores de manera independiente. Si algún chico supusiera que se trata de la misma variable, se puede proponer que ingresen $x \cdot (x - 7)^2 + 1$ en el campo de entrada del *software*, para que comprueben que la resultante no es la parábola que ellos esperan.

Por otro lado, es necesario informar que Geogebra funciona con las escrituras convencionales: la denominación **x** queda reservada para la variable independiente, y la denominación **y**, para la variable dependiente. Se podrán emplear las otras letras para designar parámetros que definen conjuntos de funciones.

Puede concluirse que: "Para conservar el vértice, lo único que puede cambiarse es el coeficiente principal; cualquier valor que elijamos define una parábola con vértice (7, 1)."

Puede ser que no surja el caso donde **a** es cero; si es así, esto podrá ser tratado al final de este punto 1, después de que se les haya indicado a los alumnos cómo cambiar "continuamente" el valor del parámetro.

"Todas las parábolas con vértice (7, 1) son los gráficos de las funciones:
$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{7})^2 + \mathbf{1}$, donde **a** puede ser cualquier número."

Es tarea del docente explicar cómo se introduce el parámetro en el programa y cómo se va cambiando su valor.

> *Si en la barra de entrada de fórmulas se introduce cualquier número, el programa lo interpretará como un parámetro, y le asignará una letra (por defecto, la letra* a*, si no estuviera ya en uso, como en este caso). Para crear un parámetro de nombre* **a** *también se puede ingresar* a = *número elegido.*
>
> *Una vez definido el parámetro, haciendo "doble clic" con el botón izquierdo del mouse sobre la fórmula de la función f(x) en la ventana algebraica, queda habilitada la posibilidad de modificar la función, parametrizándola como "$f(x) = a(x - 7)^2 + 1$" en términos de* **a**.
>
> *La función queda ahora definida en el programa como un objeto dependiente, ya que la misma depende del valor del parámetro. Es interesante discutir con los alumnos qué significa esta dependencia.*
>
> *La función puede introducirse como objeto libre o como objeto dependiente. Como objeto libre (ingresando su definición sin uso de parámetros), la función puede modificarse, ya sea con el doble clic sobre la fórmula en la ventana algebraica o simplemente desde la ventana gráfica arrastrando el gráfico (el programa recalcula las diferentes fórmulas a medida que se modifica la posición de la función).*
>
> *En el caso de ingresarla como objeto dependiente del parámetro, la única manera de modificar a la función es cambiar el valor del parámetro.*
>
> *El valor del parámetro se puede cambiar con las flechas del teclado, o haciendo doble clic sobre el mismo en la ventana algebraica e introduciendo el valor deseado.*
>
> *El parámetro también puede visualizarse como "deslizador" en la ventana gráfica, seleccionando "muestra objeto", luego de hacer clic con el botón derecho sobre el parámetro en la ventana algebraica o haciendo clic con el botón izquierdo, en la misma ventana, sobre el circulo que está a su izquierda.*

Hay un conjunto de parábolas con un vértice en común, es decir, una *familia de parábolas* que tienen el mismo vértice. El uso del parámetro permite atrapar *todas* las parábolas de la familia en *una* sola escritura.

Al recorrer todos los valores posibles del parámetro, van quedando representadas en la ventana gráfica —de a una por vez— las parábolas que tienen el mismo vértice, siendo este el invariante, lo que tienen en común estas parábolas.

El docente puede proponer a sus alumnos que analicen qué pasa cuando $a = 0$, tanto en el gráfico como en la fórmula, y concluir que resulta una recta horizontal de fórmula $y = 1$. En relación con la familia de funciones $f(x) = a \cdot (x - 7)^2 + 1$, en la ventana gráfica puede observarse que:

- Mientras se le asignen valores positivos a **a**, la parábola "es hacia arriba", y con valores negativos, "es hacia abajo".
- Al aumentar el valor absoluto del parámetro **a**, la parábola se cierra y, al disminuirlo, se abre.
- Para el valor cero de **a** queda una recta horizontal, y deja de ser una función cuadrática.

Como producto del trabajo en la página de Geogebra ha quedado la fórmula parametrizada $f(x) = a \cdot (x - 7)^2 + 1$.

ACTIVIDAD 2

Cambiá algo de la fórmula para que quede una parábola con otro vértice pero que mantenga el eje de simetría. ¿Cuántas podrías encontrar?

Los objetivos del punto 2 son:
• Parametrizar la coordenada y del vértice.
• Analizar cómo incide la variación de la coordenada y del vértice (parámetro **c**) en la parábola.

En este caso, tenemos dos grados de libertad, ya que la coordenada y del vértice puede ser cualquiera, y el coeficiente principal también.

La función ya está parametrizada como $f(x) = a(x - 7)^2 + 1$, a partir del punto anterior. En el programa, el parámetro **a** siempre tiene asignado un valor, y expone, en la ventana algebraica, la fórmula de la función que queda por él determinada.

Ya se habían identificado las coordenadas del vértice en la forma canónica en las actividades previas, y en particular se trató en el punto anterior.

En su exploración los alumnos pueden llegar a cambiar el número que establece el eje de simetría. Se sugiere que lleven un registro en papel de las distintas funciones que van generando para compartir luego con el grupo.

El docente puede anotar las diferentes funciones propuestas por los alumnos en el pizarrón para que el grupo identifique qué es invariante y qué no.

Una vez que los alumnos jugaron un poco variando los valores, se pueden plantear preguntas como: "¿Cómo podemos escribir todas estas parábolas?"; "¿Qué es lo que tienen en común?", "¿Qué podemos cambiar en la fórmula y qué no?".

En la discusión colectiva, puede llegarse a escribir:
$f(x) = a(x – 7)^2 + 3$, $f(x) = a(x – 7)^2 + 4$, etcétera.
$f(x) = a(x – 7)^2 +$ cualquier número
$f(x) = a(x – 7)^2 + a$
$f(x) = a(x – 7)^2 + b$

Si bien ya se trató el asunto sobre la elección de las letras, el hecho de tener dos grados de libertad puede presentar nuevas cuestiones para ser trabajadas.

El alumno que propone $f(x) = a(x – 7)^2 + a$ puede llegar a tener suficiente control sobre la expresión como para diferenciar perfectamente "las dos letras **a**" que están en juego y que representan cosas distintas, ¿cómo estoy describiendo esta familia de funciones para los demás?; ¿queda expresado que el coeficiente principal y la coordenada y del vértice pueden tomar cualquier valor en forma independiente, como en los ejemplos?; ¿qué pasa si se ingresa $f(x) = a(x – 7)^2 + a$, en *Geogebra*? (se obtiene una subfamilia de parábolas que sirven, pero no son todas).

Es interesante preguntar sobre la variación del vértice al variar los parámetros. Los diferentes vértices se pueden expresar, como los pares (7; b), siendo b cualquier número. Puede concluirse que: "Para conservar el eje de simetría, pueden cambiarse la coordenada y del vértice y el coeficiente principal; cualquier par de valores que elijamos para esos dos parámetros define una parábola con eje de simetría **x** = 7."

"Todas las parábolas con eje de simetría **x** = 7 son los gráficos de las funciones de fórmula $f(x) = a \cdot (x – 7)^2 + b$, donde **a** es cualquier número diferente de cero, y **b**, cualquier número."

El docente puede señalar que hay dos tipos de letras en la fórmula que caracteriza la familia de funciones con el mismo eje de simetría: la **x** que corresponde a la variable independiente de cada función y las otras letras que corresponden a los parámetros que provocan cambios en la forma de la gráfica. En *Geogebra*, la **x** se reserva para la variable independiente. El hecho de que un parámetro tenga que tener algún valor asignado da cuenta de esta diferencia.

A continuación, el docente solicita a los alumnos que ingresen el parámetro **b** en el programa.

> *De forma análoga, puede definirse un nuevo parámetro* **b** *introduciendo un valor cualquiera en la ventana algebraica (por defecto, el programa le asignará esta letra al parámetro, ya que la letra* a *ya está en uso).*

Como ahora la función f(x) *es un objeto dependiente (del parámetro* **a***), al hacer doble clic con el botón izquierdo del mouse sobre la fórmula de la función en la ventana algebraica se abre una ventana diferente al primer punto, donde queda habilitada la posibilidad de redefinirla.*

Queda entonces parametrizada la función con dos parámetros, es decir con dos grados de libertad: hay libertad de elección de los valores de los dos parámetros en forma independiente. Al modificar los valores de los mismos recorremos todas las funciones que cumplen con la condición del punto 2 (conservar el eje de simetría), que al ser más débil que la primera (conservar el vértice) define una familia de funciones que incluye estrictamente a la anterior.

En la ventana gráfica puede observarse que:

- El parámetro **a** sigue cumpliendo la misma función que antes (abre y cierra la parábola, queda "hacia arriba" y "hacia abajo").
- El parámetro **b** (que representa al término independiente) sube y baja la parábola sin cambiar su forma.

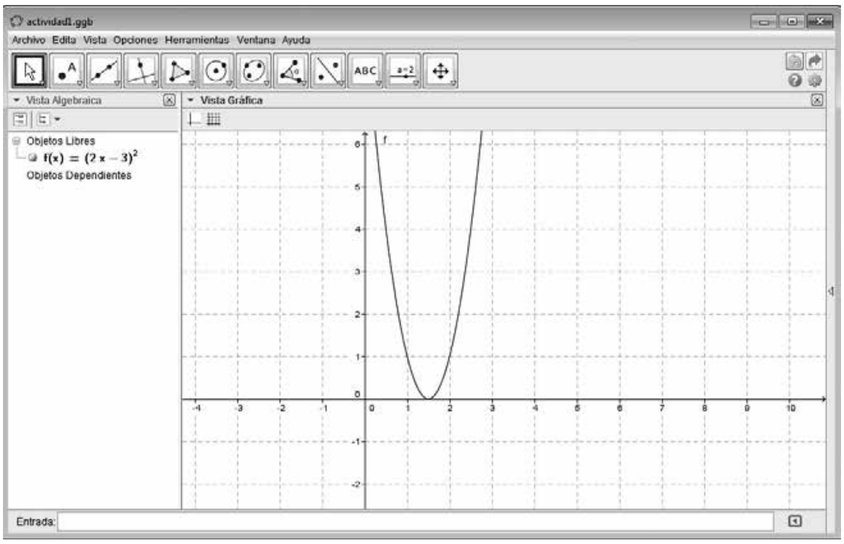
ACTIVIDAD 3

Cambiá algo de la fórmula para que quede otra función cuadrática con el 4 como mínimo valor. ¿Cuántas podrías encontrar?

(Tipear en el campo de entrada:)

a=1

f(x)= a (x+9)^2+4



Los objetivos del punto 3 son:

- Parametrizar la coordenada **x** del vértice.
- Analizar cómo incide la variación de la coordenada **x** del vértice en la parábola.

La situación es similar a la del punto 2: tenemos dos grados de libertad, ya que la coordenada **x** del vértice puede ser cualquiera, y el coeficiente principal también, excepto que ahora este último no puede tomar valores negativos.

En el programa, la función ya está parametrizada como $f(x) = a(x + 9)^2 + 4$.

> *El parámetro* **a** *siempre tiene asignado un valor; el programa expone, en la ventana algebraica, la fórmula de la función que queda por él determinada (esto debe ser explicitado por el docente para que quede claro y se entienda el problema).*

Como la función tiene la forma $f(x) = a\,(x + 9)^2 + 4$, y dentro del cuadrado hay una suma en lugar de una resta, al reemplazar el 9 por otros valores, el valor introducido no será directamente el **x** del vértice, sino su opuesto. Si este hecho no es considerado en esta instancia para reescribir la fórmula en términos de una resta dentro del cuadrado, el parámetro tendrá un sentido distinto del usual.

Puede concluirse que:

"Para conservar el valor mínimo puede cambiarse la coordenada **x** del vértice por cualquier valor y el coeficiente principal por cualquier valor positivo. Todo par de valores que elijamos de esta manera para estos parámetros define una función con valor mínimo 4."

Si el docente lo propone, los alumnos pueden presentar una escritura para esta nueva familia de parábolas: $f(x) = a(x + b)^2 + 4$, con **b** cualquier número, y **a** positivo. Para que la función alcance el mínimo, los valores del parámetro **a** deben ser siempre positivos. Esto puede definirse en el programa entrando en las propiedades del objeto mediante el botón derecho del *mouse* sobre el parámetro en la ventana algebraica, y definiendo el mínimo y el máximo valor del mismo en la pestaña "deslizador".

Se puede preguntar si las dos parametrizaciones siguientes describen la misma familia de parábolas:
$f(x) = a(x + b)^2 + 4$, con **b** cualquier número y **a** positivo; y
$f(x) = a(x - b)^2 + 4$, con **b** cualquier número y **a** positivo.

(La conclusión es que sí.)

De manera similar a las anteriores, parametrizamos la función en el programa y variamos el valor de los parámetros. A partir de lo que puede observarse en la ventana gráfica, se puede concluir que:

El parámetro **a** sigue cumpliendo la misma función que antes (abre y cierra la parábola, y siempre queda "hacia arriba", ya que sus valores son siempre positivos).

En la segunda parametrización (con $x - b$), el parámetro **b** corre a la parábola hacia la izquierda al disminuir su valor y hacia la derecha al aumentar su valor, ya que **b** es el “**x** del vértice”; en la primera parametrización (con x + b) es exactamente al revés, ya que **b** es “el **x** del vértice” cambiado de signo.

Actividad 4

Cambiá algo de la fórmula para que haya un máximo en 4.

Partiendo de la actividad anterior y del trabajo con otros problemas presentados en este documento, los alumnos podrán concluir que para que la función alcance el máximo, los valores del parámetro **a** deben ser siempre negativos.

En la ventana gráfica puede observarse que:

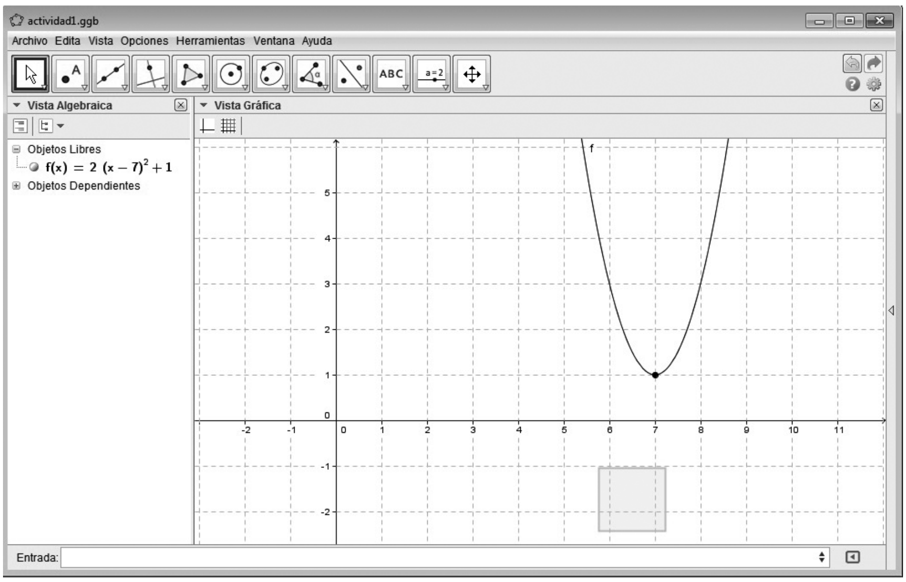
- El parámetro **a** sigue cumpliendo la misma función que antes (abre y cierra la parábola, y siempre queda “hacia abajo”, ya que los valores son siempre negativos).
- El parámetro **b** sigue cumpliendo la misma función que antes (corre la parábola hacia la izquierda y hacia la derecha).

Actividad 5

La fórmula de la función se da ahora en forma cuasi-canónica, y se trata de estudiar, como antes, la influencia de los diferentes parámetros. Cambiá algo de la fórmula para que quede una parábola con otro vértice pero que mantenga el eje de simetría. ¿Cuántas podrías encontrar?

(Tipear en el campo de entrada:)

Objetos libres
$f(x) = (2x - 3)^2$
Objetos dependientes



Se trata de que los alumnos coordinen la forma de la fórmula con algunas características del gráfico; por ejemplo, *que la parábola tenga su vértice sobre el eje de las* x *se debe a que no hay un número sumando por fuera del cuadrado*. Para no modificar el eje de simetría, podrán sumar diferentes valores a la fórmula o también multiplicarla por cualquier número.

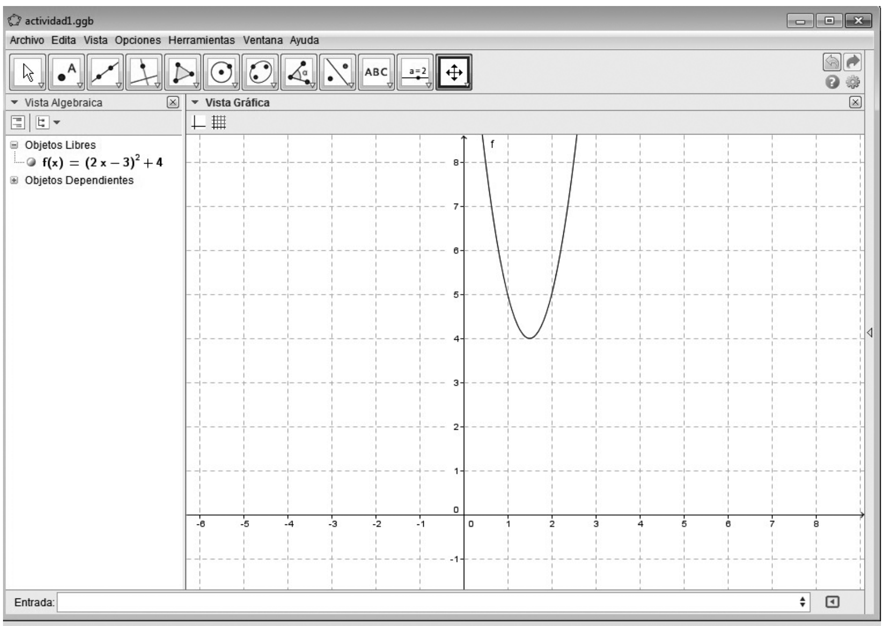
Una parábola puede admitir muchas escrituras en forma cuasi-canónica, siempre que los parámetros que aquí tienen valores 2 y 3 se modifiquen coordinadamente. Por esta razón, se puede explorar cómo conservar el eje de simetría cambiando ambos números.

Haciendo solamente las variaciones anteriores, se obtienen parábolas cóncavas hacia arriba. Para obtenerlas a todas habría que agregar por lo menos un signo menos. Si esto no apareció antes, se propone la actividad 2-2.

Actividad 6

Cambiá algo de la fórmula para que quede otra parábola con el 4 como máximo valor. ¿Cuántas podrías encontrar?

Objetos libres
$f(x) = (2x - 3)^2 + 4$
Objetos dependientes



ACTIVIDAD 7

El punto A pertenece a la gráfica de la función *f*, y la longitud del segmento vertical AB es 3.

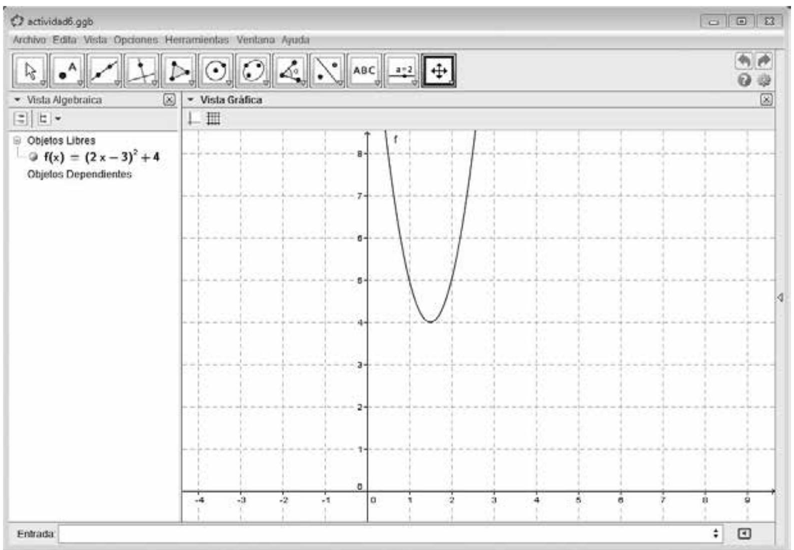
(Tipear en el campo de entrada:)

Objetos libres
f(x) = 0,3(x – 2)² + 1
A = (4.23, 2.49)
Objetos dependientes
AB = 3
r: x = 4.23
Objetos auxiliares (ocultos)
B = A + (0,3) con traza activada

En *Geogebra*, al definirse la parábola como un objeto fijo, esta no puede modificarse de ninguna manera.

Seleccionado el punto A en la ventana gráfica y moviendo el *mouse*, este se desplaza sobre la parábola. Al mismo tiempo se mueven el segmento vertical y el punto B, que dependen de A.

Estando activada la opción "Traza", al desplazar el punto A, el punto B va dejando un "rastro". De esta forma, se observa la curva que describe el punto B al desplazarse A.

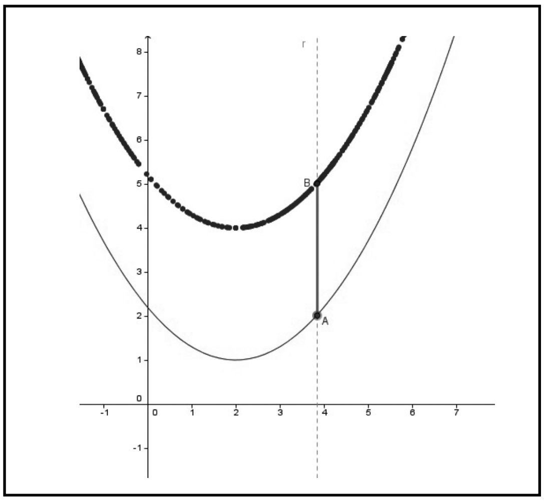


Se trata de estudiar cómo incide en la parábola sumar o restar un número a una función cuadrática (desplazamiento vertical).

Actividad 8

Al mover el punto A por la parábola, el *software* va marcando los puntos B correspondientes. Estos puntos “recorren” una curva. ¿Se junta esta curva en algún momento con la parábola?

Partimos de la hipótesis de que, desde lo visual, a los alumnos les parecerá que las dos curvas “se van acercando” y pensarán que “van a juntarse o cruzarse en algún momento”. El docente puede pedirles entonces que encuentren el o los puntos donde se juntan o se cruzan.



Traza del punto B al mover el punto A.

Según vaya surgiendo la necesidad, el docente puede explicar el uso de varias herramientas que ofrece el programa para este tipo de exploración:
- desplazarse por la zona gráfica;
- utilizar el cambio de escala.

Para cambiar la escala, se puede ubicar el cursor en la ventana gráfica y mover “la ruedita” del *mouse*. Se vuelve a la escala original seleccionando “Vista estándar” del menú contextual (opción que aparece al cliquear el botón derecho del *mouse* sobre una zona vacía de la ventana gráfica).

Observando la traza del punto B, aun cuando se utilice el desplazamiento o la visualización en distintas escalas, no puede decidirse si las curvas se juntarán o no. Se hace necesario buscar una validación de otro tipo. Llegada esta instancia, los alumnos pueden no tener recursos para seguir avanzando; en este momento, el docente les pedirá que investiguen si esta segunda curva es una parábola o no.

Una posibilidad es que, al suponer que sí es una parábola, los alumnos se apoyen en que el vértice es el punto (2; 4) y busquen una fórmula. Podrían partir ingresando la fórmula $g(x) = (x - 2)^2 + 4$, sin preocuparse por la “abertura” de la parábola, y luego ir ajustando el coeficiente principal para que la gráfica se superponga con la traza del punto B. También podría ocurrir que algunos alumnos propusieran directamente el 0,3 como coeficiente principal, tomando en cuenta la fórmula de $f(x)$.

Observaciones:

- La coma del número decimal debe ingresarse como punto.
- El exponente puede ingresarse como ^2 o seleccionando 2 en la barra de funciones preestablecidas, al lado de la barra de fórmulas.
- Al ingresar $\mathbf{0.3\ (x - 2)^2 + 4}$, el programa le asigna un nombre a la función; en este caso, $g(x)$.

Otros alumnos podrían llegar a darse cuenta de que la nueva curva es la misma parábola desplazada hacia arriba tres unidades, producto de la longitud del segmento que define al punto B, sin necesidad de buscar una fórmula.

Algunos podrían reconocer, a partir de esto, que las dos curvas no se cortarán nunca, y otros quizá no relacionen estos dos hechos y solo puedan llegar a la conclusión de que es otra parábola.

El docente puede analizar y precisar con ellos qué significa que las parábolas se junten: que para un mismo valor de **x** se obtiene el mismo valor de **y** en las dos curvas.

En la discusión colectiva, el docente puede aprovechar para relacionar las fórmulas $\mathbf{f(x) = 0.3(x - 2)^2 + 1}$ y $\mathbf{g(x) = 0.3(x - 2)^2 + 4}$, por un lado, y el corrimiento de la parábola por el otro. Se puede analizar que no solo el vértice se desplaza tres unidades hacia arriba, sino cada uno de los puntos del gráfico de $f(x)$. El docente puede escribir:

$$\mathbf{g(x) = 0.3(x - 2)^2 + 1 + 3}$$

y reformularlo como:

$$\mathbf{g(x) = f(x) + 3}$$

Se puede interpretar que para cualquier valor de la variable **x**, $f(x)$ vale siempre tres unidades más que $g(x)$, lo que se refleja en la imposibilidad de que se corten sus gráficas, a pesar de que desde lo visual pueda parecer que sí.

1. Dibujar una parábola que se ubique entre las dos que ya están graficadas. ¿Cuántas hay?
2. Dibujar una parábola que quede por arriba de las dos que ya están graficadas. ¿Cuántas hay?
3. Dibujar una parábola que quede por debajo de las dos graficadas, y que no se corte con ninguna de ellas. ¿Cuántas hay?

Una respuesta esperada es que se sume un número a la fórmula de $f(x)$, dependiendo del ítem. La pregunta sobre la cantidad de soluciones permite analizar que el número que sumamos no tiene que ser necesariamente entero, lo que da lugar a infinitas parábolas posibles en los tres casos.

Ahora bien, al considerar solamente la parte del gráfico que queda expuesta en la ventana gráfica, se podrían admitir otras variaciones de la fórmula, si no se ve que se corten en la ventana gráfica. Algunos alumnos pueden proponer para el ítem 1, por ejemplo, $\mathbf{0.4(x - 2)^2 + 1.01}$ "cerrando" el gráfico de *f*(x) al aumentar el coeficiente principal y subiendo un poco la parábola. Otros alumnos pueden proponer, por ejemplo, $\mathbf{0.3(x - 2.1)^2 + 2}$, subiendo a *f*(x) en menos de tres unidades y cambiar "un poco" el **x** del vértice.

Un cambio de escala es suficiente para observar que las curvas se cruzan.

De este trabajo se espera concluir de que subiendo el gráfico de *f*(x) menos de tres unidades la parábola así definida queda entre ambas parábolas, y que tanto la coordenada **x** del vértice como el coeficiente principal tienen que ser los mismos que en *f*(x) y *g*(x).

Las tres actividades que se presentan a continuación suponen un trabajo previo con equivalencia de fórmulas cuadráticas empleando diferentes formas para las expresiones (canónica, factorizada, cuasifactorizada, desarrollada). Se pueden trabajar después del problema 5 o 6 del capítulo 4 de este documento.

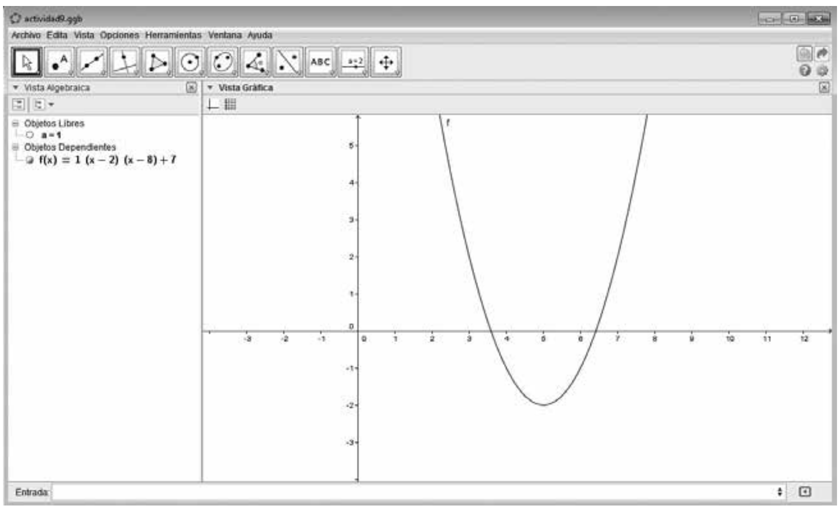
En las actividades, se recupera la idea de que la fórmula no sirve solo para calcular valores particulares de una función, sino que además podemos leer información desde su forma. Aportan a la construcción de sentido de las diferentes formas de presentación de la fórmula de una función cuadrática, en particular la factorizada y cuasi-factorizada.

ACTIVIDAD 9

Proponé valores para **a** de tal manera que 2 y 8 sean ceros de la función *f*(x).

a=1
f(x)= a (x-2) (x-8) + 7

(Tipear en el campo de entrada:)



Los alumnos pueden modificar el valor del parámetro **a** y observar en la ventana gráfica que:

- La parábola "se cierra" y "se abre", queda "para arriba" o "para abajo" al proponer valores diferentes. Este comportamiento se observó en los problemas anteriores al cambiar el coeficiente principal en la forma canónica, pero en este caso no se mantiene el vértice, aunque sí el eje de simetría.
- Al aumentar el valor absoluto de **a**, la parábola se acerca a los puntos (2,0) y (8,0) pero nunca los alcanza.

El trabajo de exploración "muestra" que no se logra que 2 y 8 sean ceros de la función. Esta constatación permite instalar nuevas preguntas en el aula:
¿Por qué no se puede?
¿Por qué la parábola no se cierra y abre como antes, manteniendo su vértice?
¿Cómo influye variar a en una fórmula de la parábola?
¿Por qué se conserva el eje de simetría?
¿Qué tienen en común estas parábolas?
¿Cómo podemos caracterizarlas más allá de su fórmula?

Para orientar el estudio de estas cuestiones, el docente puede proponer a los alumnos que busquen cuál es el eje de simetría, o que busquen valores compañeros (es decir, valores de **x** que tienen la misma imagen).

Si bien el eje de simetría no se puede ver con precisión en la ventana gráfica del *Geogebra*, los alumnos pueden conjeturar que se halla en **x = 5**, ya que 2 y 8 son dos valores compañeros siempre.

Si se buscan otros compañeros, los alumnos pueden apoyarse en el eje de simetría y proponer los valores 4 y 6, 2 y 8, 0 y 10, –1 y 11, etcétera.

> *El cálculo de las distintas imágenes es facilitado por el programa desde la ventana algebraica, como ya se dijo.*
>
> *En la ventana algebraica puede ingresarse, por ejemplo, f(10) y f(0); el programa asignará a estos valores una letra, interpretándolos como parámetros.*

Al variar los valores del parámetro **a** se modifican los resultados obtenidos al evaluar la función en dos valores compañeros, pero las imágenes de ambos siempre serán iguales entre sí.

Se puede concluir que 4 y 6, 2 y 8, 0 y 10, –1 y 11, etcétera, siempre serán compañeros para cualquier valor de **a**, ya que el eje de simetría es **x = 5** y estos pares de valores están a la misma distancia del 5.

Si ningún alumno ingresó en el programa ***f*(2)** y ***f*(8)**, el docente puede proponerlo para estudiar el comportamiento de estas imágenes a medida que se modifica el valor de **a**. Los alumnos pueden constatar que las imágenes no varían y que su valor siempre es 7. Hecho que no se puede "ver" con precisión en la ventana gráfica.

Luego de la puesta en común, se puede pasar en limpio la explicación en el pizarrón: Para **x** = **2** y **x** = **8** se anula el primer término sin importar el valor de **a**, y el resultado es siempre 7.

Como 2 y 8 son compañeros para cualquier valor de **a**, el eje de simetría de todas las parábolas de esta familia será **x** = **5**.

Conclusiones

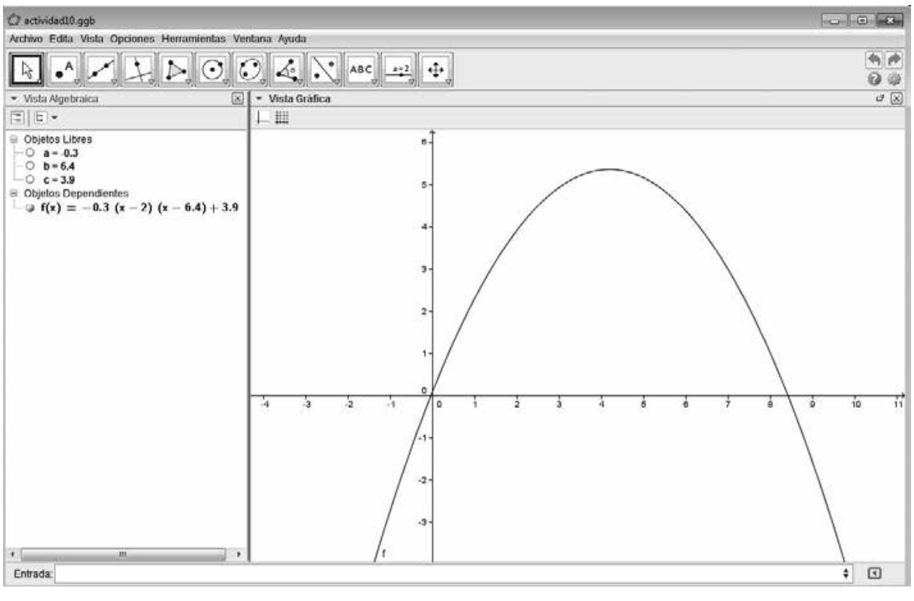
- Todas las parábolas de la familia cumplen que ***f*(2)** = ***f*(8)** = **7.**
- Todas las parábolas pasan por los puntos (2, 7) y (8, 7).
- El eje de simetría es **x** = **5**.
- El vértice cambia a medida que varía el valor de **a**.

ACTIVIDAD 10

Proponé valores para **a**, **b** y **c** de tal manera que 2 y 10 sean ceros de la función *f*(x).

(Tipear en el campo de entrada:)

Objetos libres
a = 1
b = -1
c = 5
Objetos dependientes f(x) = a(x - 2) (x - b) + c



El objetivo de esta actividad es jugar con los parámetros en una fórmula en la forma cuasi-factorizada e interpretar las variaciones de esos parámetros en la fórmula.

La exploración en este problema puede resultar compleja, ya que entran en juego tres parámetros y hay que coordinar sus variaciones. Observando solamente la ventana gráfica, al ir modificando los parámetros no necesariamente van a encontrar una solución del problema. Leer información en la fórmula aparece entonces como una herramienta útil. La gestión del docente podría orientar el trabajo para que estudien primero la situación si **b** = **10**. Se llegaría a las siguientes conclusiones:

$f(x) = a(x - 2)(x - 10)$ son todas las parábolas con raíces 2 y 10.
$f(x) = a(x - 2)(x - 10) + c$ son todas parábolas que tienen a 2 y 10 como compañeros, y si **c** no se anula, estos valores no son raíces.

Restaría estudiar el caso **b** ≠ **10**. La lectura de la fórmula en ese caso muestra que nunca se puede lograr simultáneamente que 2 y 10 sean raíces.

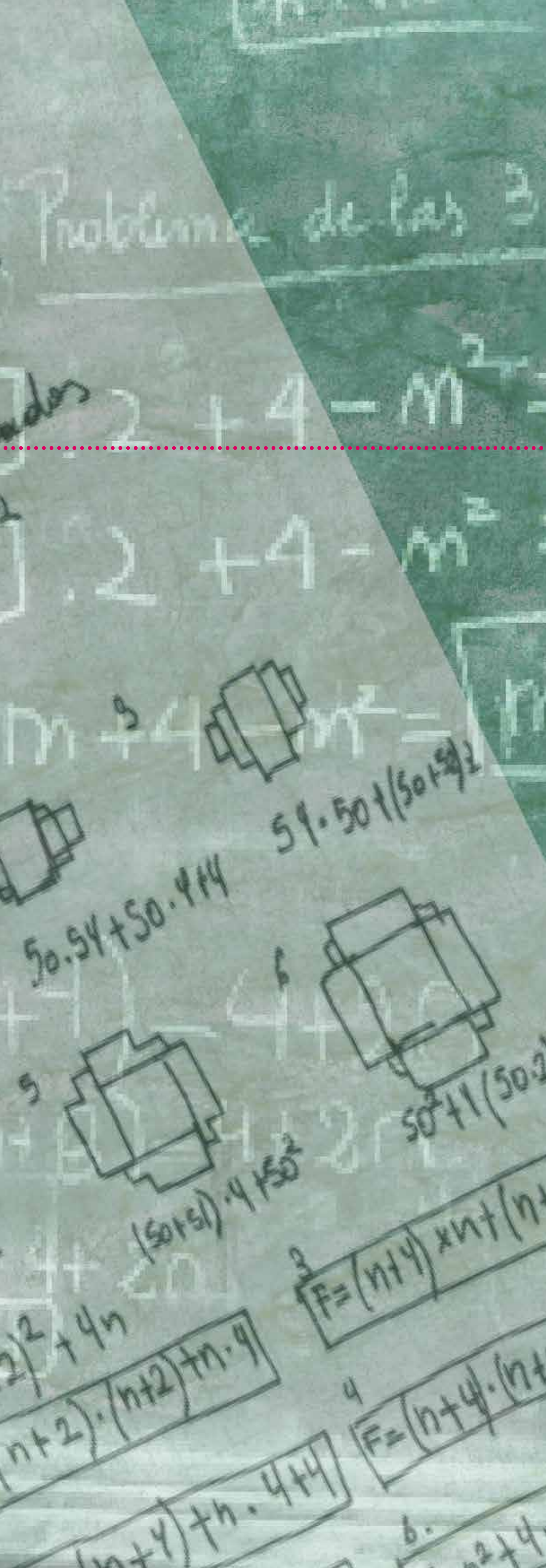
ACTIVIDAD 11

Usando parámetros, caracterizá las fórmulas de:
a) Todas las parábolas que tengan como vértice el punto (3, 2).
b) Todas las parábolas que tengan su vértice en la recta x = 3.
c) Todas las parábolas para las cuales x = 5 y x = 9 sean compañeros.
d) Todas las parábolas para las cuales x = 3 y x = –3 sean compañeros.
e) Todas las parábolas que tengan un solo punto en común con la recta y = 3.
f) Todas las parábolas que tengan una raíz en x = 1.
g) Todas las parábolas que tengan una raíz doble.

En cada caso, dibujá tres de las parábolas.

Se espera que los alumnos escriban fórmulas con parámetros para responder a cada item. Empleando el menú contextual pueden animar cada parámetro y podrán ver dinámicamente las parábolas de cada familia.

Llegar a producir fórmulas con uso de parámetros que cumplan determinadas condiciones implica un trabajo de generalización interesante. Esta generalización no debe ser forzada, sino que debería surgir a partir de profundizar la comprensión del problema.



Aportes para la enseñanza. **Nivel Secundario**

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad