ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Primeras experiencias con GeoGebra

Horacio Itzcovich y Rodolfo Murúa (coordinadores)

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

>>

Enseñanza de la geometría

Enseñanza de la geometría

Primeras experiencias con GeoGebra

Horacio Itzcovich y Rodolfo Murúa (coordinadores)

María Eugenia Arce
María Julia Benites
Jesica Bragadini
Lidia Mabel Bullón
Ricardo Vito Cafici
Luciana Castellarin
Paola Castro
Florencia Correas
Daniela Di Marco
Nicolás Dingianna
Andrea Favaro
Sandra Patricia García
Laura Marafioti
Antonella Paolini
María Florencia Pennini
Alejandra Rodríguez
Catalina Rosende Scordamaglia
Violeta Rosende Scordamaglia
Marcos Saban

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Enseñanza de la geometría: primeras experiencias con GeoGebra / María Eugenia Arce... [et al.]; coordinación general de Horacio Itzcovich; Rodolfo Murúa - 1a ed.- Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria, 2021.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática. Matemática)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-71-4

1. Educación Primaria. 2. Matemática. 3. Geometría. I. Arce, María Eugenia. II. Itzcovich, Horacio, coord. III. Murúa, Rodolfo, coord.

CDD 372.7

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
Enseñanza de la geometría. Primeras experiencias con GeoGebra

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, noviembre de 2021

ISBN 978-987-3805-71-4

Índice

Introducción

Horacio Itzcovich y Rodolfo Murúa

Este libro ha sido elaborado por las y los docentes-estudiantes de la cohorte 2017 de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria, carrera dictada en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), en el marco del Seminario de Geometría y en simultáneo con el Trayecto de Análisis de las Prácticas de Enseñanza. Los docentes de este seminario fueron los profesores Horacio Itzcovich y Rodolfo Murúa, quienes coordinaron el proceso de escritura de los artículos compartidos en estas páginas.

Las personas que asisten al seminario son maestros y maestras de escuelas primarias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires que están cursando el segundo año de la carrera. A lo largo del desarrollo de la cursada se presentan diferentes tipos de propuestas: resolución de problemas geométricos con lápiz y papel y con el programa GeoGebra (GGB), y análisis de las diferencias que se perciben entre ambos recursos; estudio de las relaciones que se ponen en juego; retorno a las propiedades –algunas resultan familiares y se confirman o se resignifican, y otras resultan novedosas–; análisis didáctico de aspectos vinculados a la enseñanza de la geometría; debates en torno al problema de la validación de las relaciones que se van estableciendo; lecturas que sirven de insumos para profundizar las discusiones; etcétera.

En paralelo a este recorrido, los y las estudiantes-docentes llevan adelante un trabajo de indagación en sus propias aulas, con sus alumnos, a partir de algunos interrogantes que van surgiendo durante la cursada o que ellos se han planteado sobre sus prácticas de enseñanza. Este trabajo presenta las siguientes características: se despliega en grupo, acordando y fundamentando las razones de la problemática a estudiar, lógicamente asociada con la enseñanza de la geometría; incluye la elaboración de una planificación y la evaluación de sus relaciones con el asunto a indagar; se implementa en las aulas y, finalmente, se desarrolla un análisis de la experiencia. Este último punto es el que da origen al presente texto: cada indagación, junto con un recorte del análisis desarrollado, ha dado forma a los capítulos que conforman este libro.

El Seminario de Geometría parte de algunas premisas –que compartimos y analizamos con las y los participantes– acerca de lo que entendemos por geometría y ciertas marcas sobre los problemas didácticos que involucra. Tal como se menciona en su programa, el seminario busca entablar "una conversación entre el trabajo de producción de las y los docentes-estudiantes de la UNIPE a raíz de los problemas (geométricos en este caso) que abordan para estudiar, el análisis didáctico de los contenidos de la escuela primaria y la elaboración de categorías que permitan conceptualizar la enseñanza de esta disciplina".

Entendemos que el estudio de las figuras geométricas involucra un recorrido en el que a través de la resolución de problemas se ponen en juego relaciones –conocidas o nuevas– entre sus elementos, se encuentran modos de validar esas relaciones a través de argumentos que puedan ir estructurándose en un discurso deductivo que vaya prescindiendo de la constatación empírica y se llegue a una caracterización de las figuras en términos de algunas de las relaciones –propiedades– estudiadas.

Las construcciones ocupan un lugar preponderante a lo largo de todo el recorrido ya que se asume que esta tarea demanda, precisamente, "en primer lugar analizar una figura, inspeccionar sus elementos para seleccionar algunos que se consideren relevantes para concretar la construcción en función de los datos que se ofrecen, establecer relaciones con los otros para imaginar la sucesión de pasos que lleven a completarla", según se indica en el programa del seminario.

A su vez, se intenta avanzar en la identificación de las relaciones complejas entre dibujos y figuras (Sadovsky *et al*., 1998), el reconocimiento de la posibilidad de caracterizar a una figura de diferentes maneras y la detección de la importancia que adquiere un texto que refiera a ellas, entre otros aspectos.

Un asunto central es el debate en torno a la idea de validación asociada a la elaboración de argumentos que se apoyan en ciertas propiedades que permitan tener certeza de que los resultados a los que se arriba y las relaciones que se establecen son ciertos.

A partir de todas estas cuestiones, entendemos que GeoGebra resulta ser un programa solidario con algunas de ellas. Veamos.

El GGB admite que los dibujos se muevan con el *mouse*; pero para que se muevan y al mismo tiempo conserven sus propiedades, es decir, para lograr que sigan siendo los dibujos que eran aunque hayan cambiado de posición, es imprescindible que se los construya apelando a relaciones. Además, para producir un dibujo con este programa se necesita hacer explícitos los elementos que se consideran y los comandos que se requieren, exigencia que no está presente cuando se realiza una construcción con los instrumentos convencionales. Por último, diremos que su uso es gratuito, aspecto que no es menor.

Estas premisas que se pusieron en juego son las que también orientaron, en cierta medida, la producción de los capítulos que compartimos.

El *capítulo 1* plantea debatir en torno a la relación entre los conocimientos geométricos que elaboran las niñas y los niños trabajando con papel y lápiz y las posibles resignificaciones que podrían adquirir al incorporar el GGB, tratándose de la primera vez que utilizan este recurso: ¿las relaciones que se despliegan en cada uno de los recursos serían las mismas?; ¿el programa permitiría desplegar otras relaciones geométricas diferentes?; ¿qué aportes haría el movimiento? La experiencia llevada a cabo por este grupo ronda estas cuestiones relevadas a partir de su indagación con estudiantes de 4º y 5º grado del Programa de Aceleración en una escuela de gestión estatal de la Ciudad de Buenos Aires.

El *capítulo 2* también conjuga el trabajo con lápiz y papel y el uso del programa GeoGebra. En este caso se focaliza en las estrategias que elaboran las y los estudiantes al pasar de un recurso a otro, frente al mismo tipo de problema. A su vez, se intenta atrapar el modo en que los alumnos y alumnas refieren a la primera actividad –desarrollada en formato de juego usando lápiz y papel– y su reutilización al incorporar el GGB para su resolución. Una vez más, las relaciones entre un recurso y otro son objeto de análisis a partir de la experiencia desarrollada con un grupo de estudiantes de 4º grado de una escuela pública de la Ciudad de Buenos Aires.

El *capítulo 3* pone el acento en la potencia que pareciera tener el GGB, en particular la referida al movimiento que se le puede impregnar al dibujo realizado. Es decir, se trata de indagar en qué medida esta nueva condición resulta ser una variable importante en las clases. A raíz del estudio de la propiedad triangular en un aula de 5º grado de una escuela pública de la Ciudad de Buenos Aires, el trabajo busca desentrañar las diferencias entre abordar dicha propiedad a partir de las medidas de los lados construyendo triángulos con lápiz, papel e instrumentos geométricos, y el proceso de exploración de condiciones de existencia de un triángulo a partir de las medidas de sus lados usando el GGB.

El *capítulo 4* también se ocupa del estudio de las relaciones entre los lados de un triángulo, pero con un grupo de estudiantes que ya ha tenido una primera aproximación al uso del GGB, aunque sin profundizar en las relaciones geométricas que subyacen en ciertas actividades de construcción de figuras. El asunto que se comparte en este texto refiere al modo en que los alumnos y las alumnas recurren a ciertas herramientas del programa en función de la tarea propuesta y si son identificables las razones por las cuales las utilizan, en términos de relaciones geométricas. El movimiento de los dibujos juega también en este caso un papel preponderante, como en otros capítulos. La indagación se llevó adelante en 5º grado de una escuela privada de la Ciudad de Buenos Aires.

El *capítulo 5* propone, por un lado, compartir el conjunto de procedimientos que utilizan las y los estudiantes al resolver problemas que involucran la construcción de circunferencias y su relación con ciertas conceptualizaciones; por otro, busca indagar sobre el papel que juega la docente en este proceso, ya que la experiencia previa se aloja en el trabajo con lápiz y papel y, al incorporar el GGB, se generan nuevos interrogantes relacionados con las intervenciones, los intercambios que se propician y los modos que podrían adquirir. Es decir, se interroga sobre la propia práctica docente, que en este trabajo tuvo su desarrollo en 4º grado de una escuela parroquial de la Ciudad de Buenos Aires.

Finalmente, el *capítulo 6* también comparte la experiencia desplegada con niños y niñas de 4º grado de una escuela parroquial de la Ciudad de Buenos Aires en torno a la noción de circunferencia, intentando comparar el trabajo realizado con lápiz y papel con el llevado a cabo mediante GGB. Este grupo nunca había tratado con conocimientos geométricos ni utilizado el GGB y, en consecuencia, parte del desafío residió en identificar la posibilidad de iniciar a las y los estudiantes directamente con el programa, sin pasar antes por el lápiz y el papel.

Confiamos en que este libro sea un aporte valioso para aquellos maestros y maestras que quieran incursionar en una manera –¿diferente?– de "hacer" geometría, en la que los dibujos se pueden mover; se pueden trazar circunferencias, rectas, puntos, segmentos utilizando herramientas; se puede hacer *zoom* de acercamiento o de alejamiento; se puede ver el "protocolo" de una construcción, etc. En todos los artículos estos recursos fueron incorporados a las planificaciones pensando en estudiantes protagonistas de la clase de matemática, sin dejar de lado el asunto de la validación como tema central en geometría.

Por último, esperamos que, al terminar de leer el libro, el lector o la lectora crea que es posible incorporar el uso del programa GeoGebra en los primeros grados del segundo ciclo de la escuela primaria (de un modo desafiante para las y los estudiantes), rompiendo así con la idea de que solo se puede trabajar con este recurso informático en los últimos grados o directamente en la escuela secundaria.

CAPÍTULO 1

Pensar GeoGebra como variable didáctica

Luciana Castellarin, Florencia Correas,
Daniela Di Marco y Nicolás Dingianna

INTRODUCCIÓN: PREGUNTAS QUE NOS GUÍAN...

La inquietud de encontrar respuesta a los interrogantes que desarrollaremos más adelante surge, en primer lugar, de nuestro propio proceso de aprendizaje en el Seminario de Geometría de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Algunos miembros de este equipo nunca habíamos trabajado los contenidos curriculares referidos a geometría con el programa GeoGebra (GGB), ni lo habíamos incorporado a nuestras clases. Fue bien interesante el acercamiento que realizamos al dispositivo tecnológico, su funcionamiento, el reconocimiento de sus herramientas y las posibilidades de trabajo con él.

En un primer momento, resultó una tarea difícil aproximarnos al programa e ir descubriendo sus herramientas y funciones en simultáneo con la resolución de algunas situaciones problemáticas. Luego de transitar varias resoluciones, de contrastarlas con las de los compañeros y someterlas a discusión, pudimos empezar a identificar que, en algunas ocasiones, pensábamos la resolución como lo hacíamos en lápiz y papel y luego la trasladábamos al programa buscando en él aquellas herramientas que nos eran útiles para resolver. En ese ir y venir, entre resoluciones y discusiones, pudimos advertir la "fuerza" que el programa nos otorgaba al permitir que se inserte dinamismo a las construcciones y así poder identificar, de manera más explícita, si las relaciones geométricas utilizadas eran o no pertinentes.

Otros ya habíamos tenido un acercamiento previo y, en el recorrido que pudimos realizar en nuestra experiencia con el GGB, identificamos varias etapas. En una primera aproximación, la mayor atención estuvo puesta en las propiedades que determinaban la figura que se intentaba construir, sin que surgiera la necesidad de poner en juego el movimiento de lo que se dibujaba. Adjudicamos este hecho al desconocimiento del programa y su potencialidad, y no a un desprecio por sus herramientas. En la medida en que nos fuimos convirtiendo en usuarios de GGB, nuestro vínculo con este recurso se modificó pudiendo incluir estrategias que contemplaran nuevas cuestiones, como el dinamismo, al desarrollar un procedimiento de construcción como parte de la resolución de un problema. En otras etapas de nuestro trabajo con GGB, al realizar una actividad de copiado, resultó muy potente pensar bajo qué condiciones dos figuras eran iguales (tanto el modelo como la copia eran figuras representadas en GGB), reflexionar sobre todas las posibles representaciones de las figuras geométricas[1] e indagar sobre cuáles serían las condiciones y en función de qué relaciones geométricas se generaban esas representaciones, en virtud del dinamismo de GGB. Por otro lado, el movimiento nos obligaba a volver sobre las herramientas y a profundizar sobre las propiedades que caracterizan o definen una figura geométrica.

En esta indagación hemos tomado la decisión de observar algunas cuestiones que se dieron en ese primer encuentro de nuestros alumnos con GGB, ya que nos propusimos trabajar con un grupo que no conocía el programa.

Varios son los interrogantes que nos guiaron. Sabíamos que los alumnos que nos recibirían en el aula habían trabajado, junto con su docente, con la secuencia "Círculo y circunferencia" del *Documento de trabajo n° 5* (Sadovsky *et al*., 1998), construyendo a partir de las discusiones que se generaron durante las clases algunas ideas y relaciones acerca de los conceptos de circunferencia, círculo y radio. Contando con esta información, pudimos plantearnos algunas de las preguntas que orientaron esta indagación y que nos llevaron a formularnos otras.

Nos interrogamos, en particular, acerca de si aquellas relaciones geométricas que los alumnos pudieron establecer durante su trabajo con lápiz y papel serían las mismas que utilizarían al resolver problemas con GGB. Las relaciones que se despliegan en cada uno de los dos recursos, ¿son las mismas? El GGB, ¿permitiría desplegar otros asuntos matemático-geométricos distintos a los desplegados en el papel con instrumentos tradicionales? ¿Qué aportes haría el movimiento?

Por último, nos preguntamos cuáles serían los beneficios de GGB. ¿Podemos categorizarlo como otra herramienta? ¿Cuál sería su especificidad? ¿Tendría alguna? En caso de una respuesta afirmativa, ¿qué podría permitir GGB que el lápiz y el papel no pudieran? ¿El papel permitiría algunas relaciones que el programa no? ¿Podríamos pensar GGB como una variable didáctica?

Sintéticamente asumimos que la noción de variable didáctica (VD) refiere a las condiciones que pueden variar en una situación, actividad o problema –condiciones pensadas por el docente– y que apuntan a incidir o modificar los procedimientos de resolución elaborados por los alumnos, al tiempo que se orientan hacia una cierta relación matemática (Panniza, 2003; Brousseau, 2005). En el caso particular del uso de GGB, serán las condiciones que el

1. Tal como sostiene Laborde (1997: 33), "la figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones".

programa y la situación impongan para realizar las construcciones, además de los valores que se otorguen. De allí surgirán nuevas estrategias o se resignificarán las ya existentes.

Quizás la idea de variable didáctica nos brinde un marco para pensar el recurso de GGB, en el sentido de que este programa aporta el movimiento, mientras que el papel no. Con GGB, ¿surgirían nuevas posibilidades de resignificar la definición de circunferencia? Es posible que los alumnos profundicen en la idea de radio como distancia, por ejemplo si usaran la herramienta de la medida para mostrar todos los puntos que equidistan de un centro, o si hicieran girar el radio como las agujas de un reloj, sabiendo que el extremo del radio recorre todos los puntos de la circunferencia.

Laborde hace referencia a las retroacciones que ofrece el GGB frente a las acciones de los alumnos. Por ejemplo: acerca de la tarea de construir un triángulo de 5, 4 y 9 unidades[2] en lápiz y papel y en GGB, en GGB no podrá ser construido.[3] Esa retroacción quizás permita revisar algunos criterios para la construcción de triángulos, es decir arribar a alguna conclusión próxima a la propiedad triangular. ¿Podríamos pensar que las retroacciones permiten que el problema sea devuelto a los alumnos? Devuelto en el sentido que le otorga Brousseau al concepto de devolución en Teoría de Situaciones cuando habla de situación a-didáctica.[4] De alguna manera lo dice Laborde (1997: 40) en la siguiente cita:

> La repetición de la confrontación con el mismo problema permite al alumno construir un sentido del problema. [Se trata de] un proceso de transferencia de responsabilidad. Lo hace cada vez más consciente de lo que le impulsa a actuar [...]. La repetición (dada una retroacción que implique volver a resolver el problema) es interesante cuando [...] no son simplemente del estilo "verdadero o falso" sino de naturaleza rica.

¿Podríamos poner en línea estos conceptos: variable didáctica, devolución y retroacciones del GGB? Es decir, cuando los estudiantes realizan una

2. En lápiz y papel, usualmente la unidad de medida es centímetros; en cambio, el programa GeoGebra tiene una unidad de medida propia. Es por esto que cuando en todos los capítulos hacemos referencia a longitudes del software, estamos hablando directamente de "unidades" o de "unidades GeoGebra". Si bien en el ícono de la herramienta *Distancia* del programa se menciona la abreviatura "cm", no es posible tener certeza de que las longitudes en esa unidad de medida coincidan con los centímetros reales, por la posibilidad de hacer *zoom*, aunque las proporciones se preserven.

3. Sugerimos la lectura del capítulo 3, "La propiedad triangular en 5º grado: un posible recorrido didáctico y la potencia de GeoGebra como soporte".

4. Por situación a-didáctica entendemos, intentando sintetizar, aquellas situaciones de aprendizaje en las que las intenciones del docente quedan en suspenso: "Cuando el maestro ha logrado hacer desaparecer su voluntad [...] en tanto informaciones determinantes" (Brousseau, 1988). Esta idea se refiere a las informaciones que pueden influir en la tarea del alumno. Esto no se traduce en que el docente deja de intervenir sino en que el maestro no explicita cuáles son los conocimientos involucrados para resolver el problema.

construcción sin explicitar las propiedades o relaciones del objeto geométrico, y se desarma, ¿es posible pensar que lo poderoso de GGB sea la oportunidad de una devolución del problema, en el sentido que lo define Brousseau y lo retoma Laborde? ¿La retroacción hace que los estudiantes vuelvan a intentar porque eso se desarma, y no porque lo dice el profesor, o porque el lápiz con trazo grueso y la hoja permiten que se arme? Por ejemplo, para el caso del triángulo de 4, 5 y 9 unidades: ¿podemos pensar las retroacciones, en cuanto "eso que se desarma", no solo como devolución sino también, es decir a la vez, como VD, en el sentido de que el concepto de VD permite modificar las estrategias de resolución de los alumnos? Cuando la construcción se desarma, asunto que solo GGB lo permite; y cuando además ese desarme hace que necesariamente se vuelva sobre los procedimientos para revisarlos y modificarlos, ¿podríamos pensar que esa vuelta al problema no solo es una devolución sino que es una VD también? Lo dinámico y lo desarmable contribuyen no solo a apropiarse del problema en el sentido de "transferencia de responsabilidad", sino en la posibilidad de tener que pensar nuevas estrategias, lo que, junto a las intervenciones docentes, puede generar la posibilidad de producir nuevos conocimientos.

Para observar algunas de las cuestiones planteadas anteriormente decidimos realizar nuestro trabajo de campo en una escuela de gestión estatal de la Ciudad de Buenos Aires: la Escuela Nº 4, Distrito Escolar 21, Provincia de Tucumán (agradecemos la hospitalidad de quienes nos abrieron las puertas de la institución y nos permitieron realizar nuestro trabajo allí).

Nos encontramos con los grados 4º y 5º de Aceleración del Programa de Reorganización de las Trayectorias Escolares para los alumnos con sobreedad (entre 11 y 14 años) en el nivel primario de la Ciudad de Buenos Aires. Este programa se propone ofrecer a los alumnos una alternativa de prosecución de su escolaridad en un tiempo menor al que establece la progresión un grado/un año, cumpliendo dos propósitos inseparables: garantizarles el cumplimiento de los objetivos de la escuela primaria común y asegurarles la adquisición de los saberes necesarios para el ingreso y permanencia en la escuela secundaria. Para que estos propósitos se cumplan, "el Programa define una propuesta pedagógica adecuada a la mayor edad de estos alumnos, más ajustada a sus intereses, posibilidades y requerimientos, apoyada en las capacidades de los chicos y en una serie de condiciones pedagógicas especialmente cuidadas, con la intención de acelerar su pasaje al grado que más se acerque al que corresponde a su edad".[5] Estos alumnos son estudiantes que vienen de una trayectoria escolar muchas veces signada por lo que algunos denominan "fracaso escolar". Nos referimos acá a trayectorias discontinuas, con inasistencias reiteradas, ingresos tardíos o repitencias. En general, los contenidos de geometría quedan relegados de la enseñanza por falta de tiempo, por poca formación de los docentes o por no ser

5. Terigi, Flavia, *Bases pedagógicas del Programa de Aceleración*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, 2003. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/images/phocadownload/colecciones/herramientas/basespedagogicas.pdf>.

contenidos ponderados desde la cultura escolar. Sin embargo, la gran motivación en este caso radicó en la potencialidad que brinda la geometría con relación a las posibilidades de realizar un trabajo argumentativo y a la vez poder inaugurar un contrato didáctico nuevo respecto de la relación con este conocimiento.

A continuación relataremos el trabajo que se realizó en la escuela bajo la coordinación de la docente Florencia Correas, estudiante del Seminario, y la docente del grado Liliana Martínez.

EN LÁPIZ Y PAPEL

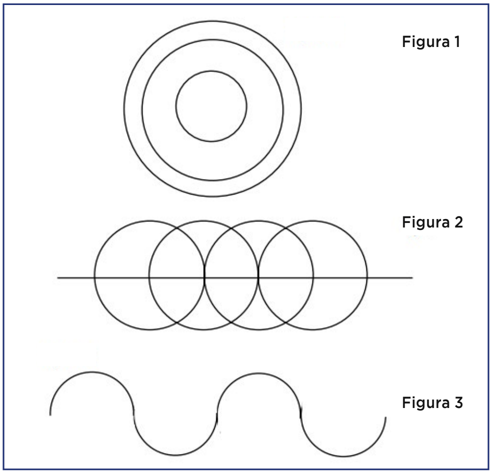
Hasta el momento en que se decidió incluir el GGB en el aula, los estudiantes habían trabajado con las nociones de circunferencia y círculo mediante el uso del compás como instrumento para trazar circunferencias, transportar longitudes y duplicar la longitud de un segmento. La maestra había propuesto a sus alumnos las actividades de la primera y segunda parte de la secuencia “Circunferencia y círculo” incluida en el *Documento de trabajo nº 5*.

En esas instancias los niños abordaron, en primer término, situaciones que requerían el uso del compás y que apuntaron a poner en juego ciertas relaciones necesarias para trazar figuras circulares, por ejemplo las relaciones entre los radios de las circunferencias y la importancia de la ubicación de los centros en las diferentes figuras. No se pretendía introducir un vocabulario formal, aunque cabe mencionar que el nombre de las figuras y algunos de sus elementos fueron referidos durante las puestas en común para hacer más fluida la comunicación de procedimientos.

Para tener una idea más acabada del tipo de actividades planteadas previas al uso del GGB, a continuación transcribimos algunos problemas propuestos.

Se inició el trabajo copiando figuras circulares con el compás y en hoja lisa, con la condición de que les quedaran iguales al superponerlas y que no las calcaran (imagen 1).

1

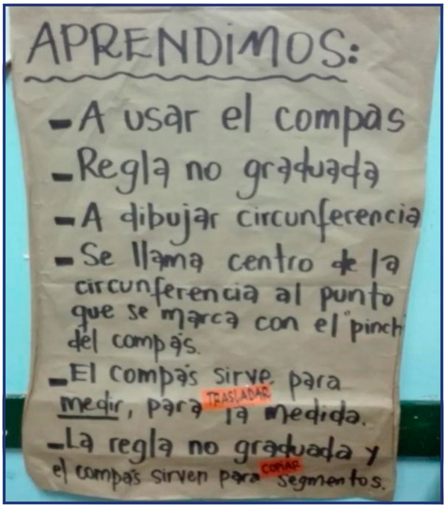


El objetivo de la puesta en común giró en torno a las dificultades derivadas de asuntos tales como el orden de las construcciones, si la recta de la figura 2 es necesaria o no, o si en el caso de la figura 3 es imprescindible trazar una recta auxiliar para después borrarla y que no se vea.

También se trabajó en el uso del compás como instrumento para transportar la longitud de un segmento. Lo interesante aquí fue empezar a abrir preguntas referidas a uno de los procedimientos realizados. Frente al pedido de copiar un segmento usando compás y regla no graduada, muchos de los alumnos tomaron el compás como instrumento para medir y marcaron un punto/centro (A), sabiendo que ese sería un extremo del segmento, y trazaron un arco de circunferencia. La pregunta giró entonces en torno a la cuestión de si era lo mismo marcar un punto en cualquier lugar del arco (por ejemplo los puntos B, C y D de la circunferencia) y si los segmentos AC, AD o AB eran iguales entre sí e iguales al segmento dado como original. Lo que para algunos era evidente porque no se cambiaba la medida del compás, y por lo tanto esos puntos del arco mantenían la misma distancia con el centro, para otros todavía seguía oculto.

Luego de estas primeras aproximaciones volvieron hacia atrás para revisar lo resuelto y establecer acuerdos sobre lo aprendido. De esa clase de recapitulación resultó un afiche donde quedó reflejado "qué aprendimos" (afiche 1).

A1

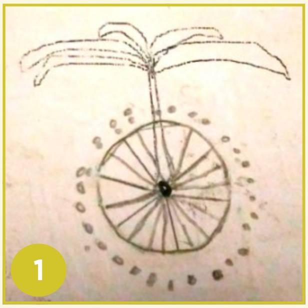


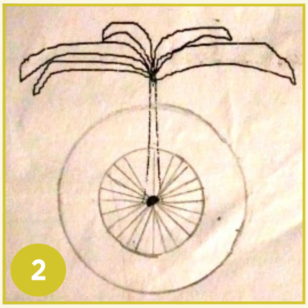
Afiche donde quedó reflejado lo aprendido en la clase de recapitulación.

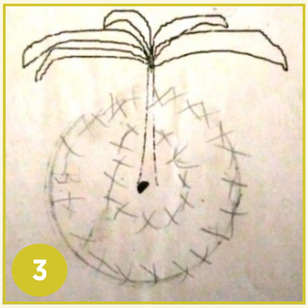
La segunda parte del trabajo con lápiz y papel se centró en la noción de circunferencia y círculo. Se les propuso varias actividades en las que tenían que ubicar todos los puntos que estuvieran a 5 cm de un punto A, porque ahí se encontraba el tesoro de un pirata, o las zonas que estuvieran a determinada distancia de un punto dado. Resulta significativo observar cómo los procedimientos desplegados por los alumnos se asemejan a las producciones plasmadas en el apartado "Instantáneas del aula" del *Documento de trabajo nº 5*.

TRABAJO DE LOS ALUMNOS

En este caso la consigna dada fue marcar la *zona* que estuviera a 2 cm o menos de la base de la palmera.

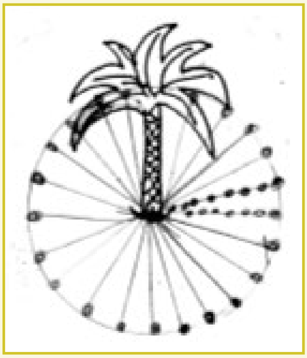






El pasaje de punto a zona no resulta claro; los niños interpretan que el interior de la circunferencia va marcado pero con puntos, cruces o segmentos. Incluso, para algunos, las zonas marcadas en el interior son las de 1 cm. Es decir, trazan la circunferencia que está a 1 cm y la que está a 2 cm, tal es el caso de las figuras 2 y 3.

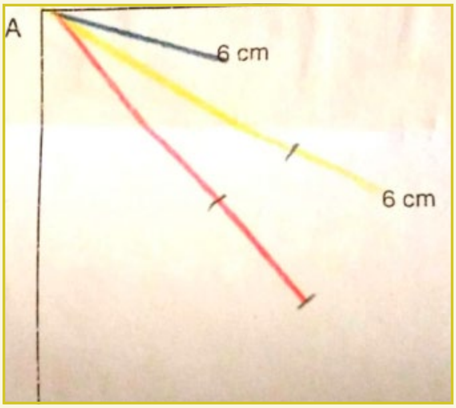
"INSTANTÁNEAS DEL AULA" PUBLICADAS
EN EL DOCUMENTO DE TRABAJO Nº 5



TRABAJO DE LOS ALUMNOS

En el siguiente trabajo tenían que pintar el distintivo con las siguientes condiciones:

- de amarillo, la parte que está a 6 cm del punto A;
- de azul, la parte que está a menos de 6 cm de A;
- de rojo, la parte que está a más de 6 cm de A.

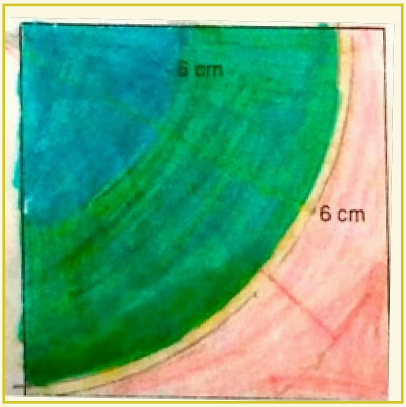


Pareciera que la solución está dada por la medida del segmento. Incluso se ven dos marcas en lápiz a 6 cm en el segmento rojo y el amarillo como intervención de la docente, pero aún así no hubo modificación.

“INSTANTÁNEAS DEL AULA” PUBLICADAS EN EL DOCUMENTO DE TRABAJO Nº 5

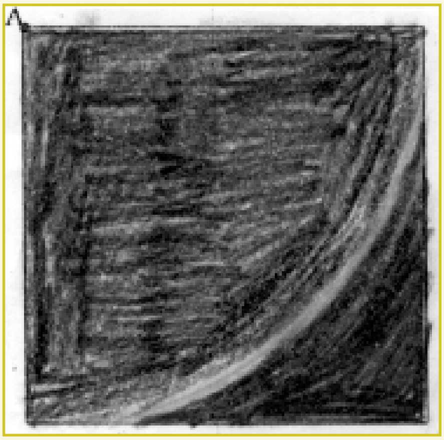
Este procedimiento permite dar cuenta de que el pasaje de puntos a zonas, áreas o superficies, sigue siendo complejo.

TRABAJO DE LOS ALUMNOS



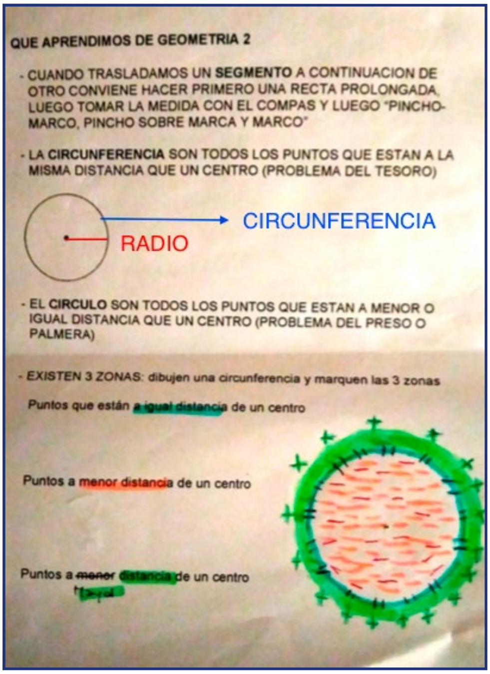
Aquí se puede ver cómo la franja del medio antes era amarilla, y al ser pintada por encima de azul quedó verde. Es posible que este alumno esté en vías de conceptualizar la idea de zonas o áreas. Sin embargo, podríamos conjeturar que la exigencia de coordinar los aspectos de límite todavía está en proceso. Menos de 6 es también 2 cm, ¿será que se pinta hasta ahí? o ¿hasta dónde se pinta de azul si es menos de 6?

"INSTANTÁNEAS DEL AULA" PUBLICADAS
EN EL DOCUMENTO DE TRABAJO Nº 5



Luego de esta segunda parte se revisaron diferentes cuestiones a fin de oficializar algunos conocimientos que circularon durante la actividad (afiche 2).

A2



Afiche que resume lo aprendido durante la actividad.

Finalmente, observamos en sus producciones que, si bien se reflejan variados estados de conocimiento, también podemos establecer una línea de avances respecto de sus puntos de partida o de sus posibilidades de reinversión frente a nuevas oportunidades de poner en juego la noción de círculo y circunferencia.

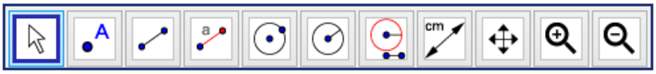
AL AULA CON GEOGEBRA...

Retomando lo que planteamos al inicio de este trabajo, nos propusimos ir a la escuela a observar qué lazos se podrían establecer entre lo que los alumnos habían aprendido durante el trabajo con lápiz y papel y lo que les propondríamos hacer con GGB. En qué sentido podría interpelarlos la incorporación de este nuevo recurso a su clase de geometría. El movimiento, característica distintiva del GGB, ¿permitiría nuevos procedimientos?, ¿ampliaría y/o profundizaría el sentido de los conocimientos construidos hasta el momento? Es decir, ¿podría funcionar como una variable didáctica?

Sabiendo que los aprendizajes vinculados al concepto de circunferencia son complejos y abarcan varios años de la escolaridad, y teniendo en cuenta las trayectorias escolares de este grupo de alumnos en particular, nos propusimos como objetivo de la clase que los estudiantes sigan construyendo el concepto de circunferencia entendido como el conjunto de puntos que equidistan de un centro y que la distancia entre cada punto de la circunferencia y ese centro es el radio. Todo esto dentro de un nuevo contexto de trabajo como es el programa GeoGebra.

La clase estuvo compuesta por 15 alumnos, repartidos en 6 grupos de 2 alumnos y 1 de 3. Cada grupo trabajó con una computadora del Plan Sarmiento, que cuenta con el GGB ya instalado. En sus computadoras, y en esta oportunidad, decidimos habilitar solo algunas de las herramientas del programa, ya que los alumnos no habían trabajado anteriormente con este software y su primer acercamiento se haría durante la clase. De esta manera, sospechábamos que la exploración sería más controlada (imagen 2).

2



La consigna dada en forma oral por la docente fue la siguiente:

> A partir del punto A que figura en su pantalla tienen que encontrar todos los puntos que están a 5 unidades del punto A, teniendo en cuenta que, cuando usamos la herramienta de la flechita, al mover todos esos puntos que ustedes marcaron mantengan la misma distancia.

ANALIZANDO EL PROBLEMA

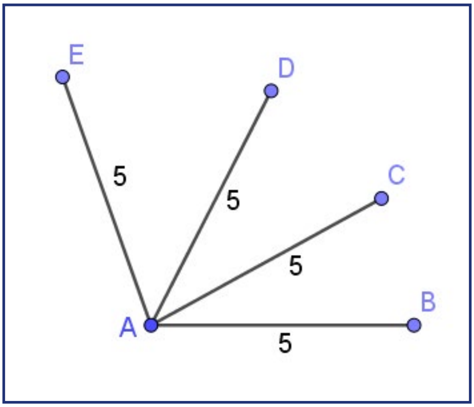
El problema aborda las relaciones que caracterizan a una circunferencia, entendida como el conjunto de puntos que equidistan de un centro, y al radio como la longitud de cualquier segmento que une el centro con algún punto de la circunferencia. Habilita a los alumnos a realizar construcciones que pongan en juego los conocimientos geométricos construidos en la secuencia propuesta en el *Documento de trabajo nº 5* realizada con lápiz y papel. Si bien la relación que se pone de manifiesto es la misma que fue tratada con lápiz y papel, el cambio en el recurso que se usa pone en duda que la reconozcan, la usen y la resignifiquen en este nuevo recurso. También es posible que, por no disponer de los conocimientos sobre el funcionamiento del GGB, se les dificulte su resolución; por ejemplo, que cuando quieran dibujar una circunferencia con la herramienta *Compás*, no lo logren.

ANTICIPANDO PROCEDIMIENTOS DE LOS ALUMNOS...

Pensamos y anticipamos algunos procedimientos que los alumnos podrían realizar. Uno de ellos podría ser que tracen varios segmentos de 5 unidades desde el punto A con la herramienta *Segmento de longitud dada* (imagen 3).

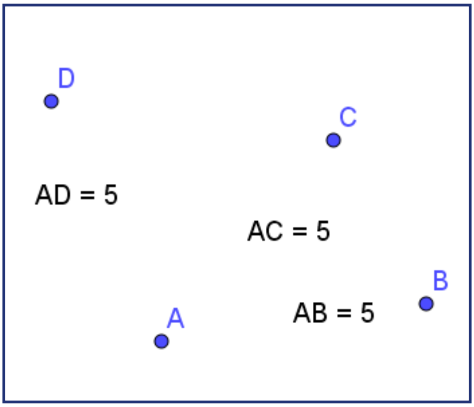
En este caso nuestras intervenciones irían en este sentido, preguntándoles: ¿dónde está el punto a 5 de A?, ¿si muevo el punto A, qué pasa con los segmentos?, ¿se mantiene la distancia de 5 si se mueven?, ¿hay otros puntos a 5 unidades de A que no hayas considerado?

3



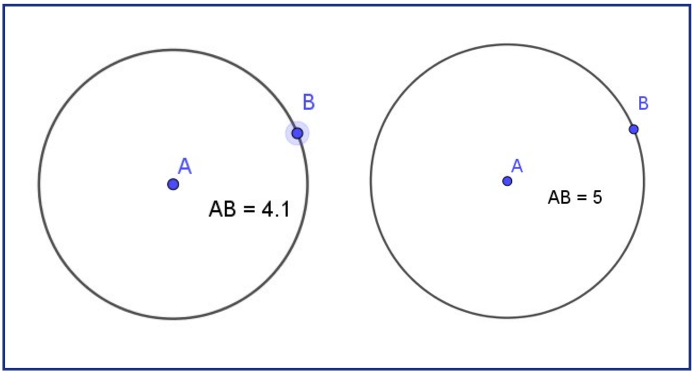
Otra posibilidad sería que marquen un punto a ojo y luego usen la herramienta *Distancia o longitud*, y acerquen o alejen, pero al mover tanto el punto A como los otros puntos no se mantengan a 5 unidades (imagen 4). Aquí les preguntaríamos, en primer lugar, si esa resolución responde la consigna o no. Si muevo el punto A, ¿los puntos que están a 5 permanecen a dicha distancia?

4



También podrían realizar una circunferencia utilizando la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, sin considerar la medida del radio, y luego usar la herramienta de medición para ajustar a 5 unidades de A; o que tracen un segmento de 5 unidades a partir del centro de la circunferencia y superpongan un punto de esta con el punto extremo del segmento (imagen 5).

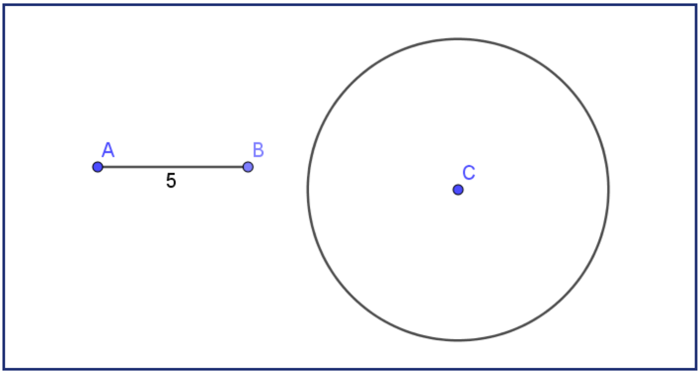
5



Nuestra intervención aquí sería apelar al movimiento y preguntarles, en el caso de que quedara un segmento de 5, ¿cómo marcar esos puntos que no quedan marcados al girar el segmento sobre el punto A? ¿Qué herramientas pueden servir? E invitarlos a probar algunas.

Otra posibilidad es que realicen un segmento de 5 unidades a partir de A y luego que usen la herramienta *Compás*, haciendo centro en A o haciendo centro en el otro extremo del segmento. Aquí pensamos que si hicieran centro en A, las intervenciones irían en cómo argumentar que todos los puntos de la circunferencia están a 5 unidades de A. Si hacen centro en el extremo del segmento trazado, las intervenciones girarán en torno a las distancias de los puntos que forman la circunferencia (imagen 6).

6



EN EL CAMPO...

La clase comenzó con la docente Florencia (en adelante DF) solicitando a los alumnos que enciendan las netbooks, que identifiquen el ícono de GGB y que lo abran. Una vez que todos estuvieron listos, se les explicaron rápidamente los nombres de los botones de las herramientas que posee el programa y se les leyó la consigna. Ya con la consigna dada, los diferentes grupos se dispusieron a resolver el problema.

Durante la puesta en común, como no se contó con la pizarra digital, los asuntos giraron en torno a la resolución del problema, se mencionaron las herramientas utilizadas y se puso énfasis en que los alumnos pudieran explicar por qué estaban seguros de que todos esos puntos estaban a 5 unidades de A apelando a la noción de circunferencia. La cuestión del movimiento se trabajó en los diferentes grupos y se pospuso el análisis colectivo para la siguiente clase.

Seleccionamos en este capítulo el trabajo realizado por dos de los grupos para poder desarrollar un análisis de sus producciones y resoluciones.

Episodio 1: "Un puntito acá y otro puntito acá y otro puntito acá"

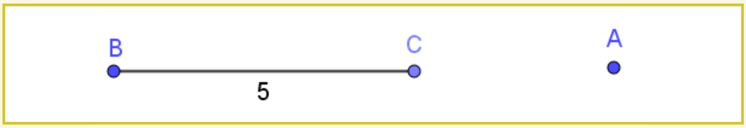
El primer grupo estuvo conformado por tres estudiantes, que indicaremos con sus iniciales: A, R y L.

Luego de que los alumnos abrieron el programa GeoGebra, la DF les pidió que nombraran el punto que aparecía en la pantalla. El otro docente que estuvo trabajando con ellos (Nicolás, en adelante DN) les preguntó qué es lo que querían ir probando, si primero les gustaría conocer las herramientas, y los alumnos le contestaron que sí. Simultáneamente les sugirió que fueran observando qué herramienta les podría servir para resolver el problema.

El DN les propuso investigar las diferentes herramientas y que desplegaran el menú de los segmentos. Los alumnos eligieron la herramienta *Segmento de longitud dada* y el alumno A recordó que la DF había hablado de centímetros. En realidad, la consigna había propuesto encontrar puntos a una distancia de 5 unidades del punto A.

Los alumnos crearon un segmento de 5 unidades a la izquierda del punto A y quisieron moverlo para posicionar uno de los extremos sobre dicho punto, pero no lo lograron porque no habían seleccionado la herramienta *Elige y mueve*, que les permitía cambiar de lugar lo que iban construyendo con el GeoGebra (imagen 7). Esto nos demostró el desconocimiento del funcionamiento de las herramientas del programa.

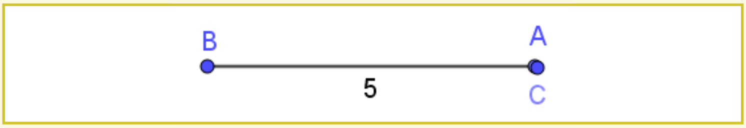
7



El DN les preguntó si sabían cuál era la herramienta que les ayudaría a mover los objetos, y el alumno R señaló con el dedo la herramienta *Elige y mueve*, y la seleccionaron.

Los alumnos lograron mover el segmento y dejaron uno de los puntos del mismo sobre el punto A. El DN les dijo que ese es un punto que está a 5 unidades de A y les preguntó cómo podrían buscar otros que estuvieran a la misma distancia (imagen 8).

8



Los alumnos se quedaron pensando sobre lo realizado y el DN les ayudó a repensar las estrategias utilizadas hasta ese momento:

> DN. Eligieron un "segmento de longitud dada", lo crearon y ahora encontraron un punto que está a 5 de A. Pero la consigna que dio la DF dice también que si yo lo muevo se tiene que mantener eso. Si yo lo muevo, ¿se mantiene eso? Muévanlo un poco.

El alumno R movió uno de los extremos del segmento (el opuesto al punto A) y el recorrido de ese punto formó una circunferencia con centro en A. El DN los invitó a reflexionar sobre este recorrido preguntando si todos esos puntos estaban a 5 unidades del punto A. El alumno L respondió que no, y el DN les volvió a sugerir que movieran el segmento, recordándoles que ellos habían creado un segmento de 5 unidades y que esa distancia no variaba.

El alumno A volvió a mover el extremo del segmento y en un momento el DN le pidió que parara y preguntó si ese punto estaba a 5 unidades de A. Los alumnos se quedaron pensando en el movimiento que acaban de ver y el alumno L respondió que no.

> DN. ¿Esa distancia (*refiriéndose a la longitud del segmento*) cambia?
> R. No, es la misma.
> DN. Es siempre 5. Si yo lo dejo en el punto A, están siempre a 5. A ver, movelo.

Los alumnos eligieron la herramienta *Segmento de longitud dada* y cuando intentaron mover el segmento crearon otro. El DN les hizo ver que estaban creando un nuevo segmento.

Los alumnos cliquearon la herramienta *Elige y mueve* y movieron el extremo del segmento logrando inferir que el recorrido que realizaba el punto extremo del segmento formaba una circunferencia.

> DN. ¿Todos esos puntos están a 5 unidades?
> A y R. Sí.

> DN. Si el segmento mide 5, todos los puntos están a 5 unidades. Dale otra vuelta. Si yo traslado este segmento del punto A a otro lugar... R, movelo (*refiriéndose al segmento*) para otro lado, ¿ese punto (*el DN señala un extremo del segmento*) está a 5 unidades de A?
> R. No.

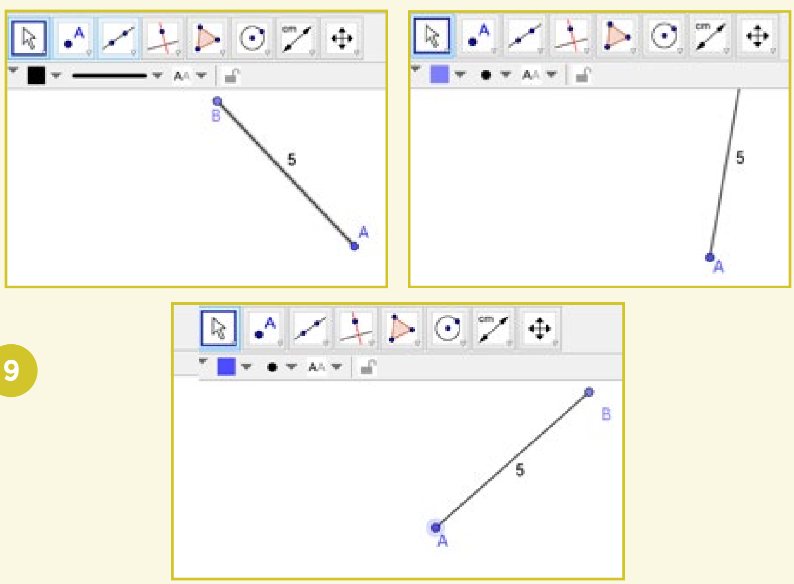
En este momento entró en juego la variable del movimiento, ya que el segmento de 5 unidades había sido construido independientemente del punto A. Esto hizo que al mover el segmento se desarmara la construcción de centro A y radio 5. El DN retomó la condición del problema recordándoles que al mover algunos de los elementos de la figura estos no podían desarmarse.

El docente propuso un resumen de lo hecho hasta ese momento:

> DN. Moviendo el extremo del segmento que no coincide con A vemos todos los puntos que están a 5 de A, pero si mueven el segmento, la distancia cambia. Entonces así ustedes pueden imaginar todos los puntos. Miren, lo voy a mover una vez yo (*el DN movió el extremo del segmento como las agujas de un reloj con el objetivo de mostrar todos los puntos de la circunferencia*). Imagínense todos los puntos.

El alumno A mencionó que en un momento del giro del segmento había algunos puntos que no se encontraban a 5 unidades de A (señalando el punto B cuando quedaba fuera de la pantalla como muestra la segunda pantalla) (imagen 9).

9



Las imágenes de las tres pantallas muestran la secuencia del giro del segmento. En la segunda imagen, el extremo B queda fuera de la pantalla del programa.

El alumno R le respondió que si bien esos puntos no se veían porque estaban fuera de la pantalla, igual seguían manteniendo la distancia requerida.

El DN les volvió a proponer que buscaran otra herramienta –entre las que tenían– que permitiera encontrar todos los puntos y que cumpliera a la vez con el requerimiento del movimiento.

Los alumnos desplegaron la herramienta para construir circunferencias y, entre las herramientas disponibles (*Circunferencia y punto*; *Circunferencia y radio* y *Compás*), eligieron *Compás*.

El alumno A intentó entonces crear una circunferencia utilizando la herramienta *Compás*; cliqueó en el punto A y luego en otro cercano a dicho punto. No logró construir la circunferencia, ya que le faltó un clic, pues la versión de GGB que estaba instalada funcionaba tomando una distancia que considera el radio y luego se debía determinar el centro. Después de probar varias veces logró comprender el funcionamiento de la herramienta.

> DN. Ahí ya te hizo la circunferencia, te hizo muchas. Podés ir para atrás (*señalando la flecha*).

El alumno trató de utilizar la herramienta.

> A. Un puntito acá (*posicionándose sobre el punto A*) y otro puntito acá (*posicionándose en el extremo del segmento de 5 unidades*) y otro puntito acá (*volvió a cliquear sobre el punto A y creó la circunferencia con centro A*).
> DN. A ver, movelo.

El alumno R movió el punto del segmento que estaba sobre la circunferencia y observó que recorría el perímetro de la misma.

> DN. Ese es el segmento que habías hecho. Lo que hiciste por último es esto (*señalando la circunferencia*). ¿Esa circunferencia se puede mover?

Los alumnos trataron de mover la circunferencia posicionándose en uno de los puntos de la misma y no lograron moverla.

> DN. Los puntos que forman la circunferencia, ¿están a 5 de A?
> A y R. Sí.
> DN. ¿Y cómo lo saben?

El DN les preguntó cómo podían justificar que todos los puntos que formaban la circunferencia estuvieran a 5 unidades de A. Los alumnos trataron de justificar la distancia de todos los puntos que formaban la circunferencia con el centro contando los pasos que habían realizado. Sin embargo se les dificultó explicitar las relaciones que daban cuenta de la noción de circunferencia.

Creemos interesante reparar en este camino hacia la argumentación porque dieron cuenta de su trabajo a partir del uso de las herramientas seleccionadas y no desde las relaciones geométricas que tenían disponibles. Quizá esto pueda deberse a que era la primera vez que trabajaban con el programa o a la complejidad que conlleva explicitar las relaciones. Considerando que esta práctica de "hacer geometría" se está inaugurando, creemos que aún resta desplegar un trabajo sostenido que favorezca el desarrollo de la argumentación a través de las relaciones geométricas.

Episodio 2: cómo pasar del "no sé, adivino" al "¡yo sé!"

Este grupo estuvo conformado por dos alumnos cuyas iniciales son D y S.

Para resolver el problema, el alumno D empezó por hacer un segmento con la herramienta *Segmento* desde el punto A pero sin dar la medida, con lo cual descartó la estrategia por no saber cómo seguirla. Cuando la DF se acercó, empezó un intercambio muy interesante. El alumno D parecía tener muy claro que para resolver una parte del problema necesitaba hacer una circunferencia con centro en A. Este mismo alumno empezó por dibujar una circunferencia con centro en A pero con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, la cual no establece una distancia fija entre el centro y los puntos de la circunferencia, tal como el problema lo requiere. La intervención docente giró en torno a dos asuntos: el primero, asegurarse de que el alumno D explicitara la propiedad de que todos los puntos que pertenecen a una circunferencia equidistan del centro; la segunda intervención intentó poner foco en que si bien la respuesta que dio este chico era parcialmente correcta, no fue suficiente desde el punto de vista de GGB, ya que el movimiento modificó la distancia pedida en el problema. Transcribimos a continuación algunos diálogos que ilustran las ideas de este niño:

> DF. ¿Cómo sabemos que está (*se refiere a cada punto de la circunferencia*) a 5 de A? ¿Por qué pensás que hay que hacer una circunferencia?
> D. Yo digo... hago una circunferencia (*movió las manos, y con el dedo hizo el giro de la circunferencia*).
> DF. ¿Vos decís que haciendo una circunferencia... qué? ¿Qué pasa con todos estos puntos? (*La docente hizo el mismo señalamiento que el chico.*)
> (*La DF repitió el problema:* buscar todos los puntos que estén a 5 de A y que cuando usemos la herramienta *Elige y mueve*, esos puntos que están a 5 queden fijos a 5.)
> D. Tenemos que hacer una circunferencia.
> DF. ¿Por qué una circunferencia?
> **S. Así tenemos todos los puntos.**
> DF. Perfecto, así no tenemos que hacer tantas líneas a 5 (*antes había*

realizado un segmento desde A pero sin medida dada). ¿Cómo hago para que sea a 5 de A? Fijate en las herramientas, ¿cuáles vamos a necesitar? (*mientras la docente habló con el alumno D, buscó la herramienta* Circunferencia (centro, punto), *pinchó en A, dibujó una circunferencia, y la agrandó y achicó como jugando*).
DF. ¿Cómo sabemos dónde queda a 5 de A?
D. ¿Ahí? (*detuvo el movimiento*).
DF. ¿Cómo sabés que es ahí?
D. No lo sé, adivino.

De este diálogo se podría inferir que, al no haber trabajado antes con GGB, a este grupo de alumnos el problema les resultó complejo de resolver. El alumno D sabía que tenía que hacer una circunferencia. Sin embargo, dibujarla no era suficiente, ya que el movimiento obligaba a elegir una herramienta en que la distancia fuera un asunto a considerar, pues era parte del problema buscar todos los puntos que estuvieran a 5 de A: al mover el dibujo, esos puntos debían mantener la distancia.

En un segundo momento el alumno D logró poner la medida del radio usando la herramienta *Segmento de longitud dada*. De ese modo pudo obtener cierto control en su procedimiento ya que segundos antes había intentado adivinar la medida del radio. Este pasaje dio cuenta de esta ida y vuelta sobre la idea de retroacción (Laborde, 1997):

DF. ¿Cómo sabemos dónde queda a 5 de A?
D. ¿Ahí? (*detuvo el movimiento*).
DF. ¿Cómo sabés que es ahí?
D. No lo sé, adivino.
DF. Hay una herramienta, fijate, probá.
(*Probó* Circunferencia (centro, punto) *y siguió jugando*.)
DF. Si muevo no me dice a cuánto está. Tenemos que buscar una herramienta que nos diga cuándo está a 5.
(El chico señaló la herramienta de medida.)
DF. ¡Ah!, esa nos mide. ¿Qué tendría que hacer? (*DF enseñó a medir.*) Clic en un punto, clic en el otro y ahí me dice la *Distancia o longitud*. ¿Qué medida me dice ahí?
D. 1.55.
DF. ¿Qué midió? ¿De dónde hasta dónde? ¿Qué distancia midió?
D. 1.55.
DF. Pero esa medida, 1.55, ¿de qué es?
D. ¿De la circunferencia?
DF. ¿De qué cosa de la circunferencia?
D. La medida.
DF. Pero ¿cuál? Tenemos tres cosas dibujadas: el centro, este punto (*el de la circunferencia*) y la circunferencia. ¿La medida de qué nos dice 1.55? Mirá, si uso la *Flecha* para mover, cuando toco la

circunferencia se mueve pero no se agranda ni achica, en cambio cuando pincho en B (*punto de la circunferencia*), ¿qué pasa con el número, con la medida?
D. Aumentó.
DF. ¿Por qué aumentó?
(*El alumno D movió, agrandó "la" circunferencia y se detuvo cuando la medida alcanzó el 5.*)

El alumno D dio un paso más, incorporó una herramienta, la de la medida, adquirió mayor dominio del programa y, podríamos conjeturar, ¿mayor comprensión del problema? Sin embargo, siguió sin ser suficiente para poder resolverlo. Recién cuando llegó su compañero pudieron dar cuenta de la situación con la herramienta *Circunferencia (centro, radio).* Cabe preguntarse si la elección de esta herramienta fue casual, pues el alumno S puso la medida de 4 para el radio. El otro niño, D, no estuvo lejos: en estos ensayos probó una herramienta que les permitió luego llegar a una solución correcta.

Fue muy interesante el proceso que fueron llevando ambos; al principio pudo verse por ensayo y error, pues el indicar 4 en vez de 5 unidades en dicha herramienta puso en evidencia cierta exploración, al no haber considerado la medida de 5.

Transcribimos el intercambio respecto del uso de esta herramienta:

DF. ¿Qué quiere decir eso que hiciste? Que hiciste una circunferencia... ¿Qué es ese 4 que habías puesto?
(*Silencio, el alumno D se encontraba un poco disperso.*)
DF. Mirá D, vamos a la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* como hizo S, ponés un punto y ahí (*en el campo que se abrió*) S puso un 4, ¿qué quiere decir 4? ¿Dónde está el 4?
(*El chico señaló un punto de la circunferencia y dijo "En la circunferencia".*)
DF. ¿Este punto es 4?
D. En la circunferencia.
DF. ¿Qué quiere decir eso?
D. La circunferencia mide 4.
DF. ¿Desde dónde hasta dónde mide 4?
(*El otro niño, S, señaló del centro a la circunferencia y el alumno D dijo "Hasta el punto", queriendo decir un punto de la circunferencia.*)
DF. ¡Ah! ¡Perfecto! Y pregunto... Este punto (*DF señaló un punto distinto del señalado por los chicos*) ¿también mide 4 del centro a este otro punto que señalo?
D. ¡Sí!
DF. Entonces ahora el problema es este, voy a borrar. Ustedes tienen el punto A, se los voy a marcar (*DF dibuja el punto A en la pantalla*), tienen que poner todos los puntos que estén a 5 de A. Porque mirá lo

que hizo D (*DF se dirigió a S, que tenía otra computadora y había probado la herramienta* Circunferencia (centro, radio) *con 4*). D hizo una circunferencia con herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y midió y le dio 5, pero cuando yo la muevo se aleja y acerca del punto A y no queda más a 5 de A, cambia el número 5 que está puesto ahí, cambia la medida. El problema pide que siempre esté a 5. ¿Qué herramienta necesito para eso?
D. ¡Yo sé!
(*Este chico dibujó la circunferencia con la herramienta* Circunferencia (centro, radio) *colocando 5 unidades en el campo que se le abrió.*)

Hubo varios asuntos de este intercambio para destacar:

- Uno que nos pareció muy poderoso fue la posibilidad de explorar qué permite el programa. El alumno S llegó a la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* explorando las que le permitían dibujar circunferencias. Descartó la primera, pues era la que ya había usado su compañero, y siguió por la segunda. Pareciera quedar claro que este niño sabía que para encontrar los puntos equidistantes al punto A necesitaba trazar una circunferencia.
- Otro asunto interesante fue la complementariedad del trabajo de la pareja sostenida mediante las intervenciones de la docente. Lo que el alumno D realizaba fue tomado por su compañero, quien siguió a partir de ahí. Para que luego D retomara lo que había pensado/actuado/dibujado su compañero S. Cuando el alumno D dijo "yo sé", pareciera que había ubicado la herramienta que necesitaba para conservar la distancia de 5 que le pedía el problema. ¿Podríamos pensar que en este trabajo de ir y venir, probar y explorar, comentar y responder, buscar e intentar nuevamente, se fueron construyendo ciertos conocimientos que quedaron implícitos? Lo destacable en este punto fue la construcción durante el intercambio, cómo algunas de las interacciones sociales produjeron efectos en las posibilidades de resolución. Fue a partir del procedimiento del niño S que el otro, D, pudo decir "yo sé" y resolver el problema.

A MODO DE CIERRE

Llegando al final, quisiéramos retomar algunas ideas que nos resultan interesantes y que surgieron en nuestro trabajo para compartirlas con los lectores. Las mismas nos invitan a seguir pensando para tenerlas presentes en nuestra práctica en el aula y generar así un nuevo espacio de reflexión.

Una primera cuestión es que creemos que el movimiento que otorga el GGB permitió profundizar o resignificar la idea de radio como distancia. Esto se hizo visible en el Episodio 1, cuando los alumnos comenzaron a hacer girar el segmento (radio) como las agujas de un reloj, identificando así que el extremo del radio recorre todos los puntos de la circunferencia.

Al mismo tiempo creemos que hubiera sido pertinente haber realizado una exploración previa de las herramientas que ofrece el programa porque, en algunos casos, su desconocimiento resultó un obstáculo para resolver el problema planteado. Los alumnos contaban con los conocimientos geométricos matemáticos para resolver la situación, pero al desconocer la utilidad o función de cada una de las herramientas se les dificultó la resolución. En general, sucedió que los alumnos querían trazar una circunferencia con centro en A pero no sabían qué herramienta utilizar.

Una cuestión que seguimos discutiendo se relaciona con los elementos de la circunferencia, centro y radio, y las herramientas que se utilizan en el GGB para la construcción de esa figura. Por un lado, pensamos que habiendo seleccionado las herramientas adecuadas para resolver el problema, es necesario que los chicos se den cuenta de que tienen que marcar el centro en el punto A para conservar las relaciones de la figura al insertarle el dinamismo, ya que las estrategias de superposición invalidan la resolución, pues al mover alguno de los objetos no se mantiene la distancia requerida entre A y los puntos marcados. Por otro lado, pensamos que el dinamismo que propone el GGB genera condiciones para que se den idas y vueltas, y en este caso tener que garantizar una distancia de 5 produjo resignificaciones sobre la noción de radio. Las estrategias de resolución que no dejan fija la distancia de 5 ponen a los alumnos a explorar sobre las herramientas pertinentes del GGB para la resolución del problema. Por ejemplo, cuando usan la medida para ajustar la distancia en una circunferencia realizada con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*; es ahí donde deben buscar una nueva herramienta que les asegure la conservación de la distancia a pesar del movimiento.

Será cuestión de poner foco en las intervenciones para reflexionar sobre los conocimientos implícitos que subyacen a la elección de determinadas herramientas y no otras.

A lo largo de nuestra escritura surgió una discusión que no terminamos de saldar. Nos preguntábamos si el hecho de que los alumnos obtuvieran una respuesta parcialmente correcta tenía que ver con el desconocimiento geométrico o tecnológico. A primera vista, podría parecer que el desconocimiento está vinculado a la herramienta, ya que era la primera vez que trabajaban con el programa. “Eso” que no les alcanza para resolver es dialéctico. ¿Qué es lo que no les alcanza? Su procedimiento no resulta suficiente justamente por el dinamismo que aporta el GGB. Entonces, para poder resolver el problema necesitan “algo más”. En esa búsqueda... ¿el conocimiento geométrico se estabiliza, se asienta, se resignifica? Nos parece que es una cuestión sobre la que vale la pena seguir pensando.

Otro asunto que nos planteamos fue si considerar al GGB como variable didáctica también permite entrar en el juego matemático, es decir en un modo de hacer matemática. ¿Cuál es la relación entre el dinamismo y la actividad matemática? ¿Será el dinamismo el que genera las condiciones para que los estudiantes asuman la responsabilidad matemática en la resolución de un problema?

Dejamos abiertas estas preguntas y otras tantas que nos fuimos haciendo como equipo de trabajo durante el recorrido del Seminario. De algo estamos seguros, y es de que fuimos parte de un proceso de construcción colectiva de conocimiento junto a compañeros de la cursada y docentes, analizando y poniendo foco en las ideas de los estudiantes para mejorar nuestra práctica.

CAPÍTULO 2

Recorriendo un nuevo camino junto a la geometría

Sandra Patricia García, Lidia Mabel Bullón,
María Julia Benites y Ricardo Vito Cafici

¿Qué es la geometría cuando se trata de un objeto que hay que enseñar en la escuela primaria? Se podría afirmar que es el "estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos" al tiempo que "despliega la relación entre lo experimental y lo anticipatorio" y por lo tanto alberga actividades de muy diversa naturaleza (Sadovsky *et al*., 1998: 7).

Con relación a este tema, resulta un desafío incorporar las nuevas tecnologías como herramientas para que ayuden a complementar, por su dinámica, la apropiación y mejora en la calidad de los conocimientos; además de mejorar las expectativas de logro que poseemos como docentes. Por esto nos pareció interesante, a partir de nuestra experiencia con el software GeoGebra (GGB), llevar adelante una secuencia didáctica diferente.

GeoGebra permite abordar la geometría y otros aspectos de la matemática a través de la experimentación con los dibujos realizados en dicho programa. Una vez realizada una construcción, y bajo cierta intencionalidad docente, el movimiento de los puntos libres hace posible deducir propiedades de las figuras involucradas mediante el análisis de las herramientas utilizadas o a través del estudio de otras relaciones que no fueron explicitadas en el proceso de construcción.

Colette Laborde, al referirse a un programa similar a GeoGebra, señala:

> la demostración es susceptible de adquirir un estatuto distinto en el Cabri-geómetra [en nuestro caso GeoGebra] en la medida en que permite explicar fenómenos visuales o incluso la imposibilidad de fenómenos visuales. [...] El entorno Cabri-geómetra ofrece posibilidades de organización de un medio para el aprendizaje de este control de las relaciones entre lo visual y lo geométrico por tres razones:
>
> - los fenómenos visuales adquieren importancia por la dimensión dinámica del Cabri-dibujo;
> - estos fenómenos están controlados por la teoría ya que son el resultado de una modelización gráfica de un modelo analítico de ciertas propiedades geométricas;

- el sinnúmero de posibilidades de situaciones geométricas que pueden ser visualizadas con un gran número de objetos y en forma precisa (Laborde, 1997: 43).

Las estrategias de soluciones posibles estarán basadas en los conocimientos geométricos disponibles que se retroalimentan con el movimiento que permite el programa.

Desde nuestro lugar de estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), consideramos que el GGB nos aportó un modo más integral de producir relaciones geométricas invitándonos a salir de lo estático, como se haría con el lápiz y el papel. De esta manera pudimos establecer nuevas relaciones, elaborando un análisis de las propiedades que se despliegan en el momento de mover los elementos de un dibujo (que no se podían establecer a simple vista con un único dibujo estático en el papel). También nos proporcionó la noción de una familia de dibujos a la que le corresponden determinadas relaciones geométricas. Sin embargo, teníamos cierta inquietud con relación a si el uso del GGB conformaría un aporte al trabajo con los contenidos geométricos y validaciones de los mismos, ya que en nuestra experiencia implicó mayor esfuerzo a la hora de dar razones y argumentos. Al introducirse el movimiento, se produjo una ruptura con relación a nuestro modo de pensar sobre algunos objetos geométricos, lo cual nos exigió, entre otras cuestiones, discutir la cantidad de soluciones que admite un problema, efectuar construcciones bajo ciertas condiciones –tanto didácticas como provenientes del uso del GGB–, resignificar relaciones geométricas, y en todo momento analizar las distintas propiedades puestas en juego. Es por esto que vislumbramos una potencialidad del programa como herramienta en el trabajo geométrico.

La cátedra nos propuso salir al campo y promover indagaciones concretas con nuestros alumnos. De este modo, nosotros, un grupo de estudiantes del Seminario de Geometría, nos planteamos el desafío de planificar y encarar la puesta en acción de una secuencia didáctica que incluyera dicho programa, con el objetivo principal de vivenciar experiencias reales que dieran cuenta de cómo los chicos interactúan con este dispositivo.

Para ello decidimos llevar adelante una secuencia didáctica que combinaba una actividad lúdica de geometría en lápiz y papel, con otra en la que se debía utilizar el programa GeoGebra, para responder nuestros interrogantes.

¿Qué estrategias pondrán en práctica los chicos con el GGB en relación con:

- la actividad de juego,
- nuestras intervenciones,
- las herramientas del programa?

La secuencia la llevamos adelante en la Escuela Nº 9, Distrito Escolar 2, Genaro Berón de Astrada, en un 4º grado con 25 niños, y en el cual uno de los miembros de este equipo de indagación es el maestro; se trata de una escuela pública de la zona de Palermo de la Ciudad de Buenos Aires.

Según la maestra de 3º, los chicos habían trabajado figuras geométricas (triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo) y cuerpos de base triangular, pentagonal y esfera durante el transcurso de ese grado.

Resulta pertinente aclarar que el docente este año no había iniciado aún el trabajo en el área de geometría. Previamente había indagado en el grupo de alumnos, preguntándoles qué recordaban de lo visto el año anterior sobre esas figuras trabajadas: cantidad de lados, "puntas" (vértices), o ausencia de estos elementos. Vale la pena resaltar que los niños no habían utilizado el compás como herramienta de construcción, a pesar de que lo tenían en la cartuchera.

Con relación al trabajo con el GGB, los chicos no habían tenido ningún contacto con él, ni tampoco sabían de su existencia.

Dado que el grupo de chicos con el que íbamos a trabajar estaba acostumbrado a introducirse en los contenidos del aula con juegos, pensamos en empezar la secuencia con esa modalidad. Semanas atrás, los alumnos habían realizado un juego con características similares para el trabajo con el sistema de numeración. En esa ocasión, el juego contemplaba el uso de un tablero que contenía varias zonas circulares, a las que se adjudicaban distintos puntajes, y el objetivo consistía en identificar la cantidad de puntos, en una especie de "tiro al blanco".

La secuencia propuesta en geometría para el grupo se dividió en dos días, en los que se trabajó con dos módulos de dos horas cátedra cada uno.

Durante el primer día propusimos un juego llamado "Lluvia de pelotitas".[1] Se les entregó a los alumnos un tablero que no presentaba zonas circulares, pero sí las distancias que permitían construirlas. Organizamos a los chicos en parejas y repartimos a cada una un tablero de juego con las reglas escritas y un sobre con las cinco pelotitas de papel crepé naranja.

La consigna para los alumnos fue:

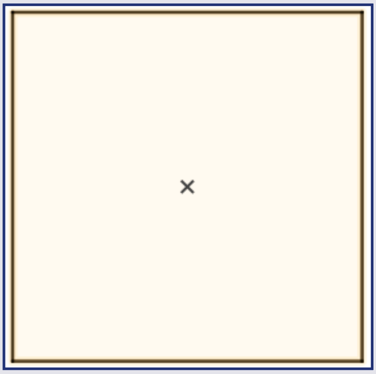
LLUVIA DE PELOTITAS 1

Materiales: tablero que me da el profe, 5 pelotitas de papel y una regla.

Reglas del juego: se juega de a dos. Por turnos, cada jugador arroja las cinco pelotitas a la vez desde una altura aproximada de 15 cm respecto de la hoja. Todas las pelotitas que caigan a menos de 2 cm de la cruz suman 10 puntos. Las que caigan a más de 2 cm y hasta 5 cm suman 5 puntos.

1. Este juego es una adaptación de un problema que aparece en el libro *Los matemáticos de 4º*, de Claudia Broitman, Horacio Itzcovich y Andrea Novembre, Buenos Aires, Santillana, 2016, p. 47. El mismo juego fue puesto en aula por los autores del capítulo 6 del presente libro; para un análisis sobre las estrategias que llevaron a cabo los alumnos de esa experiencia véase capítulo 6, "Y… ¿si empezamos sin lápiz y papel? Relato sobre la iniciación en el trabajo geométrico con GeoGebra".

Las que queden a más de 5 cm no suman puntos. Gana quien obtenga el mayor puntaje.



El dibujo del tablero que se ve en la imagen es un esquema y no respeta las medidas del que utilizaron los estudiantes para jugar.

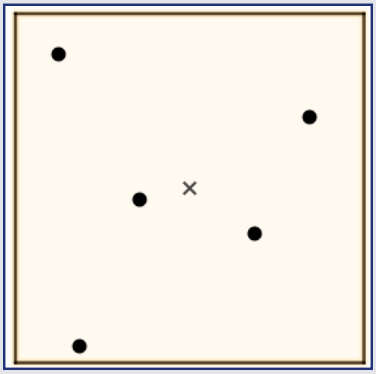
Puntos del jugador 1	Puntos del jugador 2 ....

Para facilitar la dinámica del juego se colocó en el pizarrón una tabla con las distancias y valores de puntaje como ayuda memoria.

Después de haber jugado durante veinte minutos, se les propuso que analizaran una partida simulada. Para ello se les entregó un nuevo tablero donde las pelotitas[2] ya estaban ubicadas y tres preguntas que tenían que responder:

LLUVIA DE PELOTITAS 2

Joaquín arrojó las pelotitas y quedaron así:



2. Las pelotitas están ubicadas con cierta intencionalidad didáctica: una está justo a 2 cm de la cruz, otra a 5 cm, una a menos de 2 cm, otra a más de 5 cm y la última está a más de 2 cm pero a menos de 5 cm.

1. ¿Qué puntaje obtuvo Joaquín?
2. ¿Cómo sabés qué pelotitas cayeron a menos de 2 cm sin medir cada vez que uno tira las pelotitas?
3. ¿Es posible que dos pelotitas permitan obtener cinco puntos cada una y estén en lugares distintos? ¿Dónde? De ser posible, ubicalas.

Para cerrar el primer día se realizó una puesta en común durante la cual se analizaron diferentes aspectos.

Con relación a la primera partida:

- ¿Tuvieron alguna dificultad a la hora de jugar?
- ¿Qué hicieron para saber cuántos puntos obtenían con cada pelotita?
- ¿Desde dónde medían?
- ¿Todos hicieron lo mismo o de la misma manera?

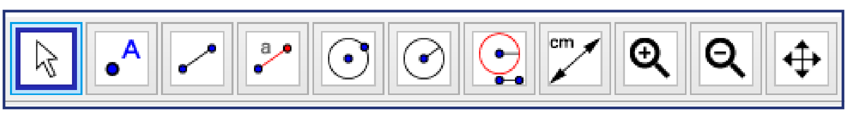
Con relación a la partida simulada:

- ¿A todos les dio el mismo puntaje?
- ¿Esta pelotita de acá cuánto valía?, ¿y esta?
- ¿Cómo podemos hacer para saber el puntaje de las pelotitas sin medir todo el tiempo?
- ¿Alguien lo hizo de otra manera?

Durante el segundo día presentamos el GeoGebra. Ofrecimos el programa y dejamos que lo exploren en una sesión que habíamos cargado en sus computadoras. Al abrir un archivo .ggb nuevo, aparece una barra de herramientas con muchos íconos.

Consideramos acotar las opciones de la barra con el fin de evitar posibles dispersiones y concentrar la tarea en el trabajo con círculos, circunferencias y puntos. La barra de herramientas acotada quedó de la siguiente forma (imagen 1):

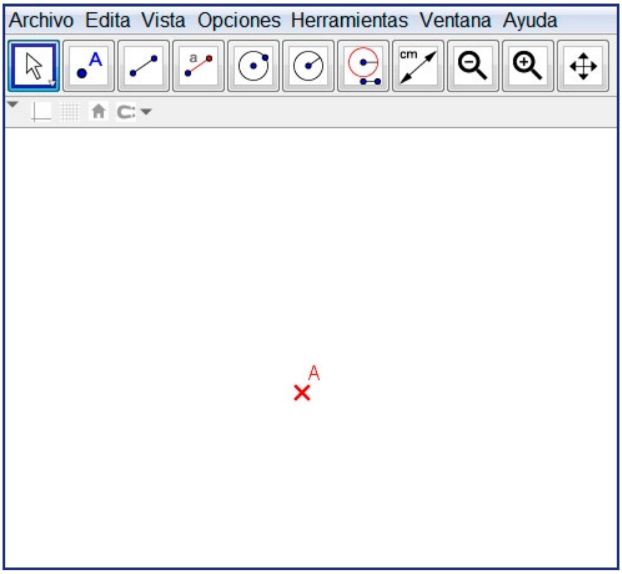
1



Los chicos exploraron durante 25 minutos aproximadamente en forma libre. El equipo de indagación intervenía si los chicos lo solicitaban, haciendo aclaraciones u orientando en el uso del programa.

Luego de la exploración ofrecimos un nuevo archivo. Ahí se encontraban las mismas herramientas y se presentaba una X roja fija en el centro de la pantalla, como en el juego de las pelotitas en lápiz y papel (imagen 2).

2



La consigna fue:

1) Colocar una “pelotita” (punto) que sume 10 puntos (también contaban con el tablero de puntaje en el pizarrón).
2) Luego, colocar otros puntos que valgan lo mismo, pero en otro lugar.

Para finalizar, se realizó una puesta en común con el objetivo de analizar:

- ¿Cómo hicieron para colocar el punto que valía 10 puntos?
- ¿Cómo saben que vale 10 puntos?
- ¿Cómo pueden hacer para no medir todo el tiempo?

DE NUESTRAS ANTICIPACIONES PARA EL TRABAJO CON LOS CHICOS EN GEOGEBRA

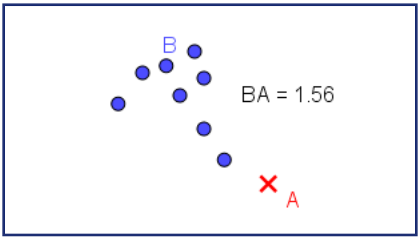
Al tratarse de un programa nuevo para nosotros y para nuestros alumnos, intentamos familiarizarnos con sus posibilidades antes de usarlo con los chicos y así poder poner el foco en los asuntos que pretendíamos indagar. Resolviendo nosotros mismos la actividad intentamos anticipar posibles acciones de ellos. Algunas de estas acciones fueron:

- medir con una regla o usando los dedos sobre la pantalla;
- colocar un punto B y usar la herramienta *Distancia o longitud* desde la cruz hasta este punto para verificar que esté a 2 unidades o menos.

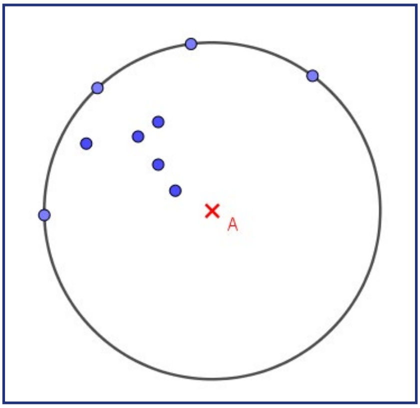
Luego, ubicar puntos cercanos a él y algunos sueltos entre el primero y la X (imagen 3),

- dibujar una circunferencia de centro X y radio 2 utilizando la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* y marcar puntos dentro de la zona circular o sobre el borde de la circunferencia (imagen 4).

3



4



PRIMER DÍA: INDAGACIÓN EN MARCHA

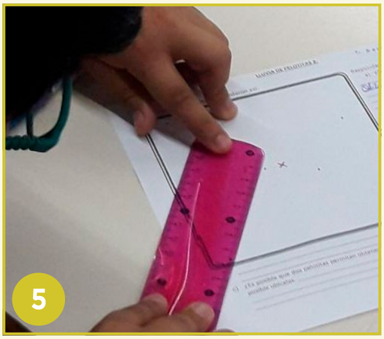
La primera actividad del recorrido de nuestra indagación, como ya comentamos, era el juego con lápiz y papel. Nuestro objetivo era propiciar un espacio en el que los alumnos pudieran encontrar estrategias y procedimientos propios para averiguar el valor que se le asignaba a cada pelotita, relacionándolo con la distancia en la que estaba respecto del punto central.

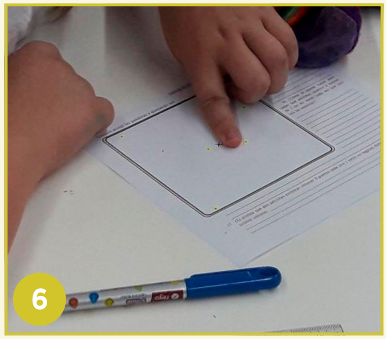
Al comenzar, observamos que los chicos usaban la regla para medir la distancia, que era el paso previo a averiguar cuánto valía cada pelotita.

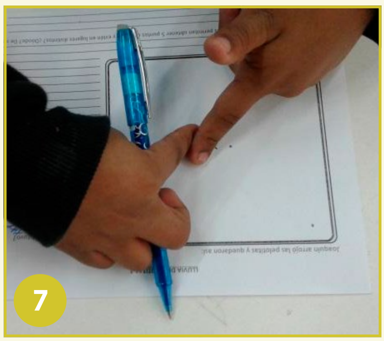
Luego les presentamos un tablero con un juego simulado, en donde debían ubicar aleatoriamente 5 pelotitas. Nuestro objetivo era avanzar con los chicos hacia la idea de círculo, zona circular y circunferencia.

Ellos comenzaron midiendo con la regla (imagen 5). Ahí es donde complejizamos la propuesta, diciéndoles que a partir de ese momento no iban a poder usarla. Entonces empezaron a buscar distintas estrategias, como usar los dedos, tomando un dedo como unidad (imagen 6). También trataron de responder usando su percepción visual de lo que se acordaban que era un centímetro.

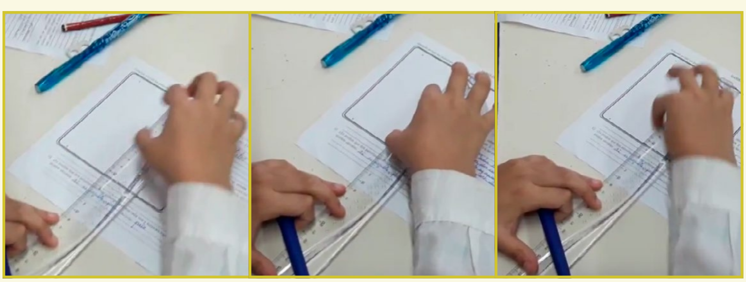
Al analizar la posibilidad de que 2 pelotitas estuvieran en lugares distintos con el mismo valor, algunos recurrieron a los dedos de ambas manos colocándolos, a partir de la cruz, hacia la derecha e izquierda respectivamente (imagen 7).


5


6


7

Una pareja de chicos marcó dos puntos que equidistaban de la X colocando la regla sobre ella a partir del 5 (imagen 8). Luego marcaron una pelotita en el 0 y otra en el 10. Uno de los niños del grupo colocó el 5 de la regla en la X y con sus dedos marcó la distancia de 5 cm hacia la pelotita que marcaron arriba. Luego hizo lo mismo hacia la que marcaron abajo. Finalmente, con su dedo índice trazó una circunferencia pasando por los puntos que equidistaban de la X.

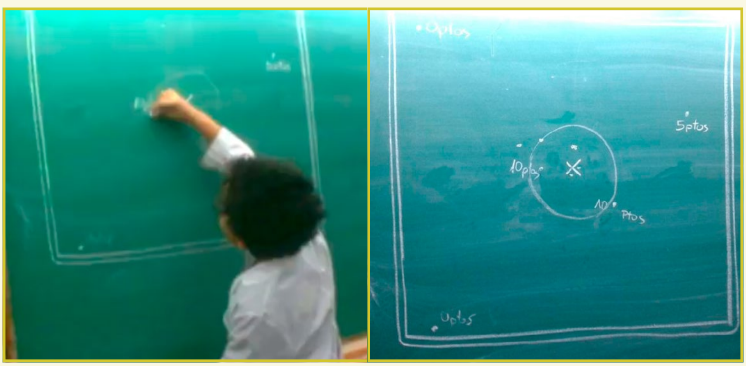
8


Al finalizar hicimos una puesta en común a partir de las tres preguntas de la partida simulada. Conversamos acerca de cómo se podría saber el valor de las pelotitas sin medir con la regla una y otra vez. Los chicos respondían apoyándose en unidades de medida no convencionales (dedos) y algunos pocos proponían memorizar las distancias que veían en la regla para luego trasladarlas al papel. Para la primera estrategia, el docente dijo que, aun utilizando los dedos, se seguía midiendo.

Con relación a la segunda alternativa planteada, los chicos y el docente llegaron a la conclusión de que la memorización permitía dar una distancia aproximada, pudiendo variar el valor de la pelotita. Frente a la repregunta del docente sobre cómo se podía hacer para no medir constantemente, un niño propuso: “Anotar como un círculo y poner como dos puntos y 2 cm y seguís rotando (*haciendo el gesto de un círculo con el dedo índice en el aire*)”.

El docente le preguntó: “¿Qué es eso de hacer una circunferencia?”. El alumno pasó al pizarrón (imagen 9) y trazó una circunferencia (a la que llamó círculo) a partir de un punto que está a 2 cm de la cruz (es decir, una circunferencia de 2 cm de radio y con centro en la cruz). Indicó el punto que está a la izquierda de la cruz, sobre la circunferencia, a 2 cm; y luego el opuesto que se encuentra a la derecha de la cruz, y también está sobre la circunferencia.

9



El docente le pregunta: “¿Qué es lo que está a 2 cm y a 2 de qué?... Marcamos lo que está a esa distancia de la cruz...”. El alumno señaló con su dedo todo el contorno del círculo.

Luego de que el alumno terminó de explicar lo que hizo para no medir todo el tiempo, se preguntó a la clase: “¿Dónde caerán las pelotitas que valdrían 5 puntos?”.

Los chicos dicen que afuera del círculo trazado por el compañero. Entonces se vuelve a preguntar: “¿Cómo voy a estar seguro sin medir continuamente que valdrán 5 puntos?”.

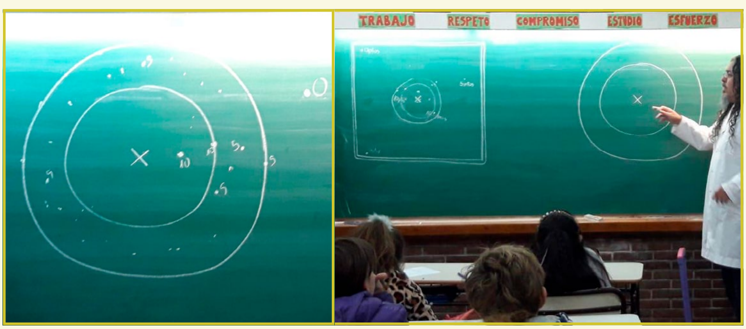
Una niña pasó al pizarrón (imagen 10) y trazó una circunferencia concéntrica a ojo diciendo que estaba a 5 cm de la X.

Cabe aclarar que la alumna no utilizó medidas exactas ni tuvo en cuenta las pelotitas dibujadas en el pizarrón con un valor determinado, sino que validó oralmente que ese círculo dibujado estaba a 5 cm de la cruz. Es por esto que en la imagen se observa una pelotita con valor de 5 puntos (imagen 11) que no toma en cuenta para su trazado, ya que se centra en tratar de demostrar que no necesita medir continuamente.


10


11

Luego de realizar estas construcciones a mano alzada, uno de los chicos preguntó cómo podía hacer él para dibujarlas. Una compañera explicó que había una "regla" (método) para realizarla. Para cerrar la puesta en común, el docente retomó las ideas trazando nuevamente a modo de referencia las circunferencias (imagen 12), mientras relataba con base en lo que hicieron los alumnos.

12


Entendemos que esta primera jornada les permitió a los alumnos identificar la presencia de varios puntos que pueden, todos ellos, estar a la misma distancia de uno dado y que la circunferencia colabora en su identificación. Apostábamos a que lo realizado fuera una referencia para proponer, en la clase siguiente, el trabajo con el GGB.

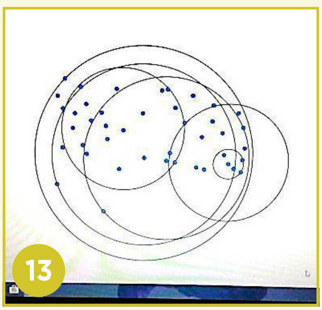
SEGUNDO DÍA: ACTIVIDAD CON EL GGB, "CONOCIENDO GEOGEBRA"

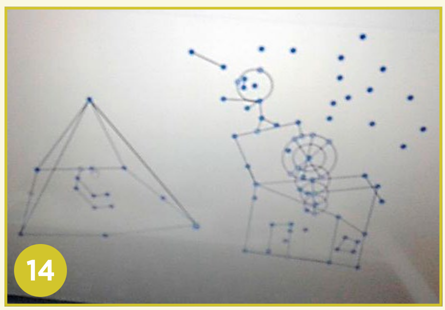
El docente de grado cargó en cada computadora los archivos para la exploración y la actividad el día anterior.

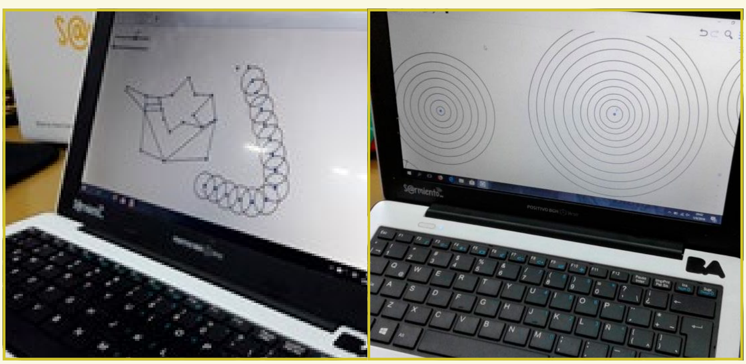
El objetivo fue que, a partir de la exploración, los alumnos lograran expresar qué les permitía hacer cada herramienta del programa para favorecer la ampliación de su vocabulario con relación a los íconos presentados.

Rápidamente, luego de escuchar la consigna "Abran el archivo y exploren el programa y sus diferentes herramientas", los alumnos empezaron a trabajar, la mayoría sin dificultad.

Cada ícono que se abría les permitió encontrar otras posibilidades de acción. Algunos dibujaron figuras geométricas, otros solo puntos y circunferencias (imagen 13), "un tipo con tres ojos..." –dijo alguno refiriéndose a tres circunferencias con un punto en el centro alineadas en la pantalla–, también hubo una casita (imagen 14) y muchas circunferencias "pegaditas" unas con otras (imagen 15).


13


14


15

Al explorar la herramienta *Compás*, los niños decían que no funcionaba, ya que las computadoras tenían una versión más moderna que la del docente (según la versión del programa GeoGebra que se use, al recurrir a la herramienta

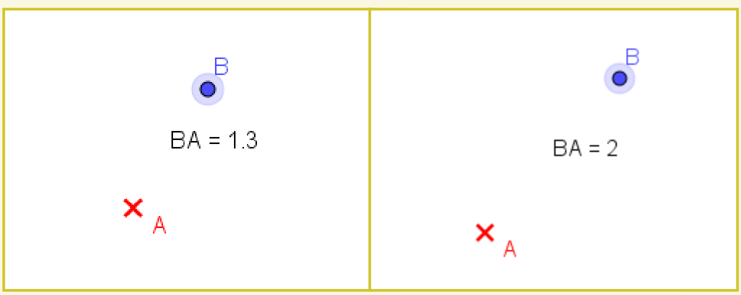
Compás es posible dibujar directamente la circunferencia o bien se deberá, en primer lugar, dibujar un segmento como radio para luego poder dibujar la circunferencia). Para usar esta herramienta, primero debían tener dos puntos marcados y luego cliquear sobre ellos para poder trazar la circunferencia con un radio igual a la distancia entre esos dos puntos.

Luego se les pidió a los niños que abrieran un nuevo archivo donde estaba marcada la X del juego. La consigna de la actividad fue dada en forma oral por el docente: “Marquen un punto donde podría haber caído una pelotita para que sume 10 puntos”. El docente les recordó a los niños las equivalencias –en relación con los puntajes– del juego realizado en lápiz y papel; además las dejó escritas en una pizarra con las distancias y puntajes correspondientes, para que quedaran a la vista como guía.

Comenzaron a colocar el punto próximo a la cruz. Cabe aclarar que en el aula se encontraba el maestro a cargo del grupo, tres miembros del equipo de indagación y un profesor de la cátedra. Ellos fueron preguntando cómo podían estar seguros de que esa pelotita podía valer 10 puntos. Algunos chicos fundamentaron midiendo con los dedos y otros (en su mayoría) utilizaron la herramienta *Distancia o longitud* para ver si la pelotita marcada por ellos estaba puesta a más, a menos o a 2 unidades del punto central.

Notamos que si la distancia entre la X y el punto marcado no era de esa medida, lo desplazaban hasta llegar a 2 unidades (imagen 16).

16



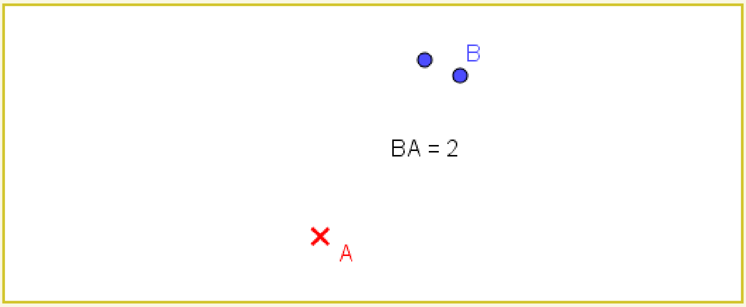
Luego de que los chicos indicaron cómo podían saber si la pelotita marcada valía 10 puntos, el docente les preguntó: “¿Será posible señalar la ubicación de otras pelotitas que estén en lugares diferentes al ya marcado pero que también valgan 10 puntos?”.

A partir de allí comenzaron a buscar entre las distintas herramientas exploradas cuál o cuáles les permitían colocar otros puntos que también tuvieran el mismo valor. Varios de ellos llevaron adelante las estrategias antes mencionadas. Otros realizaron las siguientes:

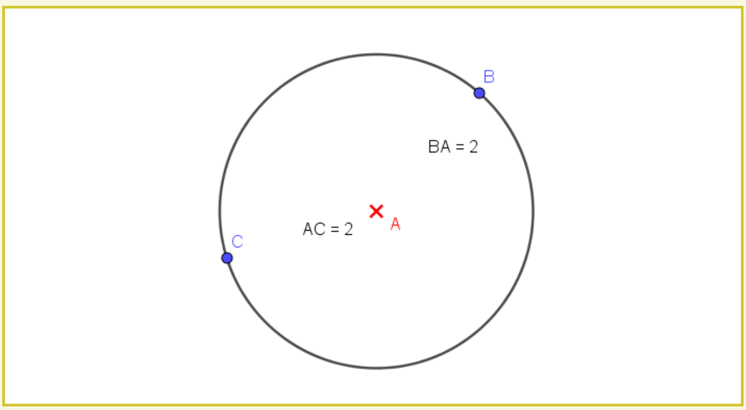
- Algunos realizaron la estrategia ya mencionada, ajustando un punto a 2 unidades de la cruz y luego colocaron un punto cercano a ojo (imagen 17).

- Otros marcaron dos puntos y los ajustaron utilizando la herramienta *Distancia o longitud* hasta lograr que estén a 2 unidades de la cruz, y luego utilizaron la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* eligiendo el centro A y como punto alguno de los dos puntos mencionados anteriormente (imagen 18).
- Por último, otra estrategia que surgió fue utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* y elegir como radio 2 unidades (imagen 19).

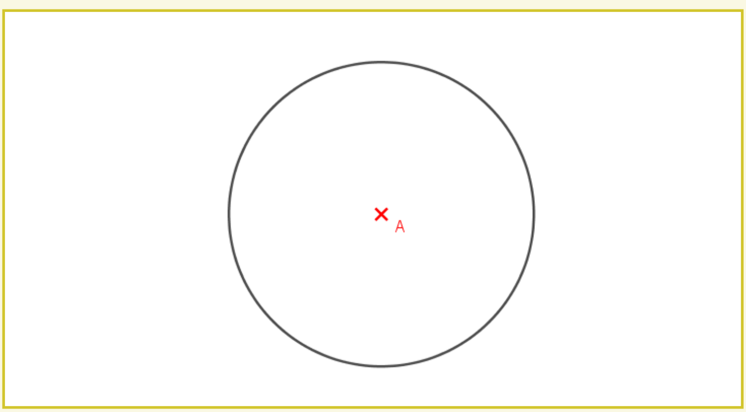
17



18



19



Para finalizar la actividad se realizó una puesta en común en la que los alumnos verbalizaron sus procedimientos, dictándoselos al docente, quien los iba realizando en su computadora y proyectaba las imágenes resultantes en una pantalla (imagen 20).

20

PENSANDO LAS PRÁCTICAS

> Si nos preguntamos qué son las figuras la respuesta no es la misma desde la perspectiva del alumno que desde el conocimiento del docente. En las primeras aproximaciones de los niños, las figuras son tratadas esencialmente como dibujos. Es decir, son marcas en el papel cuya interpretación está fundamentalmente basada en la percepción y acerca de las cuales no se plantean todavía las relaciones que pueden ser generalizadas (Sadovsky *et al.*, 1998).

La exploración constante con base en la medición que se debía realizar para ubicar puntos a cierta distancia de un centro y en diversas direcciones facilitó la idea de dibujar zonas circulares concéntricas, lo que podría llegar a ser el punto de partida para explorar e identificar elementos del círculo y de la circunferencia. Pensando en esta última,

> [...] los niños están en condiciones de reconocerla y diferenciarla de otras figuras mucho antes de saber que se trata del conjunto de puntos que equidistan de un centro. Por otro lado, esta última propiedad no va a ser accesible por el solo hecho de observar pasivamente dibujos de circunferencias. Será necesaria cierta actividad intelectual que trascienda el nivel perceptivo para que la propiedad se torne observable (ibíd.).

En la primera parte de la indagación se pudo observar el inicio de una actividad intelectual a partir del análisis de zonas (círculos) y los límites de las mismas (circunferencias).

En la puesta en común consideramos que hubo una aproximación a la idea de infinitud de cantidad de puntos dentro del círculo: cuando el maestro preguntó cuántas pelotitas se podían marcar que valiesen 5 puntos y un alumno respondió "todas las que puedan entrar". Otros alumnos respondieron "solo cinco", "cincuenta", "quinientos", "cinco mil". Creemos que esta respuesta estuvo condicionada por la cantidad de pelotitas que se pusieron en juego (cinco).

¿Será este punto de llegada un posible punto de partida para el trabajo de estos contenidos con el GGB? Este interrogante nos generó cierta incertidumbre sobre cómo relacionarán los alumnos lo trabajado con el uso del programa, por ser un terreno o campo desconocido aún para nosotros.

Durante el trabajo con GGB, todo lo que hicieron y adonde llegaron los niños en sus producciones fue lo que nos permitió realizar un análisis, a través del cual pudimos entender o intentar comprender qué tipo de relaciones lograron alcanzar.

"La exigencia de comunicar al programa un procedimiento geométrico de construcción permite caracterizar el objeto geométrico", dice Laborde (1997: 38). El programa GeoGebra posee una vista del protocolo realizado que muestra en detalle las herramientas utilizadas en la construcción de la figura. Esto nos facilitó poder ver en la computadora de cada uno de los niños los pasos que llevaron a cabo, en un orden detallado, aunque no era posible visualizar el movimiento. Al analizar los protocolos de nuestros alumnos pudimos inferir el porqué de sus desarrollos y el tipo de conceptualizaciones que lograron alcanzar.

En algunos trabajos observamos que poseían pocos procedimientos en sus protocolos; creemos que esto se debió a que tenían un mayor conocimiento del objeto geométrico. Por otra parte, en el caso de aquellos en quienes pudimos observar más cantidad de pasos supusimos que necesitaron más herramientas para asegurarse y constatar sus producciones.

> Las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto, lector o productor del dibujo, constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada. Este significado corresponde a lo que Fishbein (1993) llama *figural concept* (ibíd.: 33).

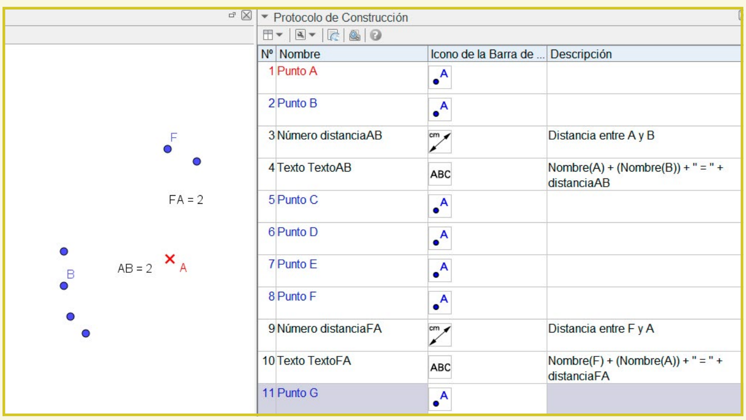
En la mayoría de las producciones se pudo apreciar que el movimiento que habilita el programa les permitió a los chicos considerarlo como estrategia para adecuar las distancias a la consigna dada.

En los siguientes trabajos notamos que, en cierta medida, se corrobora nuestra hipótesis: a mayor conceptualización, menos pasos en el protocolo y menor número de herramientas utilizadas.

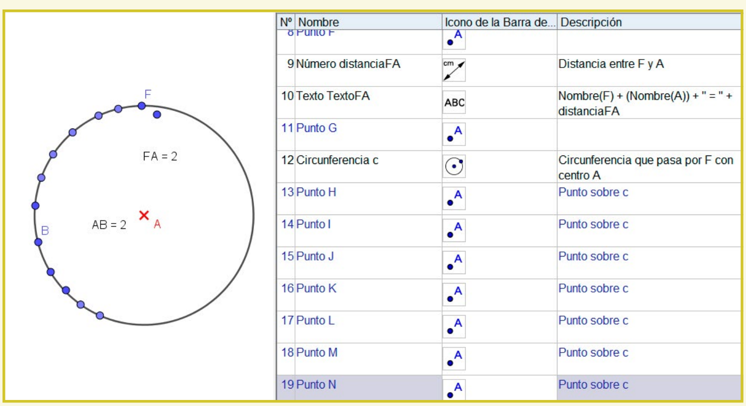
Destacamos una producción donde el alumno colocó el punto B, midió su distancia y lo movió hasta ubicarlo a 2 unidades de la cruz (imagen 21). Luego colocó otros, creemos, tratando de trazar una circunferencia a ojo. La posibilidad de movimiento que otorga el software le permitió asegurarse una medida. Consideramos que la ubicación de los otros puntos no solo se debió a que al estar cercanos estarían también a 2 unidades, sino que el alumno pudo haber recordado el juego simulado que se llevó adelante en la primera clase de esta secuencia en la que se trazaron circunferencias concéntricas. Si bien él había explorado y utilizado las herramientas de circunferencias, no fue su primera elección. En palabras de Itzcovich (2005), “lo que el ojo observa depende de los conocimientos que pone en funcionamiento el observador”.

En una segunda etapa de su construcción (imagen 22), la percepción visual ya no alcanzaba. El punto F ubicado a 2 unidades le sirvió como límite para trazar una circunferencia y a partir de ella poder ubicar puntos a la misma distancia sin necesidad de medir constantemente. Inferimos que el alumno está en un proceso de conceptualización de la figura, comenzando a desprenderse de lo empírico. Creemos que el hecho de que siempre coloque los puntos sobre –o cerca de– la circunferencia se debe a que no tiene clara la noción de zona. En su construcción solo colocó un punto en la parte interior, quizá por quedarse en la seguridad de ese límite de 2 unidades.

21



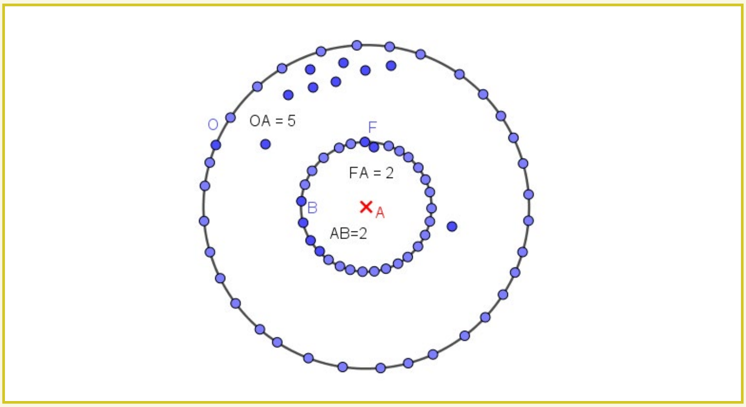
22



<< >>

Al finalizar su producción vimos que utilizó el mismo procedimiento para trazar la segunda circunferencia que delimitaría la zona donde las pelotitas valdrían 5 puntos, colocando otras sobre ella (imagen 23). A diferencia del paso anterior, aquí comenzó a ubicarlas también hacia el interior de la zona. Posiblemente el niño empezó a comprender que esos límites que dibujó delimitaban una zona más amplia y no solo la línea trazada.

23

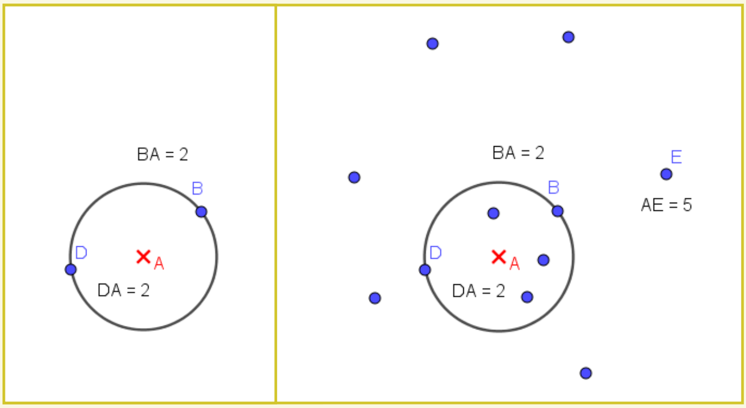


En la producción de otra niña, a diferencia del estudiante anterior, identificamos que manejaba un mayor nivel de conceptualización. Ella se movía por las zonas y luego las delimitaba para asegurarse el valor de cada uno de los puntos ubicados.

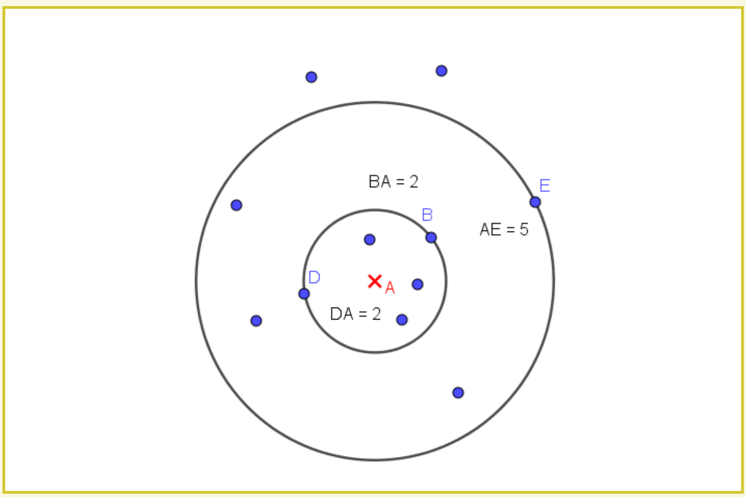
Para comenzar trazó un punto, midió su distancia hacia la cruz y luego lo movió de manera que quedara a 2 unidades de la misma. De igual forma procedió para el segundo punto. Al tener aseguradas las distancias, trazó una circunferencia (imagen 24) con centro en la X que pasara por los puntos B y D –aunque sabemos que la circunferencia se traza a partir del centro y uno solo de los puntos–. En este caso no buscó puntos por cercanía. Recurrió directamente a la herramienta de medida, no se quedó con la proximidad entre los puntos para ubicarlos. Es posible que realizara esto debido a que la consigna le pedía marcar dos pelotitas que valieran 10 puntos. Para validar esas distancias trazó la circunferencia.

A continuación marcó una serie de puntos, tanto dentro como fuera de la zona de 10 puntos (imagen 24). Consideramos que este accionar se debe a que la niña comprendía que fuera de la circunferencia que había marcado el valor cambiaba a 5, pero no sabía bien hasta dónde; es por esto que tuvo la necesidad de trazar otra circunferencia que le delimitara el valor de las pelotitas dibujadas (imagen 25). Para esto trazó un punto, midió la distancia hasta X y lo movió hasta llegar a 5 unidades. Luego realizó la circunferencia de centro A que pasa por E. Esto le permitió fundamentar cuáles valían 0 puntos, 5 o 10.

24



25



Llegando a una conceptualización mayor, nos encontramos con un niño que recurrió de modo directo a la circunferencia para marcar los puntos.

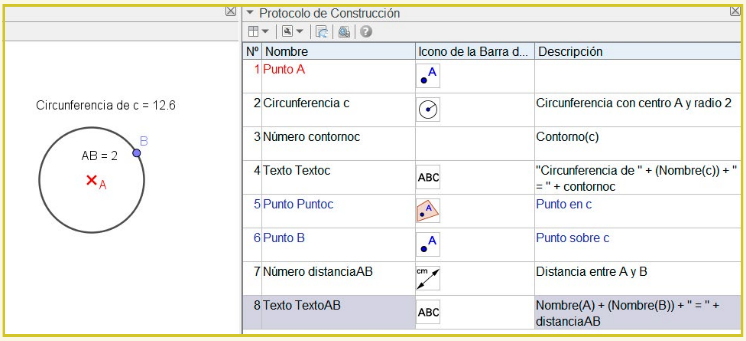
Comenzó directamente utilizando la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*, dándole un valor de 2 unidades al radio. Creemos que esto se debió a que se apoyó en la puesta en común de la primera clase en lápiz y papel, en la que se concluyó que los puntos del “círculo” (término usado por los chicos al referirse a la circunferencia) estaban siempre a una misma distancia de la cruz.

Pensamos que el niño aún no tiene dominio de la noción de radio –aunque haya utilizado la herramienta que lo contiene– ya que tuvo la necesidad de medir desde la cruz hasta el borde.

Pero al utilizar la herramienta *Distancia o longitud* y hacer clic sobre la circunferencia, en su construcción le apareció un número diferente al que él había ingresado, confundiéndolo. El alumno consultó a su maestro, quien le dijo que esa medida no era la distancia de la cruz al borde[3] y que debía marcar un punto para encontrar la medida que él quería corroborar. A consecuencia de esto ubicó el punto B y luego midió la longitud (imagen 26).

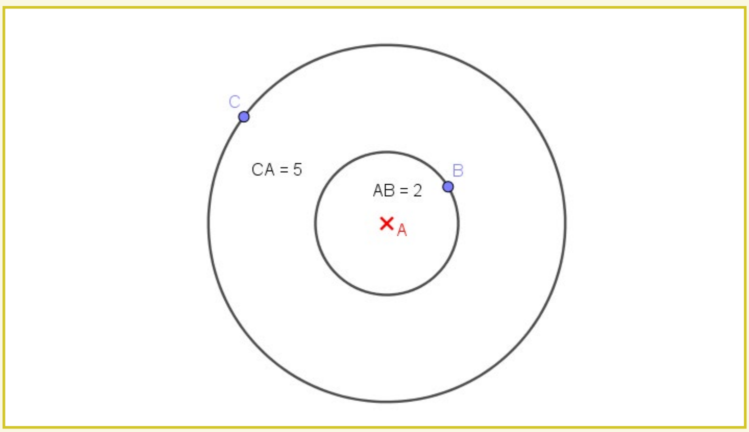
Del mismo modo, para marcar la zona de 5 puntos recurrió a la misma herramienta, volviendo a tener la necesidad de medir la distancia de la cruz al punto C que se encontraba sobre el borde de la última circunferencia (imagen 27). Consideramos que quizá en este caso la necesidad de volver a medir se debió a que había dos circunferencias concéntricas.

26



Nº	Nombre	Icono de la Barra d...	Descripción
1	Punto A		
2	Circunferencia c		Circunferencia con centro A y radio 2
3	Número contornoc		Contorno(c)
4	Texto Textoc	ABC	"Circunferencia de " + (Nombre(c)) + " = " + contornoc
5	Punto Puntoc		Punto en c
6	Punto B		Punto sobre c
7	Número distanciaAB		Distancia entre A y B
8	Texto TextoAB	ABC	Nombre(A) + (Nombre(B)) + " = " + distanciaAB

27



En el inicio de la puesta en común, algunos alumnos manifestaron que, primero, habían colocado puntos cercanos a la X, utilizando la percepción (cerca, muy cerca) y otras medidas no convencionales (dedos). Creemos que estos procedimientos fueron llevados a cabo dado que eran conocidos por ellos, ya que habían sido utilizados en la actividad de lápiz y papel durante el juego simulado. Al intervenir el docente diciendo que "cerquita" no alcanzaba para

3. Esa medida refiere a la longitud de la circunferencia.

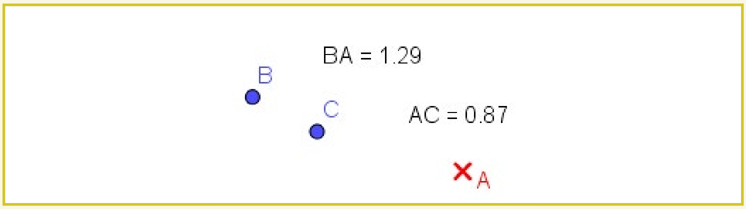
saber efectivamente el valor de la pelotita, y que los dedos de uno son distintos a los de los otros, se les preguntó qué herramienta de las exploradas podrían utilizar para saber si valía 10 puntos la pelotita. Una niña respondió: "Hay que usar la de la flechita", refiriéndose a la herramienta *Distancia o longitud*.

En el término "cerquita" –usado por algunos alumnos– se observa una fuerte presencia de lo visual como primera estrategia para validar sus producciones. Consideramos que la intervención del docente intentó correrlos de lo perceptivo y buscar en el GGB alguna herramienta que les permitiera iniciarse en un trabajo que vaya más allá de lo que el ojo observa. De lo contrario, estaríamos ante la imposibilidad de acceder a las propiedades del objeto geométrico y caeríamos en la ilusión de que por el hecho de mostrar en el dibujo un "punto cerquita" los alumnos reconocen propiedades que se supone que están puestas en juego allí.

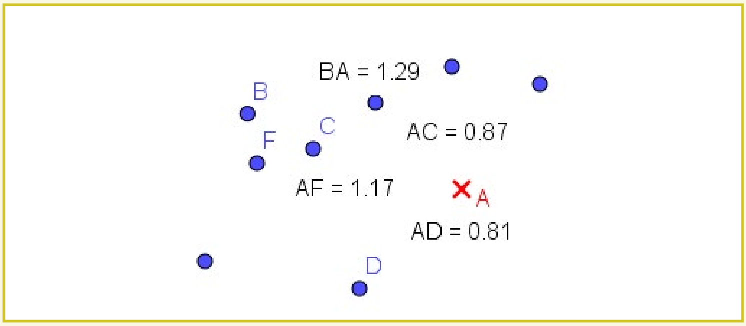
Al pedirles que coloquen otra pelotita que valga 10 puntos, los chicos agregaron un punto "cerquita", entre el punto anterior y la X (imagen 28). Suponemos que la ubicación de ese segundo punto (C) puede deberse a que saben que la distancia es menor a la del primer punto al acercarse a la X de forma casi lineal, asegurándose que mantendrá el mismo puntaje.

El docente volvió a intervenir diciendo: "Porque esté cerquita no va a valer, sí o sí, 10 puntos". Los alumnos volvieron a utilizar la herramienta *Distancia o longitud* y luego comenzaron a hacer muchos puntos cercanos entre ellos (imagen 29).

28



29



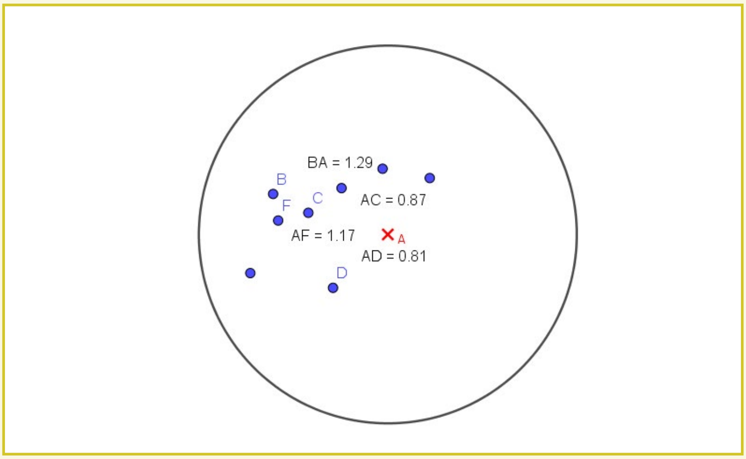
El maestro preguntó: "¿Qué herramienta podemos utilizar para saber cuánto valen todos esos puntos sin medir una y otra vez?". Un alumno respondió:

"Hay que hacer un círculo que valga 2 cm...,[4] ponés *círculo radio*... te ponés en la X y ahí hay que poner cuántos centímetros querés".

En este punto se comenzó a apreciar el dictado de instructivos de construcción por parte de los chicos al docente, lo que permitió observar la implementación de nuevos términos en el vocabulario tales como "radio".

Una vez que el maestro realizó la construcción de la circunferencia de 2 unidades de radio (imagen 30), le preguntó al alumno: "¿Entonces, ahora qué sé?". Y él le contestó: "Que eso vale 2 cm". Y otro alumno dijo: "Y ahora medilo... andá a la flechita..." (herramienta *Distancia o longitud*). Inferimos, a partir de la necesidad de medir, que si bien los chicos utilizaron un nuevo vocabulario (radio) esto no significa que hayan logrado una conceptualización de este elemento de la circunferencia.

30



Para realizar la medición un alumno propuso: "Poné un punto arriba de la línea del círculo". Con esta expresión creemos que intentó definir la idea de circunferencia como un límite hasta donde las pelotitas valdrían 10 puntos.

Nos resultó interesante que los chicos hayan utilizado el término "radio" que aparecía en una de las herramientas, pero no el de "circunferencia" –a pesar de que la palabra se puede ver escrita en dos íconos–, a la que nombraron siempre como "círculo". Pensamos que posiblemente esto se deba a una naturalización del uso cotidiano del término "círculo", así como a la modelización del dibujo durante los primeros años de escolaridad.

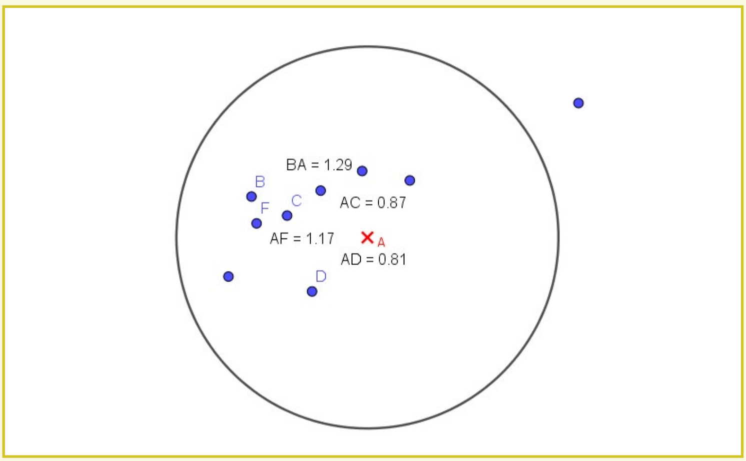
4. En el aula no se discutió el hecho de que en realidad GeoGebra no utiliza como unidad de medida los centímetros. Creemos que esto hubiera desviado la cuestión que queríamos tratar en ese momento. A diferencia de este equipo de docentes, los autores del capítulo 4, "El movimiento de representaciones gráficas como variable didáctica", sí decidieron tomar este asunto para ser discutido en la clase.

Luego de haber "medido el círculo", el docente les preguntó: "¿Qué sabemos a partir de esto que dibujamos?". Varios alumnos contestaron: "Que todos los puntos que pongas ahí adentro van a valer 10 puntos... y también al costadito", haciendo referencia a la circunferencia. El maestro comenzó a marcar varios puntos en el círculo preguntando cuánto valía cada uno. Los chicos, sin dudar, respondieron que valían 10 puntos. Al señalar un punto sobre la circunferencia sostenían que tenía el mismo valor, argumentando "porque ahí es 2 cm...". Se llegó a la conclusión de que la línea que dibujaron siempre estaba a 2 unidades de la X y todos los puntos que se encontraban adentro y sobre el borde del círculo tenían el mismo valor.

A partir de estos aportes creemos que los alumnos alcanzaron un análisis un poco más profundo sobre las nociones de círculo y circunferencia. El haber retomado las mismas ideas que surgieron durante la puesta en común, realizada en la primera parte de nuestra indagación, les permitió tener otra instancia para poder identificar y apropiarse de las relaciones vistas. Seguramente también les dio la posibilidad a otros alumnos de volver a reflexionar sobre aspectos que no habían sido considerados por ellos en aquella oportunidad.

El maestro marcó entonces un punto fuera de la circunferencia dibujada (imagen 31) y los alumnos dijeron que valía 5 puntos.

31

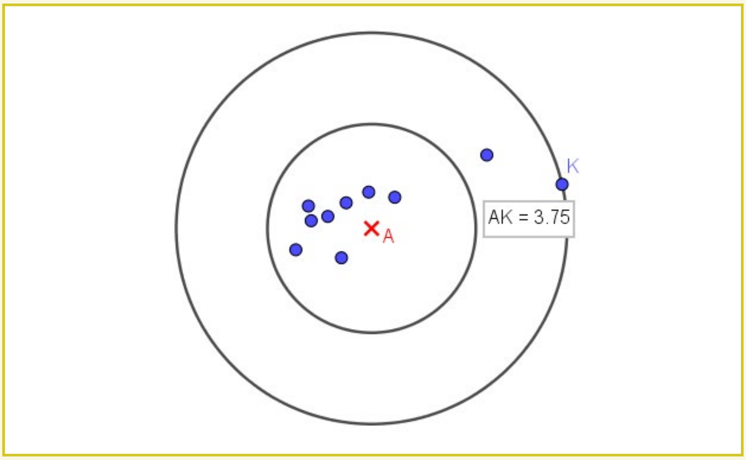


Al preguntarles por qué, una niña contestó: "Vale 5 porque está fuera de la línea". El docente preguntó: "Si está fuera de la línea, ¿va a estar a más de cuánto?". "A más de 2", contestó una nena. El docente volvió a la pizarra con los puntajes, recordándoles que "el que vale 5 puntos debe estar a más de 2 y hasta 5 cm, inclusive, y el punto que marqué no sabemos si está a más de 5 cm... ¿qué puedo hacer entonces?". Frente a esto, una niña volvió sobre la idea de que "5 cm eran más o menos como esto... (*haciendo gestos con las manos*)" y que como estaba cerquita de la línea, tenía ese valor. Se reiteró que ese tipo de fundamento de medición ya no era suficiente para validar. Claramente se pudo observar cómo lo empírico seguía persistiendo. Es importante destacar la intervención docente y cómo la misma se llevó a cabo. El maestro apuntó a que se lograra un salto hacia un camino conceptual.

Otra niña le indicó al docente: "Hacé otro círculo, que mida desde la X hasta la *liñita* del círculo 5 cm". A continuación, el maestro le preguntó qué herramienta debía usar para hacer lo que había dicho, y ella expresó que use *Circunferencia (centro, punto)*. En ese momento la mayoría del grupo le dijo que con esa herramienta no se hacía, que era con *Circunferencia* (*centro, radio)*. El docente tomó lo que la niña estaba diciendo con la intención de llevarlos a una reflexión de otro procedimiento distinto. Ella le indicó a su maestro que esto era lo que había hecho. El profesor le pidió entonces que le dictara cómo seguir la construcción. La niña le dijo que vaya a la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y que se pusiera sobre la X. En ese momento el maestro comenzó a trazarla y ampliarla desde la cruz, pidiéndole a la alumna que le dijera cuándo debía detenerse. Ella le respondió: "Tenés que soltarla cuando pienses que son 5 cm, ahora con esa, que es para medir (*haciendo mención a la herramienta* Distancia o longitud), tenés que medir desde la X hasta ese puntito que está sobre el círculo".

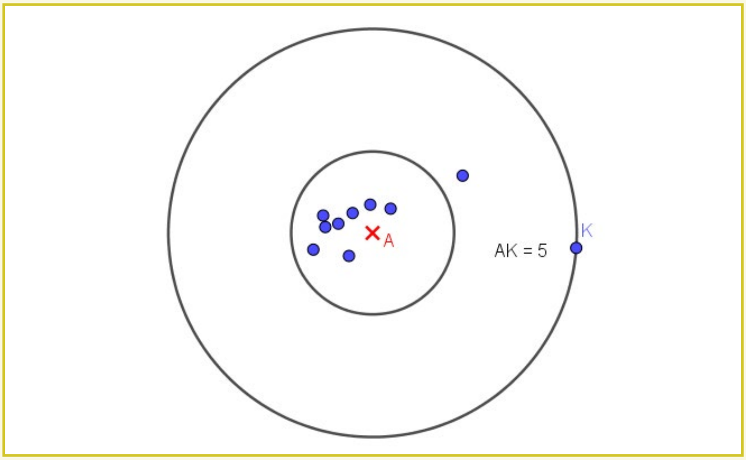
Al realizarlo (imagen 32) se observó en la pantalla que esa distancia daba 3.75. Cuando el maestro le dijo que no eran 5 cm, la niña continuó diciéndole que debía ir a la herramienta "de la flechita" (*Elige y mueve*), que se pusiera arriba de la línea del círculo (circunferencia) y que la moviera hasta que indicara ahí 5 (en el lugar donde estaba escrito AK = 3.75).

32



El maestro intentó ir corriendo la circunferencia para lograr que dé exacto 5 unidades, pero se pasó de la distancia; intentó a pulso varias veces para encontrarla y lo logró expresando: "¡Qué difícil!, ¡pero ahí está!" (imagen 33).

33



Cuando la niña le fue indicando a su maestro cómo realizar la construcción, desarrolló un tipo de trabajo que remite al quehacer matemático geométrico, ya que fue importante que pusiera en palabras lo realizado en el programa; esto le exigió utilizar un tipo de lenguaje más específico, a pesar de no tenerlo adquirido todavía, y explicitar algunas de las relaciones que se pusieron en juego.

Luego el maestro pidió a otro alumno que contara lo que había hecho su compañera y este le respondió: "Hay que hacer el radio de lo que valía 10 puntos y 5 puntos ya que el resto es 0". Haber retomado el trabajo realizado por otra compañera permitió alcanzar una síntesis del juego propuesto.

Seguidamente el maestro le preguntó al grupo qué distancia había desde la X hasta cada uno de los diferentes puntos que se encontraban sobre las dos circunferencias, para poder asegurarse de que todos hubieran comprendido que siempre desde el centro hasta la circunferencia corresponde la misma distancia. Los niños manifestaron estar de acuerdo con lo antes planteado.

El profesor continuó diciendo que, dentro de cada zona circular, los puntos que ahí se hallaban valdrían un determinado puntaje y los que estaban fuera de ellas valdrían 0 puntos.

Para finalizar, le pidió a otro alumno que dijera a qué le hizo recordar esto que estuvieron realizando, y él contestó que a algo que había jugado en su casa llamado juego con dardos. El docente intentó relacionarlo, para hacer un paralelismo, con lo que surgió en la puesta en común de la primera clase, con el fin de ver que se trabajó con zonas y sus límites.

Otro alumno expresó otro procedimiento para marcar la zona en donde las pelotitas valdrían 5 puntos: "Poné *círculo radio* [*Circunferencia (centro, radio)*], lo mismo que se hizo con 2 pero ahora con 5, y ahora marcá la X y poné ahí 5 (*en la ventana que se abrió para escribir la distancia del radio*), poné ok, y ahí tenés el círculo".

El docente llevó al grupo a una reflexión que mostró que con la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* no era necesario correr la circunferencia, ya que esa herramienta permite hacerla justa a 5 cm y no hay que estar estirándola. Este tipo de análisis tuvo como finalidad mostrar que hay procedimientos más cortos, pero que el que se siga no es el único posible, y que el mismo dependerá de quién lo realice.

CONCLUSIONES PARA SEGUIR PENSANDO

Hay varios aspectos en los que nos detuvimos a pensar y reflexionar a partir de nuestra propuesta de trabajo de indagación, que apuntaba a desarrollar una dinámica diferente debido a la implementación de un soporte informático. Es aquí donde nos preguntamos cómo funcionó el GGB como variable didáctica[5] y si sus herramientas fueron accesibles para los niños (cabe aclarar que, antes de comenzar, tuvimos que pensar qué sería necesario que los chicos conocieran del programa para trabajar con los contenidos propuestos).

Esto nos llevó a reflexionar sobre por qué apelaron a determinadas herramientas y no a otras y qué tipo de conceptualizaciones lograron alcanzar; al mismo tiempo, vimos que hay un modo de acceder distinto cuando se pasa a una dimensión dinámica. Además, algunos íconos les permitieron a los niños identificar procedimientos y comenzar a utilizar un nuevo vocabulario; sin embargo, como se mencionó anteriormente, esto no siempre significa la conceptualización de la figura involucrada en la herramienta.

El programa permitió analizar zonas de puntos, sus limitaciones, y el dinamismo que estuvo presente al desplazar y mover las construcciones realizadas. Pensamos que lo mencionado podría constituir una base para la idea de infinitud que posiblemente los alumnos irán construyendo en el futuro. El GGB les permitió realizar dibujos de una figura que ellos podían mover, arrastrar, transformar o deformar, según el tipo de manipulación de los puntos libres que realizaban. Resulta interesante entonces mencionar que esta idea de dinamismo no es posible llevarla a cabo en un trabajo realizado con lápiz y papel.

Compartimos con Murúa e Itzcovich (2018) la idea de que "el trabajo geométrico en la escuela se ocupa […] del estudio de las figuras. Este estudio se desarrolla a partir de la identificación y elaboración de relaciones que caracterizan a los objetos geométricos, intentando superar los aspectos perceptivos para propiciar un trabajo anticipatorio apoyados con el uso de las propiedades". Esta idea nos permitió identificar, durante la exploración de las herramientas del GGB y el procedimiento de mover un punto de la circunferencia hasta llevarlo a la distancia deseada, cómo los alumnos que estaban más "alejados" del contenido recorrieron unos "escalones" más para lograr una mayor aproximación al conocimiento que se busca enseñar.

5. Sugerimos la lectura del capítulo 1, "Pensar GeoGebra como variable didáctica".

Con relación al dibujo y la figura, consideramos –en sintonía con Bernard Parzysz (1988)– que un dibujo es una marca, un trazo, mientras que la figura es el objeto teórico abstracto que resulta representado por dicho dibujo (Parzysz, 1988). Por otra parte, Laborde (1997) aporta la idea de “familia de dibujos”, ya que al poder mover y arrastrar un dibujo, un programa como GeoGebra nos permite transformarlo y a partir de allí establecer otras relaciones: el dibujo inicial se convierte en otros con las mismas propiedades o con algunas de ellas.

Consideramos que, al contar con distintas herramientas, el programa les facilitó a los niños el trabajo geométrico. Si bien esta facilidad los induce a hacer, como hemos expresado esto no significa que, aun habiendo utilizado cierto vocabulario, necesariamente hayan alcanzado una conceptualización sobre el círculo y la circunferencia.

Además, es destacable que se originó un trabajo argumentativo en el momento de la puesta en común. ¿Qué conocimientos y recursos son necesarios para entrar en este juego deductivo? Hay cuestiones adquiridas en años anteriores de la escolaridad y en las cuales los niños se apoyarán para argumentar sus procedimientos. En nuestro trabajo debemos hacer mención de la importancia que tuvo el juego llevado a cabo en lápiz y papel, y todo lo que surgió en la puesta en común, ya que lo trabajado en esa instancia fue el punto de partida para el desarrollo de las producciones realizadas con el GGB.

Las reflexiones a las que se arribaron a partir de las validaciones expresadas por los niños les permitirá a ellos elaborar su propio abanico de recursos, logrando así una mayor autonomía frente a la producción de fundamentos. Estaríamos contribuyendo, de este modo, a que puedan identificar relaciones que les servirán para argumentar cuando se lo pidan en futuras actividades; es un aprender a ver y, por lo tanto, a conocer. Todo esto contemplado como un recurso a elaborar.

Como punto final solo nos quedaría retomar nuestros interrogantes iniciales para poder ver si nos acercamos a dar respuestas a ellos. Si recordamos lo que nos habíamos planteado en cuanto a las estrategias que podrían poner en práctica los niños con el GGB con relación a la actividad de juego, a nuestras intervenciones y a las herramientas del programa, podemos expresar diferentes cuestiones.

Consideramos que la primera clase que pensamos, con el juego realizado en lápiz y papel, fue importante como inicio para abordar los contenidos que nos habíamos propuesto trabajar, ya que allí se desarrollaron estrategias que luego fueron tomadas por los niños para el trabajo llevado adelante con el programa. La actividad lúdica desplegada en un espacio dinámico dado por el GGB facilitó el armado de conjeturas que quizás no podrían haber sido trabajadas en la hoja. El movimiento permitió vislumbrar nuevos caminos de análisis y variedad de procedimientos para poder resolver el problema planteado.

Los niños trataron de encontrar posibles soluciones a partir de nuestras preguntas y repreguntas, que siempre apuntaron a identificar relaciones referidas al objeto geométrico en cuestión. La estrategia de medición no convencional estuvo presente constantemente y fue ahí donde las intervenciones resultaron importantes para que los alumnos pudieran encontrar otras que se apoyaran en un análisis de la figura.

Gracias a las intervenciones del maestro, en el momento de la puesta en común se desplegó una instancia de validación y argumentación que permitió poner en palabras de los chicos procedimientos, resoluciones y explicaciones a través del dictado al docente.

Por otro lado, pudimos observar que el soporte informático es un medio familiar para los niños y por lo tanto hay una facilidad para su manejo, lo que habilitó posiblemente la exploración de las herramientas que tenían a su disposición para averiguar y conocer su utilidad, aun sin saber los conceptos geométricos asociados a cada herramienta. Reconocieron rápidamente el ícono de medición al ver la palabra centímetro (cm). Utilizaron la herramienta de movimiento para trasladar puntos que estuvieran a una distancia determinada. Emplearon estrategias de resolución con herramientas como el *Compás*, que nunca había sido usado en lápiz y papel. Los nombres que acompañaban a los íconos de las herramientas funcionaron en algunos casos como facilitadores para ampliar vocabulario, como fue el caso de la palabra "radio".

Si hacemos un recorrido a través de nuestros años de experiencia como docentes de grado y volvemos sobre nuestras prácticas, descubrimos que nunca antes nos había ocurrido que una secuencia didáctica pensada para dos días les permitiera a nuestros alumnos acercarse de manera tan pronta a las nociones de círculo y circunferencia. A pesar de haber llevado adelante actividades en lápiz y papel, y teniendo en cuenta el enfoque de nuestro diseño curricular, no habíamos alcanzado los logros observados del modo en que ocurrió en esta instancia. Nos preguntamos si la causa de esto fue solo la incorporación del soporte informático aplicado, o si también tuvo injerencia la modalidad de formar grupos de dos o tres alumnos para resolver las actividades propuestas, así como la presencia de varios docentes que intervenían y acompañaban, además de la secuencia ofrecida. Es decir, el conjunto de condiciones de funcionamiento del aula incluye ahora nuevas variables a seguir explorando.

El análisis que hicimos sobre el desarrollo del accionar de los alumnos, nuestras intervenciones, el uso de nuevas tecnologías y la secuencia planteada nos generó un nuevo cuestionamiento que nos llevó a pensar cuál podría ser el motivo de esta conexión interesante con el conocimiento que ellos tuvieron.

Nuestro trabajo constituyó solo un pequeño aporte. Pensar la respuesta será una construcción en conjunto, entre todos aquellos que quieran involucrarse de un modo diferente para adentrarse en el mundo de las relaciones geométricas. Pero para esa construcción colectiva es fundamental ver con claridad la importancia que tiene compartir nuestra tarea con otros, ayudarnos entre nosotros y no quedarnos solos frente a nuevas propuestas que a veces nos plantean incertidumbres sobre cómo resolverlas. Por eso decimos que vale la pena intentarlo.

Agradecemos a la Escuela Nº 9, Distrito Escolar 2, Genaro Berón de Astrada, por habernos dado la posibilidad de llevar adelante nuestra indagación, a los alumnos de 4º grado, que nos permitieron tener un espacio de análisis y reflexión a partir de sus trabajos, y al docente a cargo, quien forma parte del equipo de autores de este capítulo. Para nosotros, la experiencia fue realmente enriquecedora en múltiples aspectos.

CAPÍTULO 3

La propiedad triangular en 5º grado: un posible recorrido didáctico y la potencia de GeoGebra como soporte[1]

María Eugenia Arce y Laura Marafioti

En el contexto del Seminario de Geometría de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), realizamos una experiencia de trabajo en el aula con nuestros alumnos a partir de algunos interrogantes en relación con la enseñanza de esta rama de la matemática y el uso de un recurso tecnológico.

Durante la cursada nos vimos enfrentadas a una forma diferente, novedosa desde nuestra perspectiva, de abordar y trabajar con la geometría. El programa informático utilizado fue el puntapié para esta experiencia. GeoGebra (GGB) incluye la posibilidad del movimiento de los dibujos al estudiar las figuras que se representan. Si bien en un comienzo nos generó resistencia, luego nos abrió un nuevo panorama y nos planteó interrogantes a la hora de pensar nuestra tarea docente. Un asunto que vertebró nuestro trabajo en esta cursada estuvo vinculado a la potencia que tendría este programa en el momento de llevarlo al aula con los niños. Entonces nos propusimos indagar esta cuestión, a partir de una propuesta didáctica que incluyera al GGB.

Para pensar una experiencia que nos permitiera explorar el uso del programa en el aula, buscamos alguna problemática que nos resultara interesante desde nuestro recorrido como docentes. Aprovechando que una de nosotras se desempeñaba en un 5º grado, decidimos trabajar con ese grupo en torno a la propiedad triangular. Mientras reflexionábamos sobre nuestras prácticas, recordamos que al trabajar sobre este tema en lápiz y papel a los docentes se nos suele presentar la situación en la que los niños efectivamente logran construir triángulos que, teniendo en cuenta esta propiedad, no deberían ser posibles de construir. Tomemos como ejemplo un triángulo cuyos lados miden 9 cm, 5 cm y 4 cm. Es común que, utilizando regla y compás, los niños fuercen

1. Si bien en el *Diseño curricular* de CABA este contenido es enunciado como "propiedad triangular", el verdadero nombre de la propiedad es "desigualdad triangular" y refiere a que para que exista un triángulo debe ocurrir que la suma de las medidas de dos de sus lados sea mayor que la del tercero. Hay otras versiones, pero en este texto solo nos ocuparemos de esta.

de alguna manera alguna de las medidas para lograr cumplir el objetivo de trazado de la figura. Muchas veces esto significa un problema para nosotros a la hora de explicarles el porqué de estos "errores" en sus mediciones.

Nos preguntamos entonces en qué podría contribuir la incorporación del GGB al diseño de una secuencia didáctica que aborde esta situación. ¿Serviría, por ejemplo, para lograr centrar el trabajo sobre las propiedades geométricas y correr el foco de atención de las cuestiones vinculadas al trazado del dibujo en lápiz y papel? Un estudio realizado por Laborde (1997) nos invitó a pensar de qué forma el trabajo con la computadora puede aportar al estudio de las relaciones geométricas que subyacen al dibujo y que suelen desconocerse en la enseñanza de la geometría como objeto de aprendizaje:

> Los conocimientos geométricos son susceptibles de ser una herramienta eficaz, pero se sabe también que el trazado empírico controlado simplemente por la percepción puede suministrar un trazado *visualmente* satisfactorio. La reproducción de Cabri-dibujos descalifica el trazado empírico controlado por la visualización. Exige además [...] que se reconozcan propiedades geométricas (Laborde, 1997: 10; el resaltado es nuestro).[2]

En este sentido, nos resultó interesante explorar el uso de la herramienta informática para poner en cuestión el trabajo de la geometría escolar que solo suele hacerse con lápiz y papel. Consideremos también que el programa es una herramienta disponible, instalada en cada computadora entregada a los niños.

La utilización del GGB tiene sus propias condiciones para la construcción, diferentes a las que se ponen en juego en el trabajo con papel. Un ejemplo claro de esto es el movimiento y la posibilidad de que las figuras se desarmen si no se explicaron ciertas propiedades durante su trazado. Entonces, estas nuevas condiciones de trabajo, ¿cómo aportarían a la construcción de conocimiento por parte de los niños? Y con relación a nuestra tarea docente, ¿cómo cambiaría el estudio de la propiedad triangular si sumáramos el movimiento al análisis?

Con estos interrogantes en mente, diseñamos una secuencia didáctica[3] que nos permitió profundizar las reflexiones sobre nuestras propias prácticas docentes en el área de geometría.

La experiencia la desarrollamos en un 5º grado de la Escuela Nº 5, Distrito Escolar 7, Juan B. Peña, de gestión estatal de la Ciudad de Buenos Aires. El grupo está formado por 21 estudiantes que no habían trabajado previamente con el programa. A ellos, nuestro agradecimiento por permitirnos seguir aprendiendo.

2. Si bien Laborde escribe sobre Cabri-geómetra (otro programa), esta idea nos sirve para pensar igualmente el trabajo con GGB.

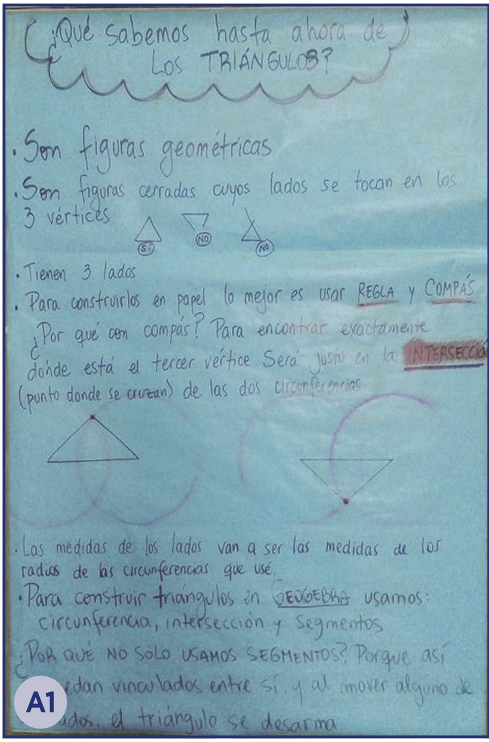
3. La secuencia didáctica previa a la puesta en práctica de la indagación se puede consultar en: <https://editorial.unipe.edu.ar/images/phocadownload/colecciones/herramientas/Secuenciadidactica.pdf>.

Si bien la secuencia ocupó varias clases, aquí analizamos dos de ellas, en las que la mitad del grupo trabajó con el programa y la otra mitad con lápiz, papel e instrumentos geométricos como compás y regla graduada (luego, este subgrupo trabajó con GeoGebra y el otro subgrupo en papel). Es importante explicar, antes de pasar al análisis de las dos clases, que enmarcamos el trabajo dentro de una secuencia didáctica ya que era necesario –para realizar un análisis más rico– que el grupo conociera ciertas especificaciones y características de los triángulos: su definición como figura cerrada de tres lados y algunas estrategias de construcción, conociendo la medida de sus lados, tanto en papel como en GGB.

LAS CLASES

Sobre la clase 1

Al comenzar la primera clase, la docente leyó en voz alta y repasó junto al grupo las nociones estudiadas en torno a los triángulos durante las clases previas, apoyándose en el afiche[4] del aula que había sido elaborado (afiche 1):



¿QUÉ SABEMOS HASTA AHORA DE LOS TRIÁNGULOS?

- Son figuras geométricas.
- Son figuras cerradas cuyos lados se tocan en los tres vértices.
- Tienen tres lados.
- Para construirlos en papel lo mejor es usar regla y compás. ¿Por qué compás? Para encontrar exactamente dónde está el tercer vértice. Será justo en la intersección (punto donde se cruzan) de las dos circunferencias.
- Las medidas de los lados van a ser las medidas de los radios de las circunferencias que usé.
- Para construir triángulos en GeoGebra usamos circunferencia, intersección y segmentos. ¿Por qué no solo usamos segmentos? Porque así no quedan vinculados entre sí y al mover alguno de sus lados, el triángulo se desarma.

4. Transcribimos el contenido del afiche con el propósito de facilitar su lectura.

En grupos de 3 integrantes, la mitad de la clase trabajó con GGB y la otra en papel. Por lo tanto, pensamos dos consignas diferenciadas para cada entorno. La propuesta de la clase era construir triángulos a partir de las medidas de dos lados, para así poder analizar las distintas medidas que podía admitir el tercero.

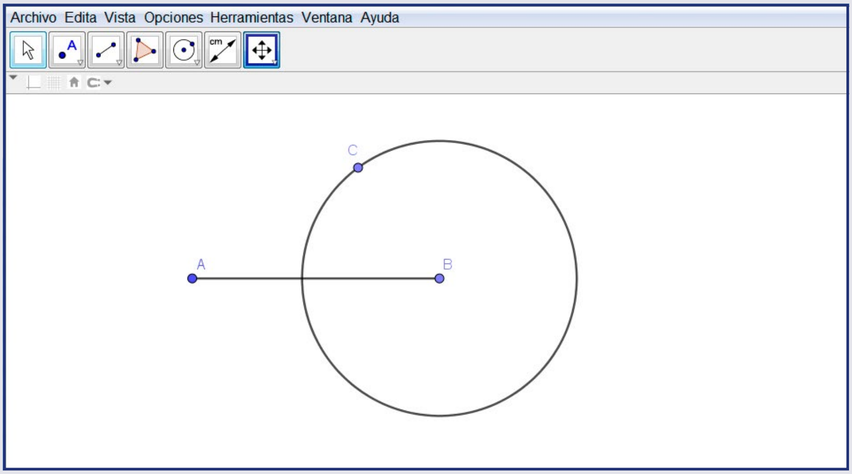
A continuación presentamos la consigna que se entregó a quienes trabajarían con GGB y el archivo sobre el que debían construir:

CONSTRUIMOS TRIÁNGULOS 1

Los puntos A y B están a 9 cm de distancia.[5] El punto C está sobre la circunferencia de radio 5 cm con centro en B y se puede mover (siempre sobre la circunferencia). Con estos datos se pueden construir distintos triángulos con los vértices A, B y C.

Construí 3 posibles triángulos ABC y anotá las medidas del lado AC de cada uno de tus triángulos en esta tabla:

	Lado AB	Lado BC	Lado AC
Triángulo 1	9 cm	5 cm	
Triángulo 2	9 cm	5 cm	
Triángulo 3	9 cm	5 cm	



Captura del archivo de GGB. Acceder al archivo <https://ggbm.at/eanthzpv>.

5. Al igual que en el capítulo anterior, en el aula no se discutió el hecho de que en realidad GeoGebra no utiliza como unidad de medida los centímetros.

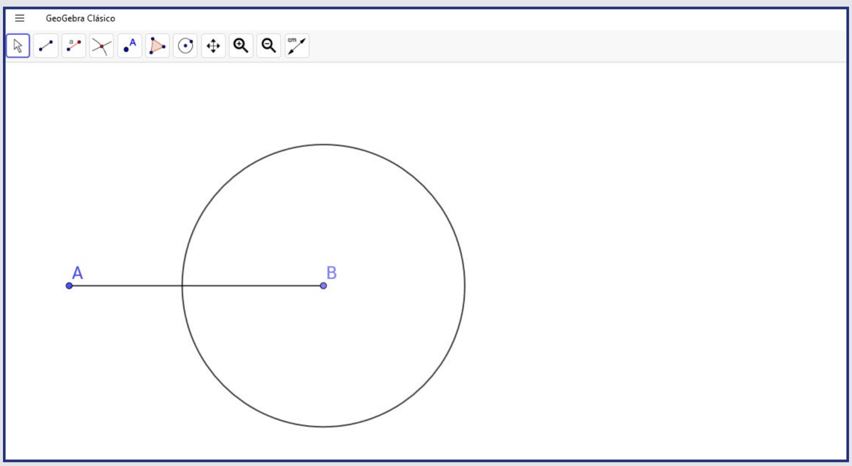
Del mismo modo, presentamos la consigna que se entregó a quienes trabajarían con lápiz y papel y la figura impresa sobre la que debían construir:

CONSTRUIMOS TRIÁNGULOS 2

Los puntos A y B están a 9 cm de distancia. La circunferencia con centro B tiene un radio de 5 cm. El punto C lo pueden dibujar donde quieran sobre la circunferencia. Con estos datos se pueden construir distintos triángulos con los vértices A, B y C.

Construí 3 posibles triángulos ABC y anotá las medidas del lado AC de cada uno de tus triángulos en esta tabla:

	Lado AB	Lado BC	Lado AC
Triángulo 1	9 cm	5 cm	
Triángulo 2	9 cm	5 cm	
Triángulo 3	9 cm	5 cm	



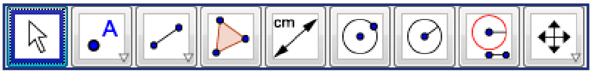
En ambas propuestas, uno de los lados estaba determinado por un segmento AB de medida fija, mientras que la medida de BC, también fija, surgía del trazado del radio de la circunferencia con centro en B. El punto C solo fue marcado en GGB, no así en papel.

En la consigna con GGB, la presencia del punto C y su cualidad de ser movible sobre la circunferencia se apoyó en una apuesta a que los niños pudieran apelar al movimiento que ofrece el programa para pensar en la construcción de triángulos, sus variantes y la posibilidad o no de construirlos. Es decir, la idea de dibujar el punto C tenía la intención de que los niños pudieran “jugar” con su movimiento, para comenzar a advertir que con él se podrían abarcar muchos posibles triángulos a construir.

En cambio, para la consigna en papel, los niños contaron con la misma figura impresa sin el punto C dibujado. El hecho de dibujar el punto C en el papel podía despertar más confusiones ya que, justamente, carecerían de la posibilidad de desplazarlo. Tenía más sentido que los niños dibujaran el punto donde creyeran conveniente en cada caso y pudieran reflexionar al finalizar la serie de construcciones.

Por otro lado, es importante aclarar que para el trabajo en GGB se dejaron disponibles solamente algunas de las herramientas que ofrece el programa (imagen 1):

1



El sentido de acotar el número de herramientas apuntó a que el trabajo resultara menos abrumador. Así como en papel los niños no cuentan con todos los instrumentos disponibles para todos los problemas, creemos que dejando solo algunas herramientas estamos enmarcando el trabajo de acuerdo a nuestros objetivos didácticos.

En esta primera clase, entonces, se buscaba arribar a la idea de que la medida de AC podía variar manteniendo fija la medida de los otros dos lados. Es decir que, con las medidas de dos lados dados, se pueden construir varios triángulos diferentes.

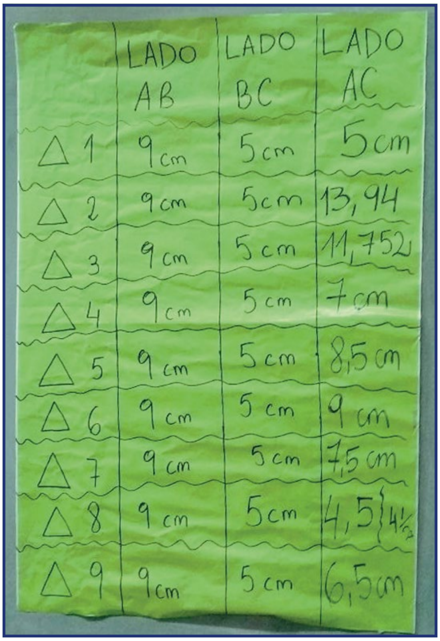
Se destinaron treinta minutos de la clase a que los grupos construyeran triángulos de acuerdo a las condiciones solicitadas. Las docentes iban pasando por los grupos, respondiendo dudas que pudieran surgir y también realizando preguntas para que los chicos pusieran en palabras los procedimientos que llevaban adelante durante la construcción.

Posteriormente se hizo una puesta en común en la cual se socializaron las diversas medidas que podía tomar el lado AC de acuerdo a las condiciones fijadas por la consigna. Se fue completando un afiche que replicaba el cuadro que tenía cada uno, con la intención de que quedaran evidentes varias medidas que había tomado AC para los distintos grupos (afiche 2).

A continuación, la docente, utilizando su computadora y un proyector, presentó al grupo tres triángulos superpuestos “realizados por un 5º de otra escuela” que compartían el lado AB, con el objetivo de que el grupo total viera el movimiento del punto C y cómo este iba afectando la longitud del lado AC, variando su medida. A su vez, se mostró que al mover el punto C se podía realizar una suerte de “barrido” por todos los triángulos posibles de ser construidos (imagen 2).

El propósito era mostrarles tres triángulos construidos en el mismo archivo, y no por separado como hicieron ellos en sus computadoras, con el fin de que pudieran observar que sus tres triángulos implicaban solo algunas posibles posiciones del

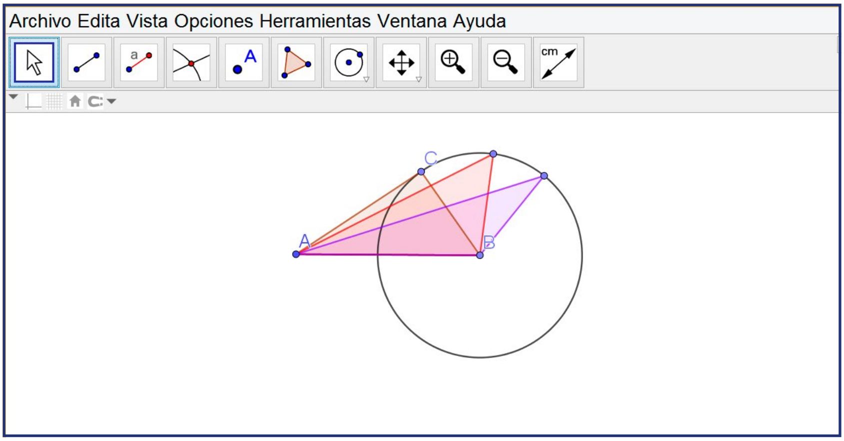
A2



	LADO AB	LADO BC	LADO AC
△ 1	9 cm	5 cm	5 cm
△ 2	9 cm	5 cm	13,94
△ 3	9 cm	5 cm	11,752
△ 4	9 cm	5 cm	7 cm
△ 5	9 cm	5 cm	8,5 cm
△ 6	9 cm	5 cm	9 cm
△ 7	9 cm	5 cm	7,5 cm
△ 8	9 cm	5 cm	4,5 {4½
△ 9	9 cm	5 cm	6,5 cm

Afiche con las medidas de los lados de los triángulos que tienen un lado AB de 9 cm y un lado BC de 5 cm, según cada grupo.

2



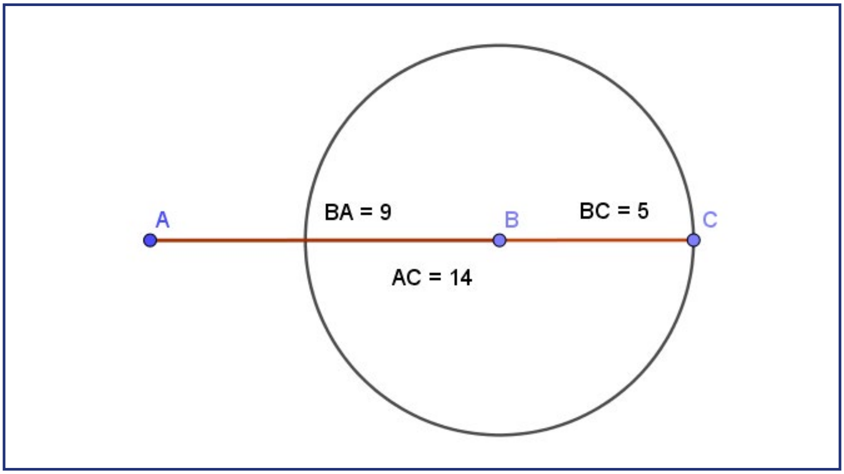
Captura del archivo de GGB. Acceder al archivo <https://ggbm.at/zsqae3dd>.

punto C. Con el movimiento se buscó evidenciar que entre esas posiciones de C había otras posibles y que, de este modo, la medida de AC cambiaría. Debemos aclarar también que resultó de gran ayuda tener activada en esta instancia la herramienta de medición del programa para observar qué pasaba con las medidas de los lados. Este trabajo colectivo dio lugar a interesantes conceptualizaciones por parte de los niños que retomaremos más adelante.

Para este momento, habíamos decidido no detenernos en los procedimientos de construcción hechos por los alumnos ya que esta cuestión había sido abordada en las clases previas y no constituía un objetivo a trabajar en esta instancia. Por esto mismo, las cuestiones vinculadas específicamente a la construcción fueron abordadas por las docentes en sus pasos por los pequeños grupos de trabajo. Se prefirió entonces trabajar con construcciones aportadas por la docente, ya que de esta forma todos los niños podían enfocarse en el análisis de las propiedades y dejar de lado las construcciones. Por otro lado, durante el trabajo en pequeños grupos, quedó en evidencia que todos podían construir más de un triángulo con las características solicitadas y se fueron realizando intercambios que buscaban que los alumnos comenzaran a observar qué sucedía con las medidas de los lados.

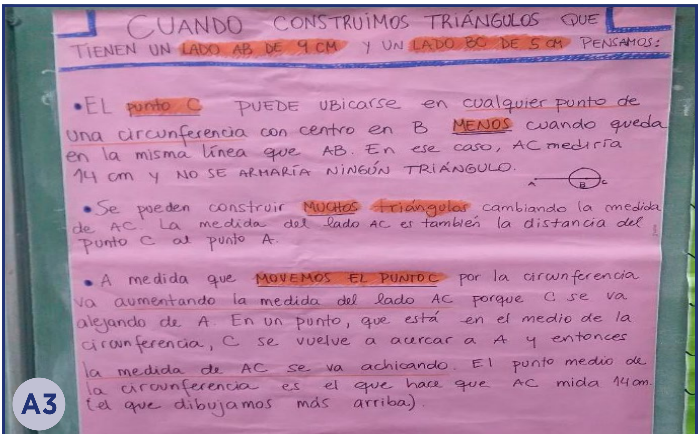
Destacamos de esta primera tarea (ya que no esperábamos que los niños pudieran notarlo) que, gracias al trabajo con el GGB y la puesta en común, notaron que la medida del lado AC tenía un límite y luego de pasar el mismo comenzaba a “achicarse”. De hecho, una alumna afirmó que los triángulos que se formaban “por encima” del segmento AB eran “*el* espejo” de los triángulos que se formaban “por debajo” del mismo segmento. Es decir, los niños comenzaban a pensar en que la medida del lado AC, bajo estas condiciones, no podía tomar cualquier valor. Varios alumnos, que exploraban en sus computadoras mientras se desarrollaba el debate, terminaron concluyendo que el lado AC no podía medir exactamente 14 cm porque en esa medida los puntos A, B y C quedaban en una misma línea y de ese modo no podía formarse un triángulo (imagen 3).

3



Además, así se hizo evidente para los alumnos que el punto C podía estar en todos los puntos de la circunferencia con centro B. Con relación a este asunto, un alumno que había estado trabajando con papel, al ver a su docente moviendo el punto C en GGB dijo que este era “multiuso”, queriendo explicitar así que el punto C podía ser cualquier punto de la circunferencia. Este aporte fue particularmente interesante por provenir de un niño. Entendemos que esto permitió que el grupo se apropiara del concepto de una manera distinta de la que hubiera sucedido si esta conceptualización hubiera estado en manos de las docentes. Sin embargo, la legitimación por parte de la maestra y la puesta en valor de las palabras del alumno fueron fundamentales para que suceda. Esta apropiación de la que hablamos, la vimos reflejada en el hecho de que el concepto estuvo disponible durante toda la secuencia. Fueron frecuentes las alusiones a esta idea, que resultó sumamente útil para continuar avanzando. Pareciera que para la mayoría del grupo quedó claro que el punto C podía ser cualquier punto de la circunferencia y que cada posición daba lugar a otro triángulo distinto. Además, les permitiría luego acercarse a conceptualizaciones tales como las únicas dos posiciones para el punto en las que no será posible construir un triángulo (en este caso con la medida de AC en 14 y 4 unidades).

Para finalizar la clase se escribieron, entre todos, conclusiones que quedaron plasmadas en un afiche (afiche 3), disponible para el próximo encuentro.



Cuando construimos triángulos que tienen
un lado AB de 9 cm y un lado BC de 5 cm pensamos:

- El punto C puede ubicarse en cualquier punto de una circunferencia con centro en B *menos* cuando queda en la misma línea que AB. En ese caso, AC mediría 14 cm y no se armaría ningún triángulo
- Se pueden construir muchos triángulos cambiando la medida de AC. La medida del lado AC es también la distancia del punto C al punto A.
- A medida que movemos el punto C por la circunferencia va aumentando la medida del lado AC porque C se va alejando de A. En un punto, que está en el medio de la circunferencia, C se vuelve a acercar a A y entonces la medida de AC se va achicando.
- El punto medio de la circunferencia es el que hace que AC mida 14 cm (el que dibujamos más arriba).

Entre nuestros objetivos, estaba la idea de que los alumnos identifiquen que AC podía tomar distintas medidas según la ubicación del punto C, pero al entrar en juego el movimiento (gracias a GGB) se dio lugar a muchas reflexiones y conclusiones que no teníamos anticipadas: por ejemplo, comenzar a reflexionar sobre el hecho de que la longitud de AC no podría tomar cualquier medida (sino que esta está acotada entre 4 y 14 cm), o bien el concepto de triángulos "espejados" y "puntos multiuso".

Empezó a evidenciarse aquí, a nuestro entender, una primera potencialidad de trabajar con el programa específicamente en las puestas en común y discusiones colectivas.

Sobre la clase 2

Una semana después de la primera clase se realizó la segunda parte de nuestra indagación.

La dinámica áulica fue idéntica a la anterior: trabajo en pequeños grupos (algunos en papel y otros en computadoras) y una puesta en común posterior. Se revisó el afiche que se había confeccionado con las conclusiones en la clase anterior y se entregó la consigna de trabajo.

SEGUIMOS CONSTRUYENDO TRIÁNGULOS

La clase pasada estuvieron construyendo triángulos. Hoy vamos a seguir pensando sobre ellos. Tal como hicimos antes, vamos a mantener fijas las medidas de los lados AB y BC, en 9 cm y 5 cm respectivamente, y vamos a ir cambiando las medidas de AC.

a) Intentá construir el triángulo ABC cuyo lado AC mida 5 cm. ¿Es posible? ¿Por qué?
b) Intentá construir el triángulo ABC cuyo lado AC mida 2 cm. ¿Es posible? ¿Por qué?
c) Intentá construir el triángulo ABC cuyo lado AC mida 3 cm. ¿Es posible? ¿Por qué?
d) Intentá construir el triángulo ABC cuyo lado AC mida 4 cm. ¿Es posible? ¿Por qué?
e) ¿Hay una medida mínima de AC para poder construir el triángulo ABC?

En este caso, se les propuso a los niños que intentaran construir triángulos con ciertas medidas de AC pautadas. Algunos de ellos serían posibles de trazar y otros, no. Las consignas de esta clase incluían valores determinados previamente para AC, lo que llevó a que los alumnos tuvieran que hacer construcciones con medidas controladas. Nuevamente, los grupos trabajaron con los mismos archivos o impresiones de la clase anterior.

Las intervenciones docentes en los pequeños grupos fueron más incisivas y determinantes que en la clase 1. Buscaban que los alumnos reflexionaran en torno al valor mínimo que podía tomar el lado AC y se aproximaran, de esta forma, a una sistematización sobre la propiedad triangular.

Queremos detenernos particularmente en el trabajo realizado por uno de los grupos que usaban GGB. Durante el encuentro anterior, este grupo de niños se había mantenido al margen de la puesta en común. Al comenzar la segunda clase y recibir la consigna, al principio no estaban muy convencidos de cómo resolver los problemas, ni qué herramientas usar para la construcción. Fue importante, entonces, que la docente se acercara a ellos y los ayudara. Luego de realizar las consignas de los puntos a), b) y c) se registraron en video las reflexiones que surgieron a partir de pensar el punto d). Nos parece interesante compartir el trabajo con este grupo en particular, ya que como docentes nos vemos en varias ocasiones en dudas acerca de cómo intervenir con estos niños a los que algunos contenidos "les cuestan más". Lo presentamos a continuación para luego compartir nuestro análisis.

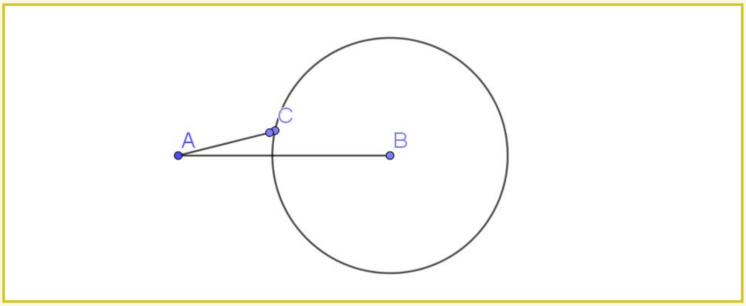
Acceder al video: https://youtu.be/mwIWfcljlhE.

En primer lugar, en este grupo fueron más intuitivos a la hora de trabajar; se percibía que había menos conceptualizaciones previas, pero intentando y reintentándolo pudieron llegar a la misma conclusión que los otros, de un modo distinto. Vimos allí una potencia particular del programa, ya que les permitió a los niños ir realizando reflexiones mientras "jugaban" con el movimiento de los puntos. Los docentes, en este caso, fueron haciéndoles preguntas que buscaban problematizar sus pensamientos además de guiar su exploración.

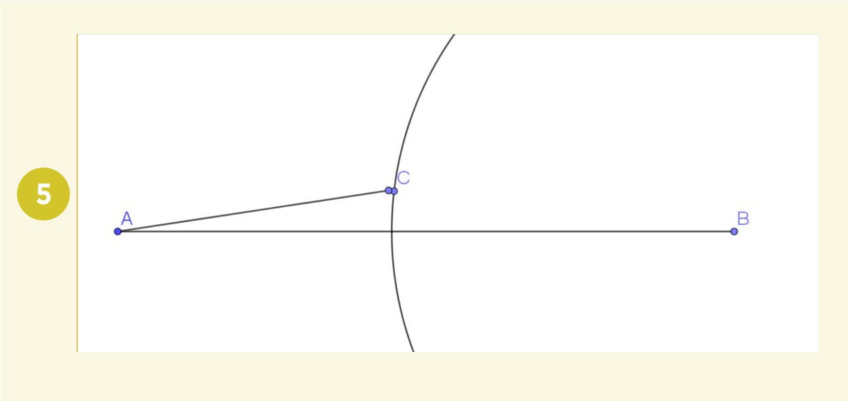
Los niños comenzaron trazando un segmento de longitud dada de 4 cm. No utilizaron la circunferencia, como se había trabajado en otras ocasiones, sino que decidieron recurrir a esta estrategia. Esto también nos habla de una exploración que no estuvo necesariamente anclada en las ideas trabajadas anteriormente.

Una vez trazado el segmento, intentaron hacer coincidir (encimar) el punto del extremo con el punto C dibujado sobre la circunferencia, conscientes de que en esa intersección estaría el tercer vértice del triángulo a construir, a pesar de no haber necesitado trazar el segmento BC (imagen 4).

4



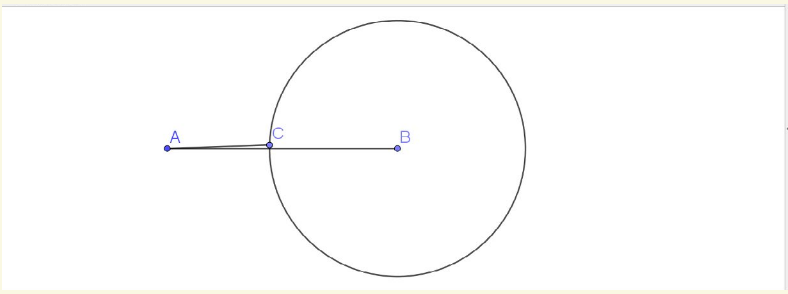
Utilizando la herramienta *Acercar*, con mayor acercamiento, se veía así (imagen 5):



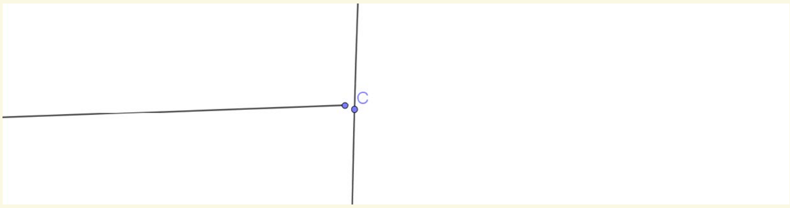
Empezaron entonces las primeras afirmaciones sobre lo que sucedía: “Para mí no llega, no llega por poco”. La docente intervino poniendo en palabras el proceso que estaban llevando adelante los niños: “Ustedes están buscando que ese punto se encuentre con el C”.

La maestra entonces propuso mover los puntos, acercándolos al segmento AB: “Era lo que iba a decir”, respondió una niña. De esta forma, los niños continuaron explorando. Comenzaron a darse cuenta de que cuanto más se aproximaban los puntos en cuestión al lado AB, se iban acercando: “Se quieren más”, dice una alumna. Ellos parecían satisfechos afirmando que sí habían logrado hacerlos coincidir (imagen 6), pero mostraron algunas dudas. La docente entonces sugirió volver a usar la herramienta *Acercar* para corroborar si realmente estaban encimados. Ante el primer acercamiento, los niños, casi decepcionados, afirmaron que no estaban completamente superpuestos (imagen 7). “Creo que lo puedo bajar más” afirmó un niño, y continuó su exploración. Entonces, una compañera propone corroborar utilizando nuevamente el *zoom*, adueñándose de la estrategia propuesta por la docente. El niño que manejaba el programa continuó moviendo los puntos: “Ahora sí se tienen que juntar”. Evidentemente, ninguno de los integrantes del grupo anticipaba aún que los puntos no se encontrarían hasta alcanzar la línea del segmento AB. Continuaron embarcados en su exploración para tratar de llegar a alguna conclusión. Luego de algunos intentos, el niño comenzó a realizar desplazamientos más pronunciados, tal vez empezando a darse cuenta de que no lograría su objetivo. Su compañera entonces afirmó: “Nunca se van a querer” (haciendo alusión a la imposibilidad de que exista la intersección entre su segmento y el punto C). El niño insistió en que lo lograría, pero al hacer *zoom* constató nuevamente que no. En este punto la exploración fue prácticamente autónoma. La docente abandonó el grupo pero los niños continuaron trabajando del mismo modo.

“Nunca va a llegar acá” dijo nuevamente la niña, señalando el punto C.



6 Antes de hacer *zoom*, los niños afirmaban que los puntos estaban encimados completamente.



7 Sin realizar movimientos en la figura, los alumnos hicieron varias veces *zoom* y corroboraron que los puntos no estaban efectivamente superpuestos.

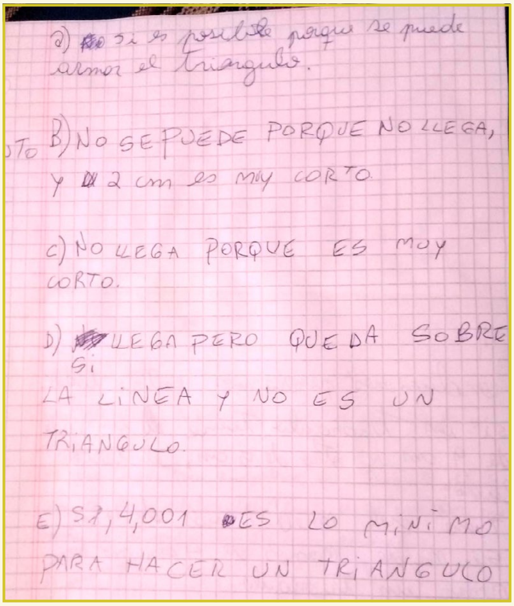
El docente observador, que se encontraba filmando el intercambio, intervino preguntándoles si pensaban que se encontrarían los puntos en algún momento. "Tiene que crecer más" afirmó la tercera integrante mientras movía el segmento AB. Comenzaron a aparecer entonces en las palabras de los niños algunas ideas interesantes que irían acercándolos a las conclusiones a las que se pretendía arribar. Una vez más el niño acercó bruscamente el lado AC al AB y afirmó que "ahí llegaría". Finalmente, el docente les preguntó: "¿Dónde se van a encontrar?". Inmediatamente los niños respondieron: "En la línea" (refiriéndose al segmento AB). Esta intervención ayudó a que los niños terminaran de elaborar su idea. Estaban cerca del objetivo, pero fue luego de la pregunta que terminaron de conceptualizar que la intersección de ambos puntos se produciría sobre la línea de AB. Una vez que los tres niños coincidieron en la idea, el docente los hizo regresar a la consigna de trabajo afirmando que donde se encuentran los puntos, no se armaría un triángulo.

Luego de la discusión, el grupo dejó registrado su trabajo por escrito (imagen 8).

A partir de este análisis, nos parece importante agregar algunas ideas:

- Por un lado, que la exploración que fueron haciendo no la podrían haber hecho en papel. Este "ir probando", ir moviendo el segmento y haciendo *zoom* para constatar dónde estaba exactamente el punto extremo del

8



Respuestas del primer grupo analizado.

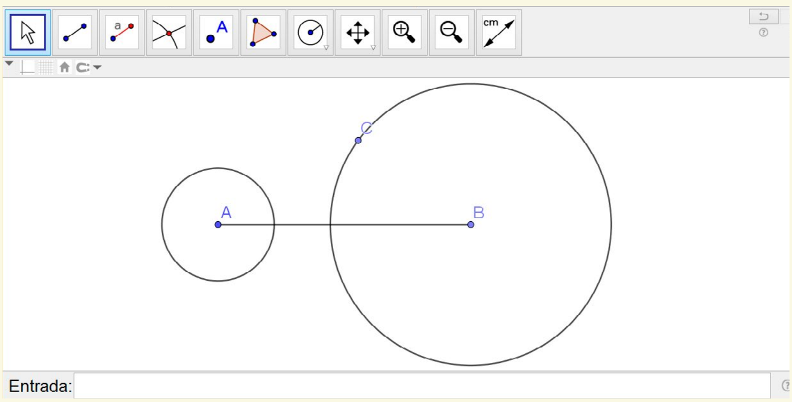
segmento con relación al punto C, en definitiva les posibilitó identificar que, bajo esas condiciones, ese segmento no podía ser el lado de un triángulo. Destacamos en particular la potencia de la herramienta de acercamiento, que permitió corroborar algunas ideas. En un momento los niños afirmaron que los puntos ya estaban superpuestos, pero al hacer *zoom* observaban que esto no era así. Además, como decíamos al principio de este trabajo, cuando se estudia esta propiedad en papel, la ubicación de los puntos genera dudas y contradicciones que son difíciles de resolver. Más adelante veremos cómo en la puesta en común resultó determinante el uso del *zoom* para demostrar que era imposible construir un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 5 cm y 9 cm.

- Por otro lado, y al igual que en otras áreas, sabemos que algunos niños necesitan de mayores intervenciones que vayan andamiando sus razonamientos y poniendo en palabras tanto los procesos como las conclusiones a las que van arribando. Es fundamental en estos casos que el docente tenga en claro el objetivo al que quiere llegar para que sus comentarios apunten en esa dirección. Este grupo, por ejemplo, probablemente no hubiera llegado a responder adecuadamente a la consigna sin la presencia de un docente acompañando el proceso. Decimos esto ya que pudimos observar que la profunda exploración que se dio por parte de los integrantes de este grupo no fue necesaria en otros casos en los que, aparentemente, sus conceptualizaciones previas parecían más avanzadas.

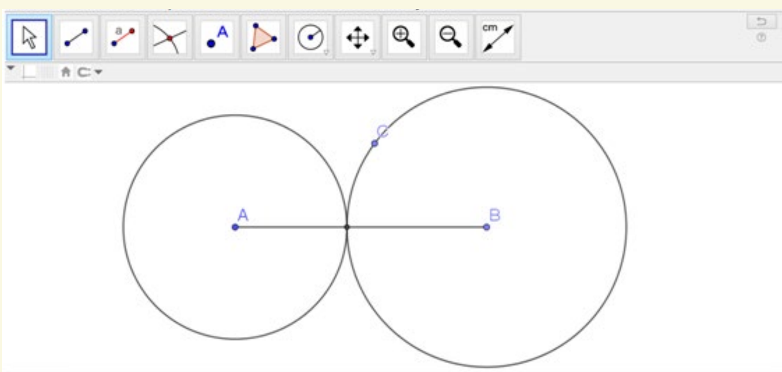
A continuación compartimos un ejemplo de trabajo en otro grupo.

Acceder al video https://www.youtube.com/watch?v=bcFG_58KBHI&feature=youtu.be.

En este caso, los niños arribaron con mayor rapidez a identificar las relaciones que comandaban el problema. Utilizaron estrategias más "estáticas", no tuvieron necesidad de usar el movimiento como variable que ofrece el programa. Trazaron circunferencias con la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* y luego utilizaron la herramienta *Intersección*. Mientras trabajaban, iban enunciando las justificaciones que cada caso requería: "No se cruzan", "Ahí con 4 se chocan pero no se cruzan", "No sería un triángulo porque es una línea" (imágenes 9 y 10).



9 Así demostraron la imposibilidad de construir un triángulo con un lado de 2 cm bajo las condiciones dadas.



10 Así demostraron la imposibilidad de construir un triángulo con un lado de 4 cm bajo las condiciones dadas. Utilizaron además de la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*, la de *Intersección* (punto negro sobre el segmento AB).

Es interesante, además, que no trabajaron con el punto C entregado en la consigna. Pareciera que al tener más disponibles algunas de las relaciones que se ponen en juego, el uso del programa acompaña las ideas que los niños ya tienen. Incluso la consideración del punto C como "punto multiuso".

Al igual que en la primera clase, la segunda terminó con una puesta en común en la cual se pusieron en debate cuestiones propuestas a partir de los problemas. Fueron particularmente interesantes las posiciones opuestas entre los grupos que habían trabajo en papel y los que habían trabajado en GGB, con relación a la posibilidad de construir un triángulo con un lado AC de 4 cm bajo las condiciones del problema. Algunos grupos en papel afirmaban que sí se podía, mientras que los otros grupos no, incluso afirmaban que quienes decían esto debían haber construido triángulos cuya medida de ese lado era mayor a 4 cm: "Le habrán cambiado la medida". La docente intervino en el debate, una vez más proyectando el GGB para echar luz sobre esta cuestión. Con la herramienta *Distancia o longitud* siempre activada, la docente fue representando lo que iban exponiendo los alumnos. Así fue dejando expuesto que la medida mínima tenía que ser mayor a 4 cm, utilizando también la herramienta *Acercar* para ver que cuando AC llegaba a medir exactamente 4 cm el punto C estaba sobre el segmento AB. Cuando alejaba el segmento AC de AB y se formaba un triángulo, la medida de AC era siempre mayor a 4 cm. Fue muy provechoso el uso de varios decimales, a pesar de que los alumnos aún no habían transitado su uso dentro del ámbito escolar, ya que permitía ver que por más que pareciera que la medida se mantenía en 4 cm, esto no era así.

De todos modos, transcurridos varios minutos de discusión y de argumentación, mediante el uso del GGB algunos grupos buscaron refutar la afirmación de que no se podía construir este triángulo. La docente tomó la construcción de unos niños que mostraban un triángulo en el que la medida del lado en cuestión era, según lo que mostraba el visor, de 4 cm. Al llevarlo al frente, mostró que esto era efectivamente así, pero porque el programa estaba ocultando los decimales. Al modificar esta variable, se reconoció que en verdad ese triángulo construido tenía un lado que medía más de 4 cm: "Aunque parezca que sí, en realidad siempre es más de 4". Se buscó así llegar a una generalización y concluir la discusión.[6]

Otro momento interesante que se dio en el marco de la puesta en común sucedió al retomar la conclusión de la clase anterior. La docente realizó una comparación entre el caso en el que AC medía 4 cm con el caso en que medía 14 cm. Preguntó a los niños, buscando sistematizar las ideas:

> D. ¿Cuál va a ser la medida mínima de AC?
> ALUMNOS. 4,1.

6. Es importante aclarar que acudimos a una validación más de índole empírica ya que, recordemos, no era nuestra intención hacer una validación intelectual sobre la propiedad triangular.

D. ¿Y la medida máxima?
ALUMNOS. 14.
Un niño entonces interviene y problematiza:
ALUMNO. 14 no, sería 13,99.

Es interesante ver aquí cómo la discusión que se dio en torno a la medida mínima de AC abonó la conclusión a la que se había llegado en el encuentro anterior, logrando una mayor rigurosidad en la afirmación.

Con relación a esta clase, queremos señalar que en esta oportunidad se evidenció para nosotras la potencia del GGB como herramienta de exploración para los chicos, permitiéndoles arribar a conclusiones de maneras muy diversas. Esta ventaja del programa se suma a la ya mencionada con relación a la puesta en común y la practicidad del recurso para el trabajo docente.

Todo este recorrido nos permitió arribar a algunas conclusiones que fuimos esbozando a lo largo de este escrito, pero que nos interesa recapitular a continuación.

ALGUNAS CONCLUSIONES FINALES

El programa permitió poner el eje no tanto en el proceso de construcción sino en el comportamiento de las figuras, habilitando un análisis más profundo de las propiedades específicas de los triángulos con relación a la medida de sus lados. En este sentido, es interesante considerar el tiempo áulico que solemos destinar a trazados *correctos* y *prolijos* en desmedro de un análisis más fino del conocimiento geométrico puesto en juego. Afirmar esto no significa desmerecer el trabajo en lápiz y papel con los elementos geométricos, pero sí nos permite replantearnos la centralidad que la escuela suele darles a estas prácticas. Con relación a esta cuestión, Laborde afirma que

> el campo de experimentación ofrecido por el dibujo en los dibujos con lápiz y papel está limitado por razones materiales [...]. El entorno Cabrigeómetra [...] amplía el campo de experimentación posible [...]. En un contexto en lápiz y papel, el alumno puede dar vuelta al papel y ver el dibujo en diferentes posiciones, pero no puede hacer variar los elementos variables más que trazando otro dibujo [...] (1997: 39).

Es indiscutible el cambio que propone el GGB respecto al estudio de la geometría en la escuela: incluye el movimiento. Este soporte, como pudimos dar cuenta en nuestra experiencia, permite a los niños tener otro tipo de vínculo con las figuras que construyen, diferente al que se genera usando lápiz y papel.

La exploración los lleva a la elaboración de conjeturas que, tal vez, en papel serían más complicadas de abordar. Pensemos en el grupo 1, analizado en la segunda clase, y la profunda exploración que realizaron. El ida y vuelta entre los niños, sus conjeturas y el trazado en el programa fueron constantes. Con un manejo cada vez más preciso de las herramientas del *zoom* y el movimiento, los niños pudieron llegar a sistematizar una idea que al comienzo del trabajo no consideraban como opción: los puntos se juntarían sobre el segmento AB y por lo tanto no sería posible construir un triángulo.

Con relación a la utilidad del programa en las puestas en común, resultó sumamente útil para pensar la propiedad triangular: ayudó a los alumnos a identificar una colección de triángulos posibles de ser construidos conociendo la medida de dos lados y, además, analizar condiciones de esas medidas para que sea posible dibujarlos o no (medidas máxima y mínima del tercer lado). Al construir los tres triángulos superpuestos en un mismo archivo y mover el primero para ir viendo cómo este iba "pasando" por los otros dos, se pudo hacer más clara la noción de que el punto C era, en verdad, una denominación para cualquier punto que se encontraba sobre la circunferencia de centro B. Al promediar la segunda clase, la mayoría del grupo tenía claro que el punto C era "multiuso". Desde la mirada docente, señalamos además la practicidad del uso del programa con proyector en reemplazo de las construcciones en pizarrón: es más veloz, más preciso y más dinámico en el mismo sentido del señalado previamente; permite un "ida y vuelta", retomar propuestas de alumnos y explorarlas colectivamente para descartarlas, o no, y pensar por qué.

Para terminar, volvamos al disparador de este trabajo: los niños suelen construir triángulos en papel a pesar de la imposibilidad de hacerlo, por la propiedad triangular. Muchas veces esto sucede debido a incertezas en la medición o a la intención de que el triángulo "cierre" de algún modo. ¿Cómo hacemos, en estos casos, para convencer a nuestros alumnos de que hay condiciones que imposibilitan construir algunos triángulos? Pensemos en el momento en que, terminando la puesta en común de la segunda clase, había niños que todavía estaban convencidos de la posibilidad de construir el ya famoso triángulo de 4 cm, 5 cm y 9 cm. Fue ahí donde el programa mostró su potencialidad. Permitió explicar "fenómenos visuales" y la imposibilidad de los mismos (ibíd: 43). Como venimos señalando, el GGB resultó ser una salida interesante ante este problema, tanto para los niños en sus construcciones como para los docentes y sus explicaciones.

CAPÍTULO 4

El movimiento de representaciones gráficas como variable didáctica

Antonella Paolini, María Florencia Pennini y Marcos Saban

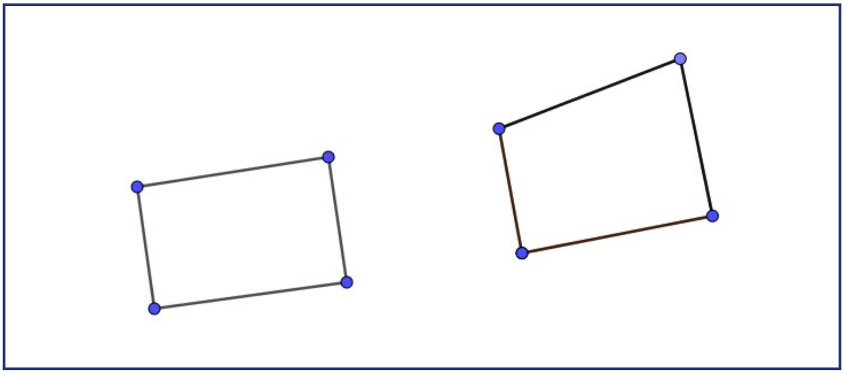
Agradecemos a los alumnos de 5º grado de la Escuela Martín Buber de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires por habernos permitido trabajar con ellos.

VOLVIENDO SOBRE NUESTROS PASOS

Al comenzar a cursar el Seminario de Geometría, nuestra experiencia con GeoGebra (GGB) era bastante acotada. Aunque habíamos interactuado con él, pocas veces tuvimos que resolver situaciones problemáticas utilizando este recurso. Hacerlo nos permitió comenzar a cuestionarnos, por ejemplo, acerca de cuándo una construcción es válida, qué es una copia, etc. En el papel, basta con superponer las figuras para corroborar la validez de una copia. La construcción de una figura mantiene fijas las relaciones entre sus elementos; por ejemplo, las rectas paralelas se mantienen siempre paralelas. La variedad de soluciones de un problema geométrico es menos evidente; por ejemplo, si se pide construir un rectángulo, alcanza con dibujar uno de manera "correcta".

Al usar el programa, todas estas cuestiones se pusieron en debate. El movimiento que se puede aplicar, o no, a cada elemento de la figura que se representa mediante un cierto dibujo genera nuevos interrogantes sobre la validación: ¿qué ocurre si al mover uno de los vértices de un rectángulo este se desarma?, ¿alcanza con que haya sido un rectángulo en algún momento para ser considerado válido? Al mismo tiempo, la posibilidad de mover los objetos ofrece una mayor cantidad de representaciones gráficas de una misma figura que las que permite hacerlo con lápiz y papel. Si dibujamos un rectángulo utilizando las herramientas del GGB *Paralela* y *Perpendicular*, el movimiento permitirá encontrar una cantidad considerable de rectángulos posibles (infinitos). Por otro lado, se puede construir un rectángulo con la herramienta *Segmento* y que, a la vista, tenga las características de esa figura (cuatro ángulos rectos, dos pares de lados paralelos, etc.); sin embargo, el movimiento nos “devuelve” que esa construcción no está realizada bajo esas relaciones (imagen 1).

1



También es necesario apelar a las relaciones entre los objetos y las herramientas para poder realizar ciertos movimientos y construcciones: si creamos un segmento dados dos puntos, la longitud del mismo es variable; en cambio, si lo hacemos usando uno de longitud dada, el tamaño no varía.

En el presente trabajo nos propusimos indagar la injerencia del movimiento que permite el GGB en las producciones e ideas de nuestros alumnos, partiendo de la hipótesis de que el mismo no se da de manera aleatoria sino que es una nueva variable a considerar, la cual habilita nuevas posibilidades de aprendizaje. A decir de Laborde:

> Si se desplaza con la ayuda del ratón uno de los elementos base del dibujo, este se deforma respetando las propiedades geométricas que han servido para su trazado y las que se deriven de ellas; por consiguiente, si se ha realizado un dibujo mediante primitivas de dibujo puro, es decir a ojo, pierde sus propiedades espaciales aparentes en su estado original al desplazar uno de sus elementos (1997: 37-38).

Volviendo a nuestro ejemplo anterior, los extremos de un segmento dados dos puntos pueden moverse libremente en el plano, modificando la longitud del segmento trazado. En cambio, si creamos un segmento de longitud dada, uno de los extremos se moverá libremente en el plano mientras que el otro solo lo hará sobre una circunferencia (no visible), manteniendo la longitud del segmento. Estos movimientos están basados en ciertas propiedades y relaciones geométricas:

- Una circunferencia se define como todos los puntos que equidistan de otro llamado centro.
- El radio de una circunferencia es la distancia del centro a cualquier punto de la misma.

- La longitud de un segmento está dada por la distancia entre sus extremos. Definir la longitud de AB es definir la distancia entre A y B.
- Encontrar un punto a esa misma distancia del centro implica ubicar un punto de esa circunferencia.

EN LA BÚSQUEDA DE UN INTERROGANTE

Esta nueva manera de tratar con ciertas relaciones geométricas comenzó a generarnos algunos interrogantes, asociados al modo en el cual el movimiento, a la luz del trabajo con el GGB, sería un asunto potente en las clases con nuestros alumnos. No divisábamos una gestión sencilla.

Para poder avanzar, decidimos empezar por conocer el trabajo geométrico que venían realizando los niños y niñas con los cuales implementaríamos la indagación. Dado que el docente del grado es uno de los autores del presente capítulo, tuvimos acceso al recorrido que habían realizado los estudiantes desde el comienzo del ciclo.

En primer lugar, en 4º grado, los niños pudieron avanzar en la conceptualización de la circunferencia como los puntos equidistantes a otro denominado centro, resolviendo con lápiz y papel situaciones problemáticas. Ya en 5º grado, volvieron sobre ese concepto y utilizaron por primera vez el GGB. En este soporte, construyeron segmentos con las herramientas *Segmento de longitud dada* y *Segmento* y exploraron los movimientos que se podían realizar con cada una ellas: movimientos libres en el plano del segmento AB y sus extremos en el caso de la herramienta *Segmento*; movimiento libre de A, movimiento de rotación de B en torno a A manteniendo la distancia entre ellos, usando la herramienta *Segmento de longitud dada.* También trazaron circunferencias utilizando las herramientas *Circunferencia (centro, punto)*, *Circunferencia (centro, radio)* y *Compás*, y exploraron los movimientos de ciertos elementos (circunferencias, puntos y centros) en función de las herramientas elegidas para construirlos. Por ejemplo, en una circunferencia de centro y punto, pudieron ver cómo, al mover cualquiera de ellos, la circunferencia se agrandaba o achicaba. En cambio, con una circunferencia de centro y radio, vieron que solamente era posible trasladar la circunferencia pero no cambiar su tamaño.

A partir de esta información, era necesario considerar en nuestra indagación que los chicos ya tenían alguna experiencia en el uso del GGB. Sin embargo, el hecho de que conocieran las herramientas y los movimientos que estas posibilitaban, no implicaba necesariamente que hubieran construido nociones acerca de las relaciones geométricas que se ponen en juego. Por ejemplo, que la ampliación o la reducción de la circunferencia implica la variación o no del radio; que el movimiento de rotación del punto B en torno a A en un segmento de longitud dada AB, se da porque solo los puntos que están sobre la circunferencia de centro A y radio AB son los que respetan la distancia dada.

Así fue como diseñamos una actividad para que los alumnos y alumnas pudieran tomar decisiones sobre cuáles herramientas ofrecían las mejores condiciones para resolver una situación problemática y por qué, considerando la interacción entre los elementos (segmentos, circunferencias y puntos) construidos con ellas y los movimientos que allí se producen.

De esta manera, habiendo terminado la planificación de la clase y teniendo en cuenta el recorrido de los estudiantes, logramos focalizar nuestro interrogante inicial en preguntas más concretas vinculadas a los objetos a trabajar.

¿Qué tipo de situaciones nuevas se pueden generar al incorporar el movimiento en la construcción de segmentos, la búsqueda de puntos que estén a determinada distancia y la posibilidad de encontrar puntos que cumplan dos condiciones a la vez en GGB?

¿De qué manera el movimiento en GGB posibilita reconocer las relaciones entre los elementos trabajados?

- El movimiento de rotación de un segmento de longitud dada, ¿permite recuperar el conocimiento que ya tienen los alumnos y las alumnas sobre circunferencia? ¿Es posible que los chicos, conociendo el concepto de circunferencia, puedan explicar el movimiento de rotación de un segmento de longitud dada?
- El movimiento de los extremos de un segmento dados dos puntos AB, ¿permite conjeturar acerca de la existencia y posible ubicación de un punto que esté a una distancia determinada de A y a otra de B?

CONSIGNAS PARA LOS ALUMNOS Y ANTICIPACIONES

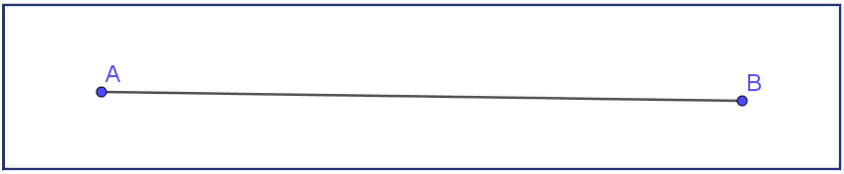
Considerando el recorrido realizado por el grupo, tomamos los conceptos de circunferencia y radio como contenidos a partir de los cuales avanzar en la exploración de las condiciones de existencia de puntos que cumplen determinadas condiciones y realizar nuestra indagación.

Para poder abordar estos aspectos, la clase se organizó en dos momentos. En el primero de ellos se les pidió a los estudiantes que, en grupos de a tres (siendo un total de 8 grupos), resolvieran las siguientes consignas:

> A partir del segmento AB:
>
> 1. Marquen un punto C que esté a 7 unidades de A.
> 2. Encuentren otro punto D que esté a 5 unidades de B.
> 3. ¿Existirá un punto E que esté a 7 unidades de A y a 5 de B al mismo tiempo? Si existe, márquenlo. Si no existe, piensen por qué.

Junto con las consignas, cada grupo tuvo acceso a una computadora desde la cual pudo ingresar al archivo de GGB con el segmento AB dado. Dicho segmento tenía sus *extremos libres* y una longitud de 13 unidades (imagen 2).

2



La decisión sobre las características del segmento se tomó con el fin de favorecer el movimiento de los puntos A y B al resolver el último problema (las medidas requeridas en las consignas 1 y 2 no permiten encontrar el punto E sin cambiar la longitud del segmento AB).

A su vez, el archivo se configuró sin ejes cartesianos ni cuadrícula. Esta decisión fue tomada a partir de suponer que, si se les ofrecían esos recursos, los mismos operarían como una unidad de medida, invalidando la necesidad de buscar herramientas que asegurasen una longitud determinada (el segmento de longitud dada, la circunferencia de radio 7, etc.).

Otra variable que tuvimos en cuenta fue el diseño de la barra de herramientas. Debido a que los estudiantes ya habían tenido contacto con el programa, hicimos una selección de las herramientas que restringiera las opciones, sin que por ello quedaran únicamente las conocidas o pertinentes para resolver el problema.

Sobre esta primera parte de la clase también realizamos anticipaciones en torno a las herramientas que utilizarían los estudiantes para medir –y por ende para resolver– los ejercicios 1 y 2 de la consigna. Teniendo en cuenta el trabajo previo, anticipamos que las más utilizadas serían *Segmento de longitud dada* y *Circunferencia (centro, radio).* Además, por la similitud entre las consignas 1 y 2, creímos que las estrategias de resolución para ambas serían las mismas. Es decir, si para encontrar un punto que esté a 7 de A utilizaban *Segmento de longitud dada,* para encontrar un punto que esté a 5 de B se esperaba que empleasen la misma herramienta.

Por otro lado, tuvimos en cuenta que la utilización de estas herramientas podía presentar ciertas dificultades, tanto en su uso como en la interacción con otros objetos presentes en el plano y en las estrategias que emplearían para responder la consigna 3.

En cuanto a esta último, consideramos que sería, para los alumnos, el mayor desafío. En primer lugar, por el tipo de tarea solicitada (encontrar un punto que cumpla dos condiciones de manera simultánea). En segundo lugar porque, bajo las condiciones que nosotros les presentamos (un segmento AB de 13 unidades), el punto E no podría ser encontrado sin modificar la longitud del segmento AB. Entonces, la dificultad estaría en decidir si es válido o no mover el segmento presentado en el problema. Consideramos que la misma podía estar vinculada con la pregnancia de las construcciones en lápiz y papel, donde el dato del segmento AB sería fijo y el punto E no existiría. Como tercera dificultad, el movimiento necesario para hallar el punto E podría implicar que perdieran validez las construcciones previamente realizadas. Si al hallar el punto C con la herramienta *Segmento de longitud dada* el mismo fuese independiente del punto A, al mover este punto, el punto C dejaría de estar a 7 de A.

El segundo momento planificado para la clase fue la realización de una puesta en común donde los estudiantes pudieran explicitar las diferentes estrategias utilizadas para resolver las consignas, argumentar sobre la validez de sus construcciones y poder sistematizar entre todos algunas conclusiones vinculadas tanto a los contenidos planteados como al contexto elegido para el trabajo (GGB).

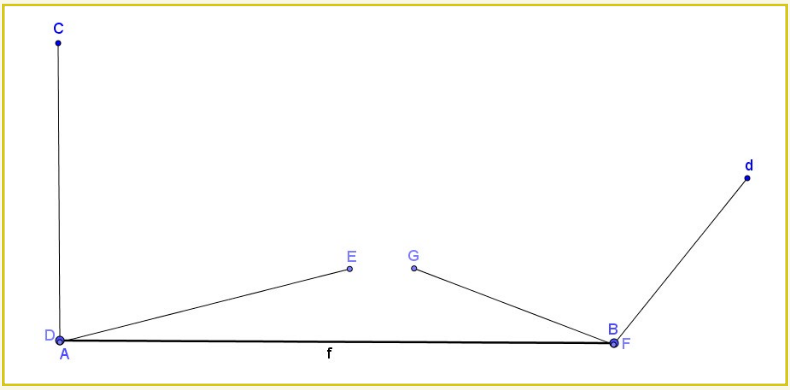
Como conclusiones posibles de este segundo momento podríamos mencionar:

- La circunferencia de punto y radio me permite medir en GeoGebra.
- Para encontrar todos los puntos que están a 7 de A me conviene hacer la circunferencia con centro en A y radio 7.
- Si no hay relación entre los elementos, las construcciones se pueden desarmar. Si la circunferencia no la armo usando el punto A, pueden separarse y dejar de cumplir con la condición pedida.
- Si un punto está donde se juntan las dos circunferencias es porque está a 7 de A y a 5 de B.

LA PUESTA EN MARCHA

Durante el primer momento de la clase, los grupos emplearon diferentes estrategias para resolver las consignas. La mayoría utilizó la herramienta *Segmento de longitud dada* (grupos 1, 2, 4 y 5). Sin embargo, las resoluciones fueron distintas entre sí debido a la relación que cada grupo estableció entre su construcción y el segmento original AB.

Por ejemplo, para resolver la primera consigna el grupo 5 realizó la siguiente construcción (imagen 3):

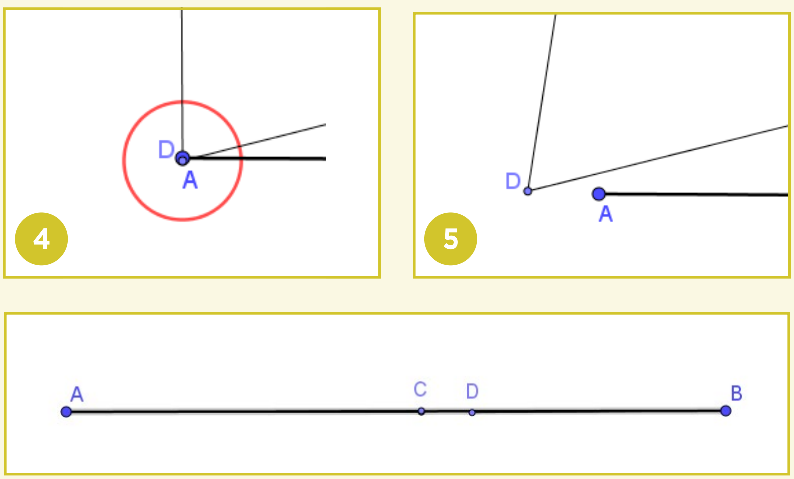


3 Captura del archivo de GGB del grupo 5.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/bbj2e6xv>.

Construyeron un segmento de longitud dada (CD)[1] independiente del segmento AB. Luego movieron sus extremos hasta que uno de ellos (D) quedó unido al punto A (imagen 4).

En un segundo momento, construyeron otro segmento con la misma herramienta pero, esta vez, intentando hacerlo desde el punto A. Cuando quisieron cliquear sobre dicho punto, pincharon sobre D. De este modo, ambos segmentos quedaron separados de AB pero vinculados entre sí por D, tal como se observa al mover los puntos A, C o D. De manera análoga, resolvieron la consigna 2 (imagen 5).

El grupo 1 también construyó los puntos C y D utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada* pero partiendo de los puntos A y B respectivamente (imagen 6).



6

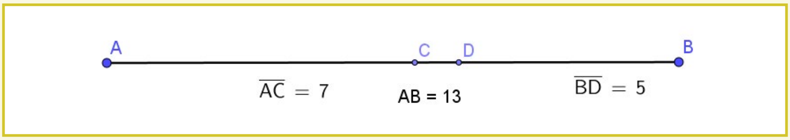
Captura del archivo de GGB del grupo 1.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/n9vkbmxg>.

Esto les permitió que la construcción no se les desarmara al mover el punto D en la búsqueda de un punto E para resolver la consigna 3. Vale aclarar que en la producción de los niños aparecen sobre AC dos segmentos más superpuestos. Podemos suponer que, en el intento de encontrar otros puntos C para resolver la tercera consigna, volvieron a utilizar la herramienta *Segmento de longitud dada* obteniendo la superposición de segmentos. Debido a que el GGB, por defecto, construye este tipo de segmentos a la derecha del punto de origen, podemos asegurar que el punto D fue trasladado ya que se encuentra a la izquierda de B.

1. En las producciones de los niños, muchos puntos no estaban rotulados. Para poder hacer referencia a las construcciones, decidimos intervenir los archivos originales para hacerlos visibles. Tal es el caso del punto D.

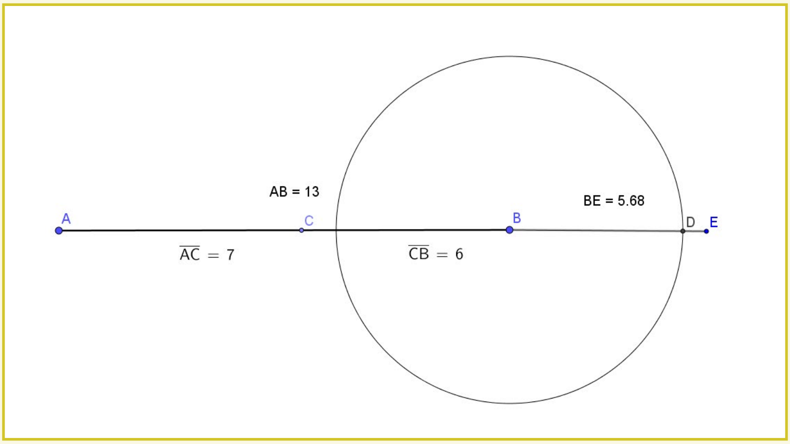
El grupo 7 colocó el punto C (usando herramienta *Punto*) sobre el segmento AB. Apoyándose en el uso de la herramienta *Distancia o longitud* para medir, lo movieron hasta llegar a 7 unidades (imagen 7).

Mientras que el grupo 7 mantuvo el mismo procedimiento para resolver la consigna 2, al grupo 8 le resultó difícil lograr precisión en el movimiento de los puntos para obtener la medida requerida. Esto lo llevó a buscar otras herramientas de resolución (imagen 8).



7

Captura del archivo de GGB del grupo 7.
Acceder al archivo <https://ggbm.at/resubxvh>.



8

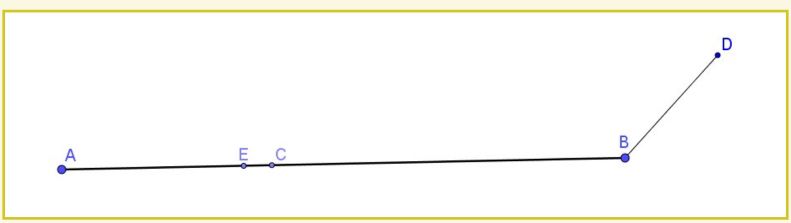
Captura del archivo de GGB del grupo 8.
Acceder al archivo <https://ggbm.at/vqcnjaja>.

Por sugerencia de la docente, las integrantes del grupo 8 exploraron la barra de herramientas. Al hacerlo, encontraron la herramienta *Circunferencia (centro, radio)* y enseguida la reconocieron como una opción pertinente para resolver el problema. Si bien no fue la primera opción, desde el momento en que la seleccionaron, pudieron dar cuenta del proceso que las llevó a elegirla y la relación entre el radio y la distancia entre B y D.

> A (ALUMNA). Nosotras encontramos una forma, antes de darnos cuenta que podíamos hacer una circunferencia, y pusimos un punto y tratamos de ver, más o menos, cómo era. Entonces empezamos a probar y después tocamos donde decía centímetros.

D (DOCENTE). ¿Esta herramienta? (*señalando en la pantalla, la herramienta* Distancia o longitud).
A. Sí, y nos fijábamos cuánto medía. Y entonces íbamos buscando más o menos la medida. [...]
D. ¿Y el punto a 5 dónde está?
A. Nosotras hicimos una recta al lado de B y nos fijamos cuánto medía. Empezamos a probar y no nos daba. Y entonces dijimos: "Vamos a buscar otra forma".
D. Entonces para la segunda cambiaron y buscaron otra forma.
A. Entonces buscamos en circunferencia y pusimos *Circunferencia (centro, radio)*. Y le pusimos radio 5 e hicimos la circunferencia.
D. ¿Ustedes dicen que esta circunferencia tiene radio 5?
A. Sí
D. ¿Y este punto está a 5? (*señalando el punto D*).
A. Sí.
[...]
D. Ahhhhh, por una cuestión de distancia. Pero, ¿qué herramienta usaron, chicas, para estar seguras?
A. *Centro y radio*. Porque vos tenés que poner el radio a 5.
D. Y eso, ¿cómo les asegura que está a 5?
A. Ya lo probamos y nos dio 5.
D. Ah, ellas para asegurarse usaron la herramienta de medida y dio 5. (*La alumna se para y muestra el segmento BD*.) Y eso que ella está señalando, ¿cómo se llama?
A. El radio.

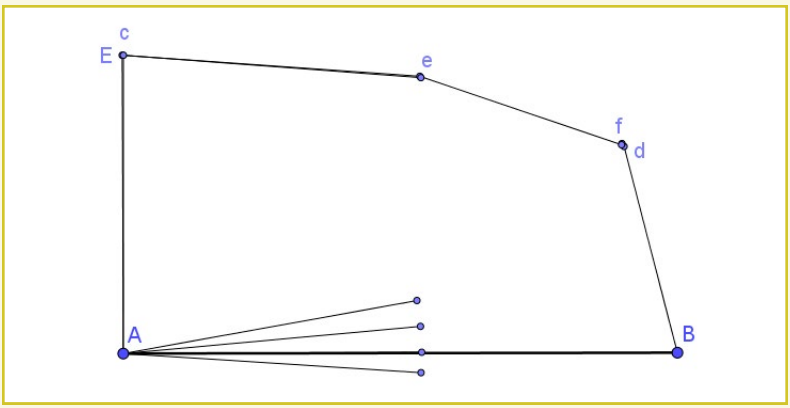
Por último, los grupos 3 y 6 utilizaron la regla para medir y colocar los puntos a la distancia que se les pedía. Cabe aclarar que, por el tamaño de la pantalla, la medida del segmento era mayor a 13 cm. El grupo 6 colocó la regla en A y a 7 cm ubicaron un punto C con la herramienta *Punto* (imagen 9).



9 Captura del archivo de GGB del grupo 6.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/fn6w7pp5>.

Este procedimiento lo repitieron para marcar el punto D, pero al considerar que el punto tenía que estar a la derecha de B y no tener un segmento donde ubicar el punto, decidieron cambiar de herramienta. Construyeron un segmento y lo fueron moviendo hasta llegar a que el punto D estuviera a 5 cm. Al intentar resolver la consigna 3, los puntos C y D quedaron a una distancia mayor a la que hubiesen quedado utilizando las unidades de medida del GGB. Durante la construcción pudimos ver que el grupo movió el segmento BD pero, al hacerlo, la medida se les modificaba. Al no poder acercar el punto D al C, construyeron uno nuevo (E) sobre el segmento AB tratando de que cumpliera las condiciones pedidas. Con este nuevo punto, tampoco pudieron resolver la consigna 3.

En la producción del grupo 3 no podemos visualizar cómo el uso de la regla influyó en la construcción. Esto se debe a que, durante la puesta en común, una de las integrantes del grupo modificó el archivo original tratando de "mejorar" la producción, considerando las estrategias empleadas por otros compañeros. De esta manera, utilizó *Segmento de longitud dada* para hallar los puntos C y D. Luego, a continuación construyó otros segmentos, dependientes de distintos puntos, al tratar de encontrar el punto E (imagen 10).



10 Captura del archivo de GGB del grupo 3.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/qezuxupu>.

LA MEDICIÓN COMO PRIMER OBSTÁCULO

Al comenzar a trabajar, luego de leer las consignas, algunos niños preguntaron si alguien tenía regla y compás.

> GRUPO 3
> A1. Encontrar un punto C que esté a 5 de A. Encontrar un punto D que esté a 7 de B.
> A2. ¿Alguien tiene compás?
> D. Si necesitan algo, pueden ir a buscarlo al aula. Si quieren buscar una regla o un compás pueden hacerlo.

A2. Este es el momento.
[...]
A3. ¿Me prestás regla?
A4. Sí.

Grupo 6
D (*releyendo y explicando la consigna a un grupo*). Marquen un punto, que se va a llamar C. Este punto se llama A y este punto se llama B (*señalándolos en la pantalla*). Un punto que se llame C que esté a 7 unidades de A.
A5. Ahhh es eso. ¿Alguien tiene compás? ¿Alguien tiene compás?, ¿y regla?

Al hacerlo, muchos niños lo tomaron con naturalidad y hasta decidieron ir a buscar esos elementos. Otros, sin embargo, se sorprendieron:

Grupo 4
A3. Se pasa medio centímetro, y si partís de B, 5 cm para afuera.
A4 (*señalando al grupo de al lado*). ¿Por qué usan una regla?
A3. Shhhhh.

Nosotros habíamos anticipado la posibilidad del uso de la regla por parte de los estudiantes para medir sobre la pantalla. Dada la experiencia que tenían en el uso del programa, lo creíamos poco probable. El uso del compás, en cambio, nos sorprendió: lo habíamos desestimado por la imposibilidad de "pinchar" sobre la pantalla. Creemos que a los chicos, colocar el compás en la pantalla, también les resultó atípico ya que finalmente solo utilizaron la regla.

También creemos que al leer el problema lo relacionaron con otras situaciones similares que ya habían resuelto en el contexto de lápiz y papel. Buscaron estrategias de resolución que les habían resultado útiles anteriormente. Podemos conjeturar que la relación entre este tipo de problemas y el uso de la regla y el compás podría responder a la adquisición de un método construido desde la experiencia, aun sin comprender las relaciones geométricas que lo validan.

Nos parece interesante señalar que es el mismo entorno (digital) el que los enfrenta a cierto límite de esas estrategias construidas, poniéndolos en situación de tener que resignificar las mismas para un contexto particular. Son los propios niños los que desestiman el uso del compás, incluso luego de haberlo ido a buscar especialmente.

Sumado a esto, una vez comprendido el contexto particular en el que era necesario resolver el problema, no todos lograron poner en juego lo visto en clases anteriores en el programa. Esto se debe, en parte, a que el tipo de tareas propuestas durante esas clases tuvieron como finalidad la exploración de las herramientas y los movimientos que estas permitían. Pero no implicó pensar las relaciones geométricas que las caracterizan, en función de resolver un problema. Observar el movimiento de rotación de un *Segmento de longitud dada* AB en torno al punto A, no implica reconocer que el mismo se da por tener que mantener siempre la distancia entre los extremos (lo cual solo ocurre si B pertenece a la circunferencia de radio AB).

Debido a que los enunciados propuestos no sugieren el uso de alguna herramienta en particular, en nuestra indagación, desde la consigna, se pone a los chicos en situación de tener que decidir, con base en sus conocimientos, una manera de resolver el problema.

Retomando las discusiones sobre las herramientas a emplear para medir la distancia entre los puntos, los grupos tomaron también decisiones en torno a la unidad de medida requerida para resolver los problemas. Para algunos, la unidad no fue motivo de discusión: encontrar un punto a 7 unidades de A implicaba respetar la unidad "propia del GGB". Otros, en cambio, asociaron "las unidades" requeridas a los centímetros.

> D1. (*Comenzando la puesta en común*) Cuenten, ¿cómo trabajaron? ¿Cómo encontraron el punto?
> A1. Lo hicimos con la regla.
> D1. ¿Qué hicieron con la regla?
> A1. Medimos del punto C al punto A y del punto D al punto B.
> D1. O sea, de A a C debería medir 7 y de B a D debería medir 5. ¿No?
> A2. Pero GeoGebra cuenta con unidades.
> D2. Vamos a ver qué pasa. (*La docente toma una regla de pizarra y mide en la pantalla.*) Miren, les digo, acá sería algo así como 32 cm. ¿Ustedes qué dicen?
> A3. GeoGebra no mide con centímetros, mide con unidades, y acá te pedía 7 unidades, no 7 cm. La regla estaría mal.
> D2. Y el resto, ¿qué piensa?
> A4. La regla no debería usarse en estos casos.
> D1. ¿La regla estaría mal?
> A1. Pero acá dice 7 cm.
> D1. ¿Por qué no debería usarse?
> A4. Dice 7 unidades.
> D1. ¿La consigna dice 7 cm? Ustedes interpretaron que eran 7 cm pero la consigna dice 7 unidades. (*Al alumno anterior*) ¿Vos qué querías decir del programa?
> A4. Que esto mide con unidades (*en referencia al GGB*), no es con centímetros.

En este intercambio, algunos niños explicitaron qué unidades de medida utilizaron para resolver los problemas. Al hacerlo pusieron en juego la relación que establecieron entre la unidad de medida y la herramienta usada para obtenerlas. Quienes usaron las herramientas del programa para medir, parecen suscribir a un contrato implícito, construido durante el trabajo previo en este soporte, en el que "en GGB se usan 'unidades del GGB'". Quienes usaron la regla, en cambio, no parecen compartir dicho acuerdo y consideran a los centímetros como unidad de medida válida.

Cabe aclarar que buena parte de esta discusión podría estar asociada a que el mismo programa es el que, en su ícono *Distancia o longitud*, se refiere a dicha unidad alentando al uso de la regla como si fuese lo mismo usar ambos instrumentos de medida. Pudimos establecer que, cuando usamos este programa, es necesario medir con las herramientas del mismo para mantener las relaciones en cuanto a la medida (imagen 11).

11

¿MOVER O NO MOVER?, ESA ES LA CUESTIÓN

Al comenzar esta indagación nos preguntamos acerca de la injerencia del movimiento que permite el GGB en las producciones e ideas de los estudiantes. Luego de implementar la clase y volver sobre ella para analizarla, reconocimos diferentes aspectos del movimiento que nos resultan interesantes para ser desarrollados.

El movimiento al servicio de la consigna

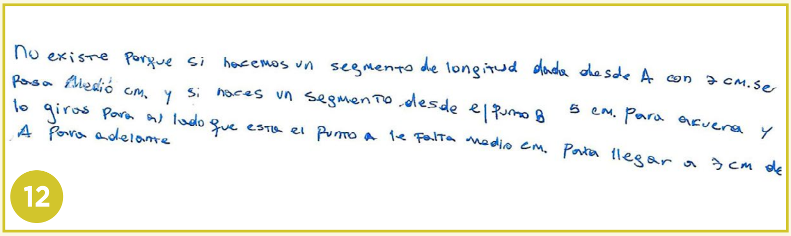
Muchos de los alumnos, para responder las consignas 1 y 2, tuvieron que mover algunos elementos de sus construcciones. No estaba en los enunciados, pero debido a las herramientas elegidas era necesario hacerlo. Nadie preguntó si se podía, ni se puso en discusión dentro de los grupos. Se dio de forma natural.

Por ejemplo, los grupos que usaron la herramienta *Punto* en algún momento del trabajo (grupos 4, 6, 7 y 8) fueron desplazando los mismos hasta dar con las medidas pedidas (ya sea usando la regla común o el comando *Distancia o longitud*). El grupo 5, al haber utilizado la herramienta *Segmento de longitud dada* desvinculada de los puntos A y B, debió trasladar los segmentos creados hasta hacer coincidir uno de los extremos de cada segmento con A y B respectivamente.

Otras situaciones en las que el movimiento estuvo "al servicio de la consigna" se dieron al tener que resolver el último ítem. La mayoría de los grupos interpretaron que, para encontrar el punto E que cumpliera las dos condiciones, debían hacer coincidir los puntos C y D, hallados anteriormente. Al hacerlo, se vieron obligados a mover dichos puntos, obteniendo distintos resultados según las herramientas utilizadas.

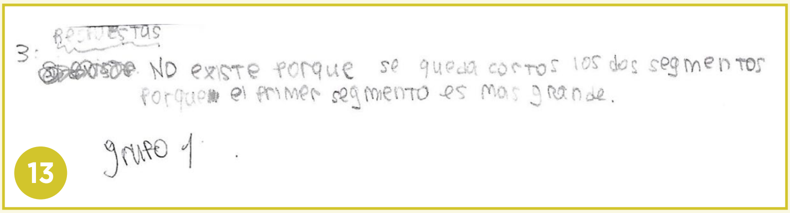
En el caso de quienes trazaron puntos, el mismo desplazamiento que les permitió cumplir con las primeras consignas fue el que utilizaron para probar si los puntos C y D se encontraban. Pero al hacerlo, dichos puntos dejaban de cumplir las condiciones requeridas.

Quienes emplearon *Segmento de longitud dada*, en cambio, debieron rotar los extremos C y D para tratar de hacerlos coincidir. En la mayoría de los casos, este desplazamiento les permitió decidir que el punto E no existía (imágenes 12 y 13).


No existe porque si hacemos un segmento de longitud dada desde A con 3 cm. se
pasa medio cm. y si haces un segmento desde el punto B 5 cm. para afuera y
lo giras para el lado que esta el punto A le falta medio cm. para llegar a 3 cm de
A para adelante

12

Respuesta a la consigna 3 del grupo 4.


Respuestas
3: ~~existe~~ No existe porque se queda cortos los dos segmentos
porque el primer segmento es mas grande.
grupo 1

13

Respuesta a la consigna 3 del grupo 1.

A continuación se puede leer un fragmento del intercambio realizado entre los integrantes del grupo 4, durante la primera parte de la clase:

A1. Marcamos de B para afuera 5, agarramos el *Elige y mueve* y no llega. Esto es 7, entonces no llega.
A2. Este es la mitad, que es el de 7 (*haciendo referencia al segmento AC*). Yo te diría que lo borres, pongas el otro pegado con ese.
A1. Ese lo pondría en 7,5.
A2. 6,5.
A1. 7,5.
A3. Y este es 5.
[...]
A1. Profe, terminamos.
D. ¿Encontraron el punto?
A1. Sí, hicimos todo.
A3. No existe.
[...]
A1. No existe porque si hacemos un segmento de longitud dada desde A...
A3. Perá...

A1. (*Vuelve a repetir*) No existe porque si hacemos un segmento de longitud dada desde A hasta 7 es más... un poquito larga, se pasa 5 cm.

Tal como se puede ver, el movimiento de rotación del punto B hacia la izquierda es una de las estrategias empleadas por los niños para intentar hallar el punto E.

El movimiento como motor de un cambio de estrategia

A partir del análisis de la producción del grupo 5, pudimos interpretar que el movimiento de sus construcciones los llevó a modificar su estrategia. En este caso, el modo de utilizar la herramienta elegida.

Este grupo halló los puntos C y D con *Segmento de longitud dada* pero construidos independientemente de los extremos del segmento AB. Es probable que en la búsqueda del punto E hayan movido los puntos C y D para hacerlos coincidir. Fue este movimiento el que les devolvió un problema: su construcción se desarmaba y las distancias de las primeras consignas dejaban de cumplirse.

En este intercambio, los alumnos cuentan el modo en que construyeron su figura explicitando la necesidad de vincular el segmento al punto A. Sin embargo, omitieron la dificultad que habían tenido anteriormente al mover los puntos C y D y que eso fue lo que los llevó a considerar la necesidad de vincular los segmentos de longitud dada a los puntos A y B. Fue el docente el que, al haber visto la producción desde el principio, les consultó sobre este cambio de estrategia.

D1. Tengo una pregunta... ¿dónde apoyaron el cursor?
A1. En A.
D1. Bien, toco en A y aparece esto (*se abre la ventana para ingresar la medida del segmento*). ¿Y qué pusieron acá?
A1. Pusimos 7. Pero tuvimos que girar porque se nos puso acá (*señalan sobre el segmento AB*). Tenés que poner el de girar (*señalando la herramienta). El docente gira.*
A1. No, así.
D2. ¿Desde el principio lo hicieron así? Porque yo vi que el de ustedes tenían que unirlo a este (*el segmento de 7 con el segmento AB*). ¿Y cómo pasó esto?
A1. No lo pudimos unir... tocamos...

Otra situación en la que el movimiento fue el que generó un cambio de estrategia se dio en el grupo 8. A diferencia del caso anterior, la modificación de la estrategia implicó elegir otra herramienta.

Como dijimos en el apartado previo, una de las herramientas utilizadas por varios grupos fue *Distancia o longitud.* Al poder medir la distancia entre dos puntos, los alumnos tenían que mover el cursor hasta que la misma fuera la requerida. Al grupo 8, esta herramienta le permitió resolver la primera consigna. Sin embargo, al momento de ubicar el punto C, no les resultó sencillo moverlo “sin pasarse” o “sin quedarse corto”.

> A1. Nosotras encontramos una forma, antes de darnos cuenta que podíamos hacer una circunferencia, y pusimos un punto y tratamos de, más o menos, ver cómo era. Entonces empezamos a probar y después tocamos donde decía centímetros.
> D1. ¿Esta herramienta? (*señala en la pantalla la herramienta* Distancia y longitud).
> A1. Sí, y nos fijábamos cuánto medía. Y entonces íbamos buscando más o menos la medida.

Al tener que resolver la segunda consigna, la misma herramienta les volvió a generar la dificultad de tener que mover el punto y llegar a una medida precisa. Entendemos que es esta dificultad la que las llevó a buscar otra herramienta que garantizara que el punto D estuviera a 5 unidades de B.

> D1. ¿Y el punto a 5 dónde está?
> A1. Nosotras hicimos una recta al lado de B y nos fijamos cuánto medía. Empezamos a probar y no nos daba. Y entonces dijimos: “Vamos a buscar otra forma”.
> D1. Entonces para la segunda cambiaron y buscaron otra forma.
> A1. Entonces buscamos en circunferencia y pusimos *Circunferencia centro y radio*. Y le pusimos radio 5 e hicimos la circunferencia.

Contraponiéndose a lo que habíamos anticipado,[2] este grupo usó dos estrategias diferentes para resolver las dos primeras consignas. En un principio, la exploración del movimiento fue la que les permitió arribar a una posible solución. Luego, recuperaron un conocimiento construido en otro contexto (radio de la circunferencia en lápiz y papel) para buscar en el programa la herramienta necesaria. El programa hizo visible la dificultad de mover un punto que se encuentre a una medida particular y, al devolverles este problema, las alumnas tuvieron que recurrir al concepto de radio de la circunferencia. Sobre el uso de estos programas, Laborde (1997: 39) expresa:

> Cabri-geómetra,[3] no solo por su funcionalidad de editor gráfico sino también por los conocimientos geométricos que integra, amplía el campo de experimentación posible. Ahora bien, tanto las acciones posibles como los retornos correspondientes, no solo se amplían, sino que resultan ser de naturaleza diferente al estar basados en conocimientos geométricos.

2. En nuestra planificación anticipamos distintos procedimientos para resolver la consigna 1 y la consigna 2, y asumimos que utilizarían la misma estrategia.

3. Recordamos que Cabri-geómetra es un programa de origen francés similar a GeoGebra.

El movimiento no autorizado

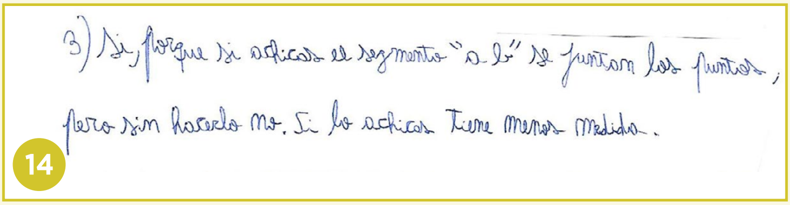
Así como destacamos que algunos movimientos se dieron de forma natural, hubo uno en particular que, al hacerse explícito, generó ciertas tensiones. Se trata del desplazamiento de los puntos A o B, que permitía modificar la longitud del segmento dado inicialmente.

El grupo 2 resolvió las primeras dos consignas utilizando *Segmentos de longitud dada*, vinculadas a los puntos A y B respectivamente. Durante la resolución de la tercera consigna, luego de haber movido los puntos C y D intentando hacer que se tocasen, uno de los integrantes afirmó que “el C y el D llegan a un lugar pero no se juntan”.

Tras haber determinado que no era posible que un punto cumpliera ambas condiciones, una de las niñas expresó que, para ella, sí era posible encontrarlo. Esta idea no fue del todo considerada por sus compañeros en un principio.

> D. A ver, ¿qué les parece que está pasando que “no se puede”?
> A1. Porque este está a 7 y este a 5 (*señalando los puntos C y D respectivamente*). Son 12...
> D. ¿Y entonces? (*a una de las estudiantes*), ¿vos qué pensás? ¿Estás de acuerdo?
> A2. Yo digo que si se achica se puede ajustar.
> A1. (*Sin estar convencido, va moviendo los segmentos AC y BD desde los puntos C y D.*) Este es un segmento de longitud dada o sea... (*mientras habla, mueve el punto A, achicando el segmento AB*).
> D. Y, ¿cambia? ¿Cambió algo ahí? ¿Servirá? ¿No servirá?
> *La docente se retira y los chicos encuentran un punto que cumple ambas condiciones. Una de las niñas comienza a dictar la respuesta al problema 3, pero se interrumpe porque sus compañeros no están de acuerdo. La docente interviene nuevamente.*
> D. Ustedes, ¿ya se pusieron de acuerdo?
> A2. (*Niega con la cabeza.)*
> D. ¿Seguís sin estar de acuerdo?
> A3. (*Releyendo la consigna*) Dice que tiene que estar a 7 unidades de A y a 5 de B al mismo tiempo.
> A2. Pero la consigna no dice cuánto tiene que medir AB.
> *Finalmente, deciden achicar el segmento AB para que el punto pueda hallarse.*

En este fragmento se puede ver que a los niños les resulta difícil tomar como válido el movimiento del segmento dado AB, incluso habiendo podido encontrar un punto E a raíz de ello. En las anticipaciones que realizamos sobre este problema, habíamos considerado que el movimiento de los extremos del segmento dado era poco probable. Por un lado, al ser un dato establecido por la consigna, moverlo implicaría modificarlo. Esto sería romper con el código del trabajo cotidiano en el aula, donde las consignas no se pueden modificar. Sumado a esto, los alumnos vienen acostumbrados al trabajo con segmentos fijos construidos en papel donde la longitud de ese segmento no puede variar. Creemos que por esto les resultó difícil tomar como válido el movimiento del segmento AB. A la hora de redactar la respuesta, los alumnos explicitaron haber movido el segmento y que, al hacerlo, este cambió su medida (imagen 14).


3) Si, porque si achicas el segmento "a-b" se juntan los puntos, pero sin hacerlo no. Si lo achicas tiene menos medida.

14

Respuesta a la consigna 3 del grupo 2.

Para la mayoría de los estudiantes, el movimiento aquí descrito no fue ni siquiera una posibilidad hasta que el grupo 2 lo presentó en la puesta en común:

D1. Cuéntennos, ¿qué hicieron?
A1. Nosotros hicimos..., primero pusimos los segmentos de longitud dada y después nos dimos cuenta que achicando el segmento AB se podía.
[...]
D1. Ellos hicieron esto: movieron esto así. (*El docente mueve el punto A hacia los costados, mostrando cómo se agranda y achica el segmento AB. Luego mueve los dos segmentos de longitud dada hasta hacer coincidir el punto C con el D.*)
A1. Hasta que se junten.
[...]
D1. Yo les pregunto a todos, ¿estaba bien que se pudiera mover AB? ¿A alguno se le ocurrió mover AB?
A4. No, no.
A5. Si movías AB te quedaba mal.
A4. Nosotros pensábamos: con el segmento que nos daba había que hacerlo. No que se podía mover.
[...]
A1. Estoy cambiando las condiciones. Para la mayoría no daba, no da que se junten. Si hacés 7 cm de A, 5 cm de B y cerrás el segmento, lo podés juntar y te queda.
D1. ¿Por qué a ellos se les ocurrió poder mover el segmento AB y a otros no se les ocurrió?

A2. Porque las condiciones decían que tenían que ser 5 de B y 7 de A. No decía que el segmento AB mida tanto.
D1. Miren lo que dice ella, las condiciones dicen que tienen que estar a 7 de A y a 5 de B, pero no dice nada del tamaño del segmento AB. El segmento AB podía medir la medida que uno quisiera.

En este momento de la puesta en común se pueden leer los argumentos de por qué para los estudiantes se puede considerar, o no, mover el segmento dado como consigna.

EXPLICAR CON EL MOVIMIENTO

Hasta aquí nos detuvimos a analizar los movimientos realizados por los alumnos al intentar resolver un problema con el GGB. Durante la clase, como docentes, recurrimos al movimiento para poder explicar la relación entre el radio de la circunferencia y el movimiento de rotación de un segmento de longitud dada. Desde el momento de la planificación decidimos abordar este movimiento para acercar a los alumnos a una nueva instancia de aprendizaje sobre este contenido.

Como varios grupos se valieron de la herramienta *Segmento de longitud dada* en sus construcciones y de este modo buscaron resolver el problema, el docente decidió proponer la exploración del movimiento en este tipo de segmentos tomando la producción de uno de ellos.

D1. Miren lo que estoy haciendo con *Segmento de longitud dada*: el punto C se mueve solamente a esa distancia y el GGB solamente me deja moverlo así y no de otra manera, solo así (*formando una circunferencia*).
A1. Porque cuando hiciste el segmento de longitud dada pusiste un número.
D1. Sí, puse 7.
A1. Sí, entonces cuando ponés así y ponés el *Rastro*...[4]
A2. Te marca la distancia.
A1. Va marcando todo lo que vas haciendo y te queda una circunferencia.
A2. Y también está a 7 cm de todos los puntos desde el centro.
A3. Porque si vos le estás indicando al GGB que sean 7 unidades, siempre van a ser 7 unidades, aunque lo gires todo el tiempo, van a ser 7 unidades.
D1. Siempre van a ser 7 unidades.

4. La herramienta *Rastro* permite dejar huella del movimiento que realiza un objeto en GGB. El docente lo introdujo en la clase para que los alumnos puedan visualizar el movimiento del *Segmento de longitud dada*.

D2. Claro, porque yo le di una orden y la tiene que cumplir el programa, no puede hacer lo que quiera.
A2. Como si hicieras una circunferencia de centro y radio, si la tratás de mover (para agrandarla o achicarla), se va a quedar en la misma longitud.

En esta instancia, el movimiento de rotación del *Segmento de longitud dada* les permitió visualizar que el mismo va dejando dibujada una circunferencia, sin modificar la distancia entre los extremos del segmento –o el centro– y los puntos de la circunferencia. A partir de estas relaciones, el intercambio se centró en tratar de explicitar la relación entre estas dos herramientas.

D1. Sí. Yo tengo una pregunta ahora, ¿qué relación tiene el segmento de longitud dada con la circunferencia de centro y radio? Porque hay una relación que se ve, ¿o no?
A3. Que una está dibujada y otra es una circunferencia.
D1. ¿Cómo?
A3. Que una está dibujada porque como... cuando vos la vas girando, va dibujando y te va mostrando y la otra vos no la podés mover, no la podés armar en el momento.
D1. Claro, una dibuja la circunferencia y la otra no. ¿Vos qué querés decir? (*dirigiéndose al alumno 2*).
A2. Si borrás el rastro, agarrás una circunferencia para hacer circunferencias "normales".
D1. Hago circunferencias "normales", ¿de centro y radio o...?
A2. No, circunferencia centro y punto. (*El docente lo va haciendo en la pantalla.*) Vas desde el punto A y lo hacés grande hasta el punto ahí (*hasta C*). Ahí, si movés el punto (A) 7, quizás se mueva la circunferencia y quizás solo se mueva el punto (A) 7, pero no cambia.
ALUMNOS. Queda igual.
A2. Queda igual.
D1. ¿Queda igual? Pero... con esta herramienta yo podía mover. Si yo muevo A...
A2. Si movés A sí se puede achicar porque vos hiciste la circunferencia desde el punto A.
A1. No, no, la circunferencia no se achica.
D3. ¿Por qué vos elegiste la circunferencia de centro y punto y no la del radio?
A4. Porque el radio ya está.
A2. Porque el radio ya está puesto y si hacés una circunferencia...
D3. ¿Cuál sería el radio que está puesto?
A2. El radio es desde A a C.
ALUMNOS. ¡De 7!
D3. Que lo construyeron ¿de qué manera?
A2. Con... longitud dada.

D3. O sea que ese segmento de longitud dada es el radio de esa circunferencia...

En este intercambio podemos ver que uno de los alumnos, para justificar el movimiento de rotación del segmento de longitud dada, le propone al docente usarlo como radio de una circunferencia del tipo *Circunferencia (centro, punto)*. Cuando se pregunta por qué no se usó la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*, se explicita que el radio ya está dado por el segmento de longitud dada. Creemos que en este nuevo contexto, el movimiento acercó a los alumnos a revisar la definición del radio de la circunferencia y a pensar que es el radio el que determina la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia.

UN ÚLTIMO MOVIMIENTO

Después de mostrar los distintos movimientos que aparecieron en el trabajo con el GGB durante una clase e intentar entender y analizar sus implicancias, decidimos realizar un último movimiento: volver sobre el interrogante "¿De qué manera el movimiento en GeoGebra posibilita reconocer las relaciones geométricas entre los elementos trabajados?".

Sabemos que con esta indagación no es posible responder dicha pregunta de manera concluyente. Sin embargo vimos que, como el GGB permite mover los elementos de una construcción geométrica, es posible resolver un problema, buscar otras formas de resolución y poder explicar un concepto de manera diferente que al usar lápiz y papel. De este modo, el movimiento puede pensarse como una nueva variable didáctica.[5]

Por último, la experiencia realizada nos llevó a pensar que ser capaces de mover un objeto de la construcción y tomar decisiones en función de ese movimiento no siempre implica conocer las relaciones geométricas detrás de estas acciones. Al decir de Laborde (1997: 40), "el recurso al desplazamiento contiene en sí mismo el uso de conocimientos: la ventaja de ello es que estas retroacciones proceden de un dispositivo externo al sujeto e independiente del profesor y, de esta manera, son susceptibles de hacer evolucionar al sujeto".

A la luz de la clase realizada, nos preguntamos qué alcance tiene la "evolución" a la que hace referencia Laborde en la sola interacción con el programa, al no ser necesario tener que explicitar las relaciones geométricas que subyacen en dichos desplazamientos.

En nuestra experiencia, fueron las intervenciones docentes y el intercambio colectivo los que requirieron la argumentación de los procedimientos realizados. Las mismas posibilitaron la explicitación y "circulación" dentro del grupo de algunas de las relaciones geométricas utilizadas en sus construcciones.

5. Este asunto ya fue tratado en el capítulo 1, "Pensar GeoGebra como variable didáctica".

CAPÍTULO 5

"Seño, ¿tengo que marcar todos los puntos?"

Andrea Favaro, Catalina Rosende Scordamaglia y Violeta Rosende Scordamaglia

Agradecemos a los niños de 4º grado del Colegio San Francisco de Sales por compartir sus saberes con nosotras.

INTRODUCCIÓN

En el marco del Seminario de Geometría de la carrera de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), recuperamos un conjunto de relaciones geométricas y analizamos nuestras prácticas en la enseñanza de la geometría, incluyendo ahora el programa GeoGebra (GGB), cuyo uso comparamos con la práctica en lápiz y papel, intentando identificar su potencialidad.

El trabajo con GGB nos permitió redescubrir la necesidad de explicitar, en cada construcción que realizábamos, las relaciones que caracterizaban a las figuras identificando algunas de sus propiedades. A su vez, el movimiento que le podíamos impregnar a los dibujos de figuras geométricas, habilitado por el programa, nos dio la oportunidad de generar nuevos debates. Por ejemplo, en relación con la idea de axioma y puntos de partida para el trabajo en nuestras aulas, o vinculados a la idea de "construcción correcta" (aquella que no se deforma con el movimiento), o con nuevos modos de exploración a partir de los errores. Es decir, mediante el estudio del movimiento o "arrastre" de algunos elementos que determinaban los dibujos pudimos comprender que construir una figura, bajo ciertas condiciones, implicaba ahora tratar con toda una familia de dibujos que responden a un conjunto de relaciones asociadas con la figura que se está estudiando.

Con el fin de profundizar en el debate sobre nuestras propias prácticas de enseñanza, llevamos a cabo una indagación utilizando GGB para analizar el trabajo con nuestros alumnos –que no tenían un recorrido con la geometría de lápiz y papel y que nunca habían trabajado con este programa– en el intento de aproximarlos a la noción de circunferencia.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

En muchas oportunidades, nuestra experiencia con el programa se vio obstaculizada por nuestro recorrido con lápiz y papel –el cual no nos permitía anticipar qué iba a suceder con el movimiento que es posible impregnarle a los dibujos en GGB–. Teniendo esto en cuenta, nos interrogábamos sobre cómo intervenir frente a las posibles producciones de los niños, al proponerles actividades con este programa que involucrarían una aproximación a la noción de circunferencia.

Según la experiencia tenida en varias oportunidades durante la práctica con la secuencia "Círculo y circunferencia" del *Documento de trabajo nº 5* (Sadovsky *et al*., 1998), para 4º grado, cuando en el aula se solicita a los niños "marcar todos los puntos que están a la misma distancia de un punto X" es muy frecuente que en un principio marquen una sucesión de puntos a esa distancia, pero sin considerar la circunferencia como la figura que permite identificarlos a todos. Miden con la regla la distancia solicitada desde el punto X, repitiendo la operación tantas veces como puntos consideran haber encontrado.[1] En la mayoría de las producciones trazan los segmentos para cada punto. En estas situaciones nosotras desplegamos diferentes tipos de intervenciones que, interpretamos, colaboran con los procesos de conceptualización de los niños (no pretendemos en este texto analizar este fenómeno).

Al no tener el mismo recorrido como docentes en el uso de GGB, nos preguntamos sobre nuestras intervenciones al incluir un nuevo recurso y nos planteamos que estas también colaboren en los procesos de conceptualización de los niños en relación con los conceptos de círculo y circunferencia.

Frente a esta cuestión nos fuimos planteando preguntas que, suponíamos, nos ayudarían en el análisis de nuestras propias prácticas bajo estas nuevas condiciones:

- ¿Cuáles serán los procedimientos y herramientas que usarán nuestros alumnos?
- ¿El GGB es un facilitador? Es decir, inferimos –desde nuestra experiencia– que muchas veces el trabajo con los instrumentos geométricos usuales puede obstaculizar el tratamiento de las relaciones que se pretende trabajar. ¿El uso de este programa nos permitirá que esas relaciones se vean favorecidas?
- Los niños, al resolver problemas geométricos usando GGB, ¿desarrollan estrategias diferentes a las que sabemos que utilizan en lápiz y papel? De ser así, ¿qué procedimientos utilizan?, ¿a qué herramientas recurren?, ¿por qué?, ¿cuáles serían nuestras intervenciones en esos casos?

1. En el capítulo 1, "Pensar GeoGebra como variable didáctica", se hace un análisis comparativo entre las anticipaciones enunciadas en el documento sobre las estrategias que pueden surgir para resolver el problema, y las que surgieron en la experiencia de aula que tuvieron los autores del capítulo mencionado.

- Las herramientas que proporciona el programa son muchas, por tal motivo seleccionamos las que consideramos que podrían beneficiar la resolución de los problemas planteados. Estas herramientas, ¿permitirán el despliegue de estrategias?, ¿ayudarán a la conceptualización?

PLANIFICANDO A PARTIR DE NUESTROS INTERROGANTES

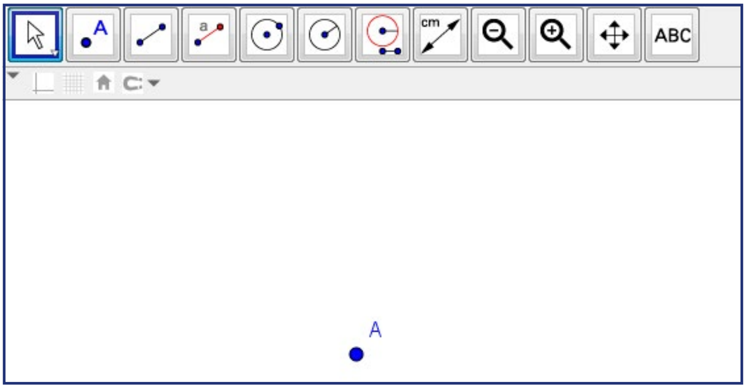
El recorrido que fueron realizando los alumnos y que, por lo general, secuencia el contenido de círculo y circunferencia, recurre al uso del compás para copiar figuras circulares y también como instrumento para trazar o trasladar una determinada medida.

La copia de figuras circulares no implica explicitar, necesariamente, la relación entre el uso del compás y la noción de circunferencia en tanto puntos que equidistan de uno dado. Es decir, no porque los alumnos hayan usado el compás podrán inferir que al marcar todos los puntos que están a cierta distancia de un centro están marcando una circunferencia, y que el compás permite dibujarlos a todos.

Cabe destacar, como ya anticipamos, que este grupo de alumnos nunca trabajó con GGB, por lo que utilizamos esta indagación como medio de exploración del trabajo de los chicos con el programa y también para poner en el centro de la escena a nuestras posibles intervenciones y gestión de la clase, que ahora incluye la computadora.

Para iniciar el trabajo se les entregó a los alumnos un archivo de GGB con un punto A marcado (imagen 1):

1



Y les presentamos (tomando las unidades de GeoGebra como centímetros) estas consignas:

a) Marcar cuatro puntos que estén a 3 cm de A.
b) ¿Existen otros puntos a 3 cm de A? Marcalos.

Luego de que resolvieron los ítems a) y b), les entregamos una tercera tarea:

c) ¿Existe alguna forma de marcar TODOS los puntos que estén a 3 cm de A?

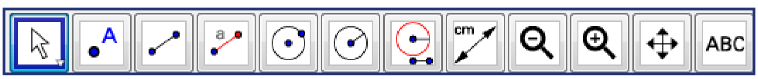
Separamos esta tercera consigna de las dos primeras porque imaginábamos que les anticiparía la existencia de muchos puntos (infinitos) que cumplen la condición.

El trabajo se desarrolló en dos módulos de 80 minutos cada uno. En el primer módulo se llevaron a cabo las actividades y en el segundo se realizó la puesta en común. Para no perder los ensayos que harían los niños, les solicitamos que no borren, que usen la herramienta *ABC* –que permite escribir textos– para explicar los pasos que siguieron y les enseñamos a guardar los archivos.

Como mencionamos anteriormente, los alumnos realizaron el trabajo con GGB “condicionado”, es decir, se les restringieron algunas herramientas de acuerdo con los objetivos de nuestra clase, para que, a partir de la resolución de la actividad propuesta, también pudieran explorar el programa.

Estas herramientas nos parecieron pertinentes, ya que fueron seleccionadas aquellas que les serían útiles para resolver las consignas; de este modo se evitaba el uso de otras que no tenían relación con el objeto geométrico a construir y se facilitaba la focalización en el objetivo propuesto (imagen 2).

2



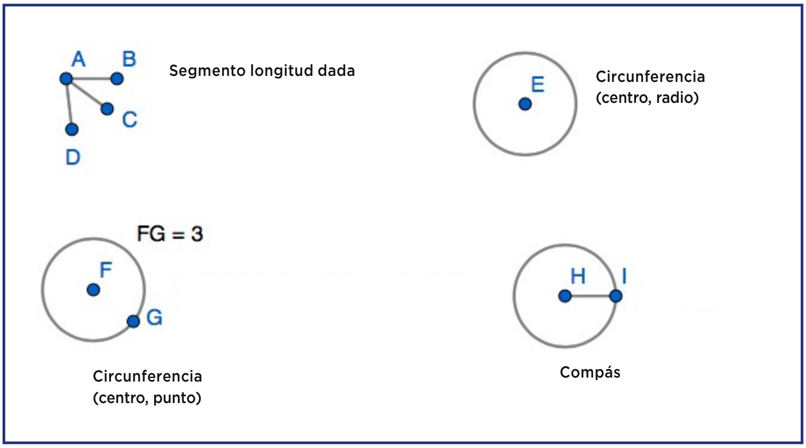
Para la actividad que propusimos habíamos anticipado que los alumnos podrían desplegar algunos de los siguientes procedimientos:

- Utilizar las herramientas *Circunferencia (centro, punto)* o *Compás* por exploración sin anticipar, en general, que están marcando todos los puntos que estén a 3 cm de A.
- Utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*, que los obligaba a anticipar que la distancia entre los puntos es la medida que el programa les solicita.
- Reconocer que la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* permite dibujar la circunferencia pero al mover el punto deja de conservar la distancia de 3 cm al punto A.
- Utilizar la herramienta *Compás* a ojo y, al igual que en el caso anterior, al mover algún punto deja de estar a 3 cm de A.
- Marcar puntos o segmentos libres, aproximando la medida solicitada o usando la herramienta *Distancia o longitud* hasta alcanzarla.
- Marcar segmentos desde el centro (punto A) con la medida solicitada usando la herramienta *Segmento de longitud dada*.

- Mover los segmentos trazados con longitud dada para poder separarlos e interpretar que el arrastre delimita una circunferencia.

Las anticipaciones que mostraban el funcionamiento de las herramientas seleccionadas para llevar a cabo los procedimientos eran las siguientes (imagen 3):

3



Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://ggbm.at/xvvnpqm4>.

INTERVENCIONES A TENER EN CUENTA PARA EL TRABAJO EN GEOGEBRA

Debido a que los alumnos utilizaban GGB por primera vez era importante tener en cuenta que harían preguntas sobre el uso del programa. Deberíamos responderlas teniendo cuidado de no "matar" el problema.

De presentarse procedimientos en que muevan puntos y/o segmentos del mismo tipo que los anticipados, decidimos que nuestra intervención sería relacionarlos con la consigna, ya que estos movimientos podrían provocar que los puntos o las construcciones realizadas no respondan a la medida de 3 cm, que era la distancia solicitada.

En caso de utilizar la herramienta *Segmento de longitud dada* y que muevan los puntos para separarlos rotando el segmento, les solicitaríamos que ubiquen otros puntos utilizando la misma herramienta. También podríamos preguntarles sobre el movimiento que marca la trayectoria del extremo del segmento que no es A, o si les daríamos alguna información que les sirviera para pensar en otras posibles herramientas. A su vez nos resultaba interesante preguntarles por qué eligieron esa herramienta, ya que esta podría permitir que los niños pusieran en relación sus anticipaciones con los conocimientos disponibles, debido a que, seguramente, en muchos casos la elección podría estar ligada a ciertas relaciones que establecen entre la herramienta y la circunferencia.

PUESTA EN COMÚN: ¿QUÉ DISCUTIMOS?

Seguimos a Quaranta y Wolman (2003) cuando plantean que las puestas en común no son momentos que tienen como única intención explicitar las producciones individuales frente a toda la clase. Por el contrario, son instancias privilegiadas para favorecer la generación y circulación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones, siendo necesario, además, buscar razones y argumentar, intentando defender la verdad o falsedad de cada explicación o decisión tomada.

Los momentos de discusión conforman una de las modalidades que adquiere la interacción entre pares en el aula: se trata de un intercambio entre todos los alumnos de la clase conducido por el docente, que debe ser organizado intencional y sistemáticamente por el maestro, a quien le corresponde un papel central e insustituible en su desarrollo. Corresponde al docente hacer que salgan a la luz –explicitar o hacer público–, hacer circular y, si es posible, analizar y someter a discusión por toda la clase las producciones de un alumno o un grupo de alumnos.

También corresponde al docente hacer que los conocimientos que se han construido inicialmente contextualizados en relación con algunos problemas puedan ser, en cierta medida en estas instancias de discusión, descontextualizados y generalizables. Las discusiones tienen un papel muy importante en este desprendimiento de los procedimientos y conocimientos de aquellas situaciones en las cuales surgieron (ibíd.).

En este sentido desconocíamos lo que sucedería al compartir lo realizado por los alumnos en GGB ya que, como hemos mencionado anteriormente, nuestro recorrido está más ligado al trabajo en lápiz y papel.

Pensando entonces en la puesta en común, también nos surgieron interrogantes con relación a cuáles serían nuestras intervenciones y si promoverían el análisis pertinente para la construcción del concepto abordado a raíz de los problemas y mediante el uso de GGB.

Más allá de las dudas, habíamos acordado ciertas cuestiones para la organización de la discusión colectiva, como ser: poner en relación diferencias y similitudes entre las diversas soluciones al problema que seleccionamos para discutir; proyectar con el cañón las producciones de los alumnos, con el fin de que pudieran recordar lo realizado y contarle a toda la clase los pasos de sus construcciones; fundamentar las decisiones que tomaron. Discutiríamos sobre lo que habilita o no la utilización de cada una de las herramientas utilizadas. Pensamos que esto permitiría avanzar en la identificación y explicitación de las nociones de circunferencia y radio.

ANALIZANDO LAS PRÁCTICAS

La indagación se desarrolló, como ya hemos mencionado, en dos clases de 80 minutos cada una. La primera se realizó en la sala de informática utilizando el programa GeoGebra en grupos de 4 niños. La segunda clase fue la puesta en común realizada en el aula.

Durante el desarrollo de la primera clase se les solicitó a los alumnos que guardaran todas sus producciones, ya que en la puesta en común serían proyectadas para su análisis. Cuando finalizaba la clase, hubo un corte de luz repentino por lo que no pudieron guardarlas. Frente a esta situación, decidimos reconstruir, en la puesta en común, las producciones de los alumnos con una netbook y proyectarlas con un cañón.

Ahora marco los puntos sobre el "círculo"

Puestas en el aula las actividades, uno de los grupos comenzó a trabajar en las dos primeras consignas solicitadas. Primero marcaron cuatro puntos a 3 cm de A utilizando la herramienta *Segmento*; desde allí aproximaron la medida utilizando la herramienta *Distancia o longitud,* para medir ese segmento y moverlo hasta que quedara uno de sus extremos a 3 cm de A, como se solicitaba.

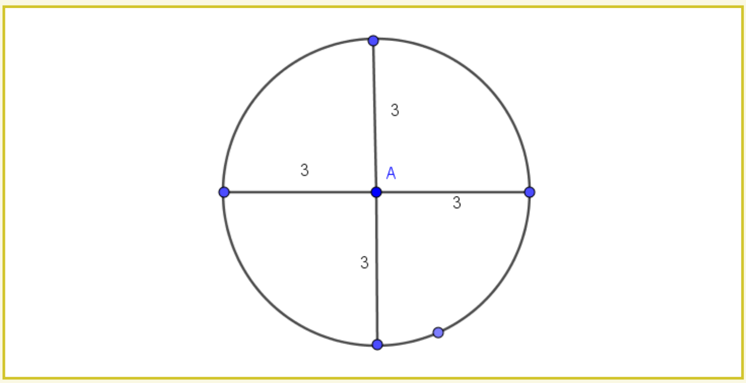
Luego, pasaron directamente a buscar la manera de marcar todos los puntos que estuvieran a 3 cm del punto A. Para esto no utilizaron la herramienta *Segmento*, ya que habían manifestado oralmente que iban a ser infinitos los puntos que se pudieran marcar. Entonces, frente a la intervención docente sobre la posibilidad de encontrar otra herramienta que les permitiera marcar todos esos puntos que habían identificado, decidieron utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto).* Se pararon en el punto A, ya que implícitamente lo reconocían como el centro, y deslizaron hasta los puntos ya marcados. Finalmente, marcaron varios puntos sobre la circunferencia (imagen 4).

En ese momento, se desarrolló el siguiente diálogo:

> D. ¿Me cuentan qué hicieron?
> A. Marcamos primero los cuatro segmentos a 3 cm de A y después, con esta herramienta (*indican con el dedo* Circunferencia (centro, punto) hicimos el círculo porque son infinitos los puntos que podemos encontrar.
> D. Buenísimo, y ¿qué ibas a hacer ahora?
> A. Marcar los puntos (*comienza a marcar puntos sobre la circunferencia*), porque tenemos que marcar los puntos.
> D. Pero ¿no están marcados ahí los puntos?
> A. ¿Cómo marcados?
> D. Vos me estás diciendo que tenés que marcar los puntos, ¿no es así?
> A. Hay infinita cantidad.
> D. ¿Entonces? ¿Por qué hay infinita cantidad?
> A. Porque puede ser uno acá, uno acá, uno acá (*marca con su dedo donde estarían ubicados los puntos*).
> D. ¿Y no están marcados ya?

A. Sí, pero yo me apoyo acá (*toca con la flecha el punto A y traza un segmento hasta “la circunferencia”*) y no me aparece que está a 3 cm.
D. Pero ¿no está marcado ya? ¿Para qué utilizan el segmento?
A. ¿Cómo están marcados?
D. Vos me decís que son infinitos los puntos, ¿por qué ya están marcados con esa herramienta? Pensemos juntos.
A. Porque hay un círculo.
D. ¿Entonces?
A. Porque ya sabés que son infinita cantidad, porque pueden entrar todos en este “círculo”.
D. Entonces, ¿qué me permitió esa herramienta que utilizaron? (*Haciendo referencia a Circunferencia (centro, punto)*).
A. Marcar todos los puntos que están a 3 cm de A.

4



La intervención de la docente fue para ayudar a que los niños pudieran identificar a la circunferencia como todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un centro, ya que ellos reconocieron que los puntos eran infinitos y que la circunferencia les ayudaba a encontrar el *lugar* donde debían marcarlos pero no podían visualizar que en la circunferencia se encuentran todos los puntos pedidos. Interpretamos que al solicitarles a los alumnos marcar puntos, hay un asunto conceptual que se está jugando en el fondo: la línea es una línea, los puntos son eso, puntos. Es decir, concebir una línea como una colección de puntos no es una relación inmediata ni mucho menos. Creemos que subyace allí la dificultad de diferenciar lo discreto (punto a punto) de lo continuo (colección infinita de puntos que conforman una línea).

Finalmente lograron identificar que la herramienta que utilizaron los ayudó a marcar todos los puntos, desechando la necesidad de marcar uno a uno. No podemos afirmar si fue que interpretaron cabalmente la idea, o bien cedieron ante nuestra intervención.

OTRO EPISODIO...

Un grupo distinto de alumnos había marcado varios de los puntos solicitados en las consignas a) y b) utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada*. Explicitaron que cuando seleccionaban la herramienta les aparecía un cuadro en el que debían poner la longitud 3 porque esta era la distancia de los puntos pedidos a A. Hicieron varios segmentos y preguntaron entonces "si de verdad se debían marcar todos los puntos ya que eran muchísimos". Con esta afirmación del alumno, tomamos como decisión pasar directamente a la consigna c) ya que evidenciábamos que los alumnos podían explicitar que existían muchísimos o, en algunos casos, infinitos puntos a marcar.

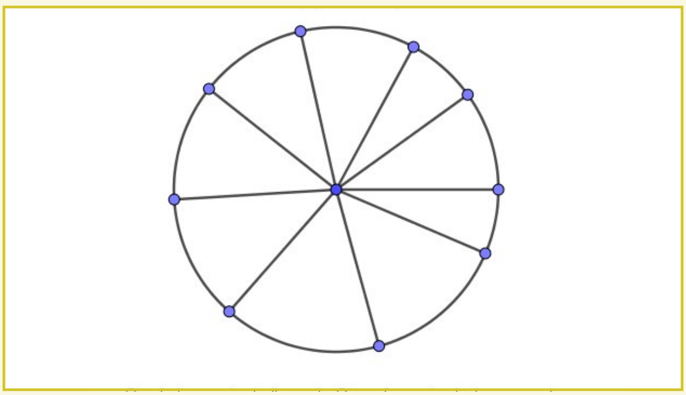
Luego de la explicación de la consigna c), se desarrolló el siguiente diálogo:

> D. Vamos a pensar el c). ¿Qué me pide hacer?
> A. Yo ya lo sé.
> D: ¿Qué pensás que hay que hacer?
> A. Para mí hay que hacer un "circulo" alrededor para juntar todos los puntos.
> D. ¿Cómo harías ese "círculo" con GeoGebra?
> A. Con este (*marca el ícono de* Circunferencia).
> D. Pero ¿qué herramientas me da? Toco la flechita.
> A. Así. (*Seleccionan la herramienta* Circunferencia (centro, punto), *marcan el centro en A y empiezan a arrastrar el mouse hasta los puntos que ya tenían marcados, pero no hacen clic en alguno de ellos*.) No se queda quieta.
> D. Tenés que hacer el clic en un punto para que se quede quieta. ¿Qué pasó ahí?
> A. Se juntaron todos los puntos.
> D. Se juntaron todos los puntos... ¿qué?
> A. Que medían 3 cm.
> D. ¿3 cm de quién?
> A. 3 cm de la A.
> D. Si yo aprieto acá (*se marca el ícono de* Circunferencia) me da tres opciones. ¿Cómo se llama la que eligieron?
> A. Circunferencia dado un centro y uno de sus puntos.
> D. ¿Y por qué habrá dado resultado con esa?
> A. Porque esta puede marcar a todos los puntos desde la A.
> D. Desde A hasta el punto que yo quiera. ¿Y en este caso cuánto tenía que medir?
> A. Mide 3 cm.
> D. Entonces, ¿qué es A de esa circunferencia que marcaron?
> A. El medio.

En este intercambio la docente dirigió su intervención a diversos asuntos. Por un lado, a la identificación de diferentes herramientas con las que cuenta el programa para dibujar circunferencias. Por otro lado, al uso de GGB, los modos de seleccionar un punto, de definir la circunferencia, etc. Y, en tercer lugar, al sentido que tenía usar una de esas herramientas y cómo eso permite poner en debate y elaborar argumentos que sostengan las ideas relacionadas con la noción de circunferencia: puntos que equidistan de uno dado (imagen 5). Así quedó registrado ese pasaje de la clase:

> Lo que hicimos para hacer el punto A y B fue lo siguiente...
> - buscar en las herramientas las que nos podían servir para hacer los segmentos.
> - encontramos una herramienta llamada *Segmento de longitud fija* y con eso pudimos hacerlo.
> - con la herramienta llamada *Circunferencia*, dados su centro y uno de sus puntos hicimos un círculo que unió a todos los puntos.

5



PUESTA EN COMÚN

Comenzamos la segunda clase retomando la actividad propuesta en la primera para introducir lo realizado por cada grupo. Se propuso que el grupo que se animara cuente lo que hizo. La docente fue construyendo en GGB el paso a paso que los alumnos relataban. Durante esta discusión colectiva recuperamos debates que habían tenido lugar dentro de cada grupo durante el proceso de resolución. Al finalizar la puesta en común dejamos plasmados en el pizarrón los conceptos discutidos:

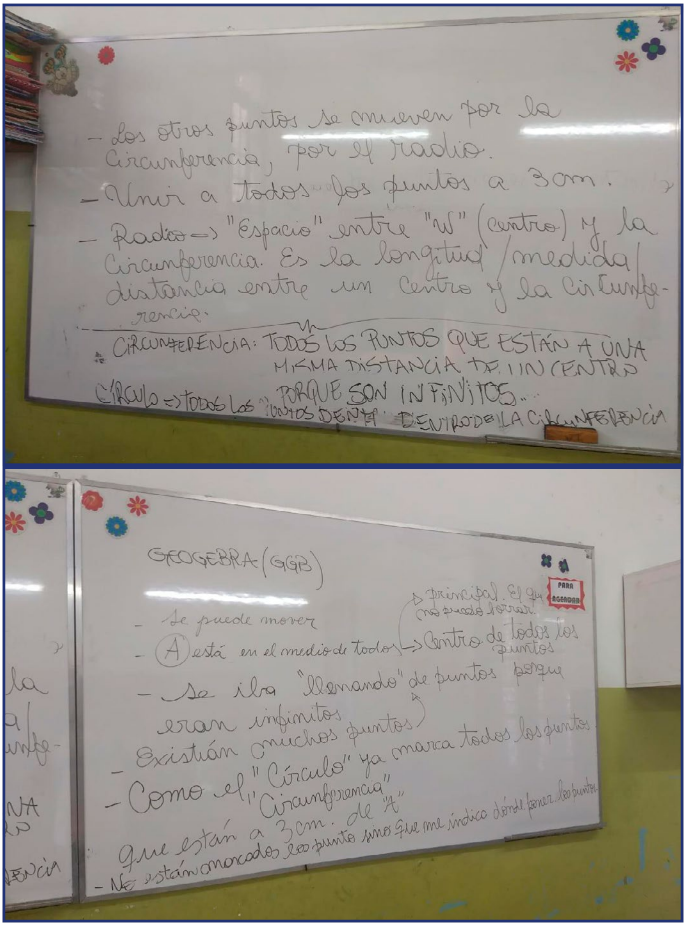
- Definición de circunferencia como aquella figura formada por todos los puntos que se encuentran a una misma distancia de otro punto llamado centro y que son infinitos. Se puede dibujar con las herramientas de GGB: *Circunferencia (centro, punto)*, *Circunferencia (centro, radio)* y *Compás*.

- Diferenciación entre circunferencia y círculo, identificando a este último como todos los puntos de la circunferencia y los de "adentro".
- Definición de radio como aquella distancia que separa al centro de cualquiera de los puntos marcados que forman la circunferencia. Los puntos se encuentran siempre a la misma distancia de un mismo centro.

En la puesta en común decidimos escribir en el pizarrón todas las ideas que los alumnos fueron compartiendo sobre las producciones realizadas. A partir de todo esto y desde nuestras intervenciones se conceptualizó lo anteriormente mencionado en el punteo (afiches 1 y 2).

A1

A2



Pizarrón con las conclusiones de la actividad tras la puesta en común.

Retomando lo discutido durante la puesta en común, creímos necesario tomar algunas decisiones de acuerdo a lo que habíamos visto, escuchado y analizado durante la primera clase. Los niños llamaron "círculo" a la circunferencia, por lo que nos pareció importante poder diferenciar una figura de la otra, ya que era probable que en la construcción de los conceptos se generara confusión.

A partir de las discusiones que nos iban permitiendo construir los conceptos de circunferencia y de radio, los niños seguían llamando “círculo” a la circunferencia.

Cuando definen radio lo describen como la distancia (longitud) entre el centro y la circunferencia y como el “espacio entre el punto A y la circunferencia”.

Esta definición de radio (espacio entre el punto A y la circunferencia) nos permitió intervenir para poner en discusión el concepto de círculo. En este momento diferenciamos una figura de otra y definimos al radio como la distancia entre el centro y la circunferencia, y les preguntamos qué sería entonces el “espacio” entre ambos. Allí, tímidamente, surgió el concepto de círculo.

Les preguntamos por qué les parece que ellos llamaron círculo a la circunferencia y pudieron explicitar que era porque ellos conocían la figura geométrica que se llama círculo, conocimiento que tenían disponible.

En la siguiente clase, la docente entregó una fotocopia de conclusiones para la carpeta (espacio donde se vuelcan las conceptualizaciones del aula) con lo que había quedado escrito en el pizarrón. Dicha fotocopia fue confeccionada por las docentes, ya que priorizamos que el tiempo áulico fuera de trabajo matemático y construcción colectiva y no de copiado en la carpeta. El objetivo de la misma fue su reutilización en las futuras actividades en las que se siguieron trabajando los conceptos de círculo y circunferencia.

CONCLUSIONES

Luego de realizar los análisis, no solo de lo producido en las clases por parte de los alumnos sino también de nuestro trabajo docente, pudimos reconocer que el movimiento que permite GGB y la visibilización de sus herramientas fueron facilitadores de la producción, realización y comienzo de la construcción del concepto de circunferencia. Fue muy interesante que este movimiento no resultó un conflicto para los niños; para ellos fue un facilitador, un “no tener que hacer otra vez si nos equivocamos”, y les otorgó pistas para próximas decisiones, como por ejemplo en el uso de la herramienta *Segmento de longitud dada*.

Reconocemos que nuestras intervenciones estuvieron teñidas de nuestras experiencias en lápiz y papel ya que en varias oportunidades, con respecto a marcar todos los puntos, utilizamos el mismo tipo de intervención. También reconocemos que fue necesario estar muy atentas a la interpretación que los niños daban al uso de las herramientas para poder intervenir de manera pertinente y no “matar” el problema. En este sentido hay un juego delicado entre las intervenciones similares a las que hacemos cuando trabajamos con lápiz y papel y las que emergieron utilizando GGB, pero con la preocupación de dotar de sentido al uso de las herramientas que provee el programa. Es decir que los alumnos hagan un uso reflexivo de las mismas, que se vayan asociando las herramientas seleccionadas con las relaciones geométricas que se tratan, de manera que avancen en los procesos de conceptualización. Ese sigue siendo nuestro desafío.

Por esta experiencia desarrollada, consideramos que es importante continuar con un trabajo sistemático con el programa, siempre y cuando las propuestas no sean hacer lo mismo que con el lápiz y el papel. Así podremos seguir nutriendo nuestras prácticas de experiencias que nos permitan anticipar posibles soluciones por parte de los niños y de esta manera ampliar las intervenciones necesarias para introducir, construir y profundizar conceptos geométricos.

Animarnos es el desafío para aprender y mejorar nuestras prácticas.

CAPÍTULO 6

Y... ¿si empezamos sin lápiz y papel? Relato sobre la iniciación en el trabajo geométrico con GeoGebra

Jesica Bragadini, Paola Castro y Alejandra Rodríguez

La geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas, cuyo papel en el aprendizaje de la geometría no es necesario destacar.
Colette Laborde (1997: 33)

GEOMETRÍA, UN CAMINO APENAS INICIADO

En la experiencia desarrollada y que compartimos a continuación, nos propusimos indagar en torno al inicio del trabajo geométrico en nuestras aulas con un grupo de 14 alumnos y alumnas de un 4º grado del Colegio Instituto Madre Admirable, del barrio de Retiro, perteneciente a la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Nos interesaba, en particular, analizar qué diferencias y similitudes se encuentran en el inicio del trabajo geométrico al introducir las nociones de circunferencia, radio y centro por un lado con GeoGebra (GGB) y por el otro con lápiz y papel. Esta inquietud surgió luego de recordar nuestras experiencias trabajando con diferentes grupos en 4º grado con la secuencia "Círculo y circunferencia" del *Documento de trabajo n° 5* (Sadovsky *et al*., 1998). Teniendo en cuenta la potencialidad de dicha propuesta y reconociéndola como un insumo propicio para lograr la intencionalidad didáctica de que los alumnos y alumnas se aproximen a las nociones de circunferencia, círculo, radio, diámetro y centro, nos preguntamos, entonces, si adaptar alguna de aquellas secuencias para el trabajo con GGB les permitiría también (y de qué manera) relacionarse con estas mismas nociones. En este caso, los alumnos no habían tenido contacto previo ni con el uso del compás, ni con el programa GeoGebra.

Por otra parte, había una característica muy particular del grupo en cuanto a la ausencia de trabajo geométrico de todo tipo a lo largo de su trayectoria escolar, lo que nos invitó a pensar en utilizar la misma secuencia –con adecuaciones que permitieran el ingreso del programa GeoGebra–, dividiendo al grupo en dos. Un subgrupo trabajaría con lápiz y papel, y el otro con el programa. Esta división no tuvo como fin hacer luego una comparación de los objetivos alcanzados con cada una de las propuestas, sino que pensamos que nos permitiría analizar el tipo de conceptualizaciones alcanzadas por los alumnos y alumnas y en qué medida estas se relacionan con el uso del programa GeoGebra o con no haber tenido un trabajo geométrico previo.

Para desarrollar esta actividad organizamos la clase en dos grupos de 6 y 7 alumnos que trabajaron en espacios diferentes (uno en el aula de matemática y otro en la sala de informática); a su vez, la secuencia se implementó, dentro de cada equipo, en pequeños grupos de 2 o 3 chicos. La división se hizo posible ya que éramos 4 docentes, por lo que estaríamos 2 en cada grupo, permitiéndonos no solo estar de modo más cercano a los procedimientos que desarrollaran los chicos y chicas, sino también poder realizar intervenciones específicas en cada caso. Además, contar con la pizarra digital en el aula de informática nos permitiría tener un espacio colectivo de intercambios de estrategias, saberes disponibles, procedimientos, etcétera.

Pensamos también que era necesario que todos tuvieran a disposición lápiz, papel, compás, regla, escuadra y transportador. Por un lado, porque son los elementos que permitirían medir, copiar, trasladar medidas, dibujar figuras, etc., y por otro, porque aunque quienes iban a usar GGB no lo supieran, esas serían algunas de las acciones que realizarían a través del programa. Quizás dichos instrumentos de geometría permitirían a este mismo grupo anticipar las acciones a llevar a cabo con el programa. Estaban disponibles por si necesitaban probar con lápiz y papel antes de utilizar GGB y durante el trabajo con el programa, es decir, por ejemplo, midiendo sobre la pantalla.

Sin embargo, poner los instrumentos a disposición de los alumnos fue una discusión que se dio en el grupo intentando preservar la coherencia, ya que podría interpretarse como brindarles más herramientas a los que estuvieran con las computadoras.

GEOMETRÍA A PARTIR DEL JUEGO

Apoyándonos en ciertos conocimientos que suponíamos que los alumnos tendrían disponibles –por ejemplo el reconocimiento de algunas figuras geométricas como cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo–, y conociendo que no tenían manejo de los elementos geométricos ni de medición, decidimos comenzar el trabajo de la primera clase con un juego propuesto en un libro de texto,[1] para ser jugado por ambos grupos.

1. *Los matemáticos de 4º*, de Claudia Broitman, Horacio Itzcovich y Andrea Novembre, Buenos Aires, Santillana, 2016, p. 47.

JUEGO

Los estudiantes comenzarán con un juego con pelotitas de papel, durante el cual deberán arrojar cinco pelotitas a la vez, de a dos por turno, desde una altura aproximada de 15 cm respecto de una hoja que contiene una cruz. Todas las pelotitas que caigan a menos de 2 cm de la cruz suman 10 puntos, las que caigan a más de 2 cm y hasta 5 cm, suman 5 puntos y las que queden a más de 8 cm no suman puntos.[2]

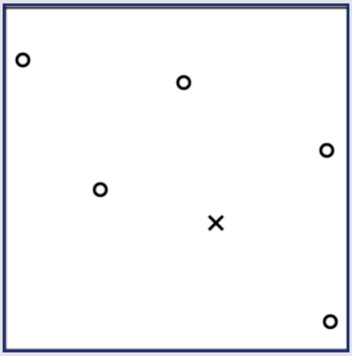
El juego propuesto permite plantear una primera discusión en torno a la noción de distancia de la cruz a un punto cualquiera, recurriendo a la regla, y progresivamente arribar a la idea de que es factible que haya más de un punto ubicado a la misma distancia de esa cruz (varias pelotitas en relación con la cruz).

Grupo de trabajo con lápiz y papel

Al finalizar el juego se le entregó el tablero de la imagen 1 al grupo que trabajó con lápiz y papel, invitándolos a responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se puede hacer para saber qué pelotitas están a 5 cm sin estar midiendo en cada caso?
b) ¿Es posible que dos pelotitas estén a 5 cm de la marca cada una y estén en lugares distintos?
c) ¿Habrá más pelotitas que estén a 5 cm de la marca?
d) Marcá todos los lugares donde pueden estar ubicadas.

1



El dibujo del tablero que aquí se incluye es un esquema y no respeta las medidas del que utilizaron los estudiantes para jugar.

2. Para un análisis sobre las estrategias llevadas a cabo por los alumnos de otro grupo con este juego, véase capítulo 2, "Recorriendo un nuevo camino junto a la geometría".

La propuesta de análisis del juego por medio de preguntas que los inviten a buscar más de un punto que esté a una distancia determinada de otro, para luego encontrar muchos puntos que estén a la misma distancia del centro, apunta a una primera aproximación a la noción de circunferencia.

Anticipábamos que algunos alumnos realizarían procedimientos de resolución utilizando la regla, marcando algunos puntos posibles a 5 cm de la cruz. A su vez, sospechábamos que la interacción con sus compañeros les permitiría enriquecer el campo de posibles puntos.

En el caso de que los niños "se conformaran" con los pocos puntos trazados, la docente los invitaría a buscar otros posibles.

Intuíamos, por otro lado, que en la medida en que los alumnos no reconocieran la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro, no habría razones para esperar que se dieran cuenta inmediatamente de que el compás era un instrumento para resolver el problema. Casi todos los niños iniciarían el proceso de exploración con la regla.

Pensamos también que, tal vez, algunos niños marcarían muchos puntos y luego podrían darse cuenta de que se empezaba a formar una circunferencia. Posiblemente entonces abandonarían la búsqueda de puntos con la regla para usar el compás. Era esperable que no todos los niños encontraran "todos" los puntos y consideraran terminar la búsqueda con "muchos".

Luego de esas intervenciones, teníamos como intención arribar a una definición provisoria de circunferencia, por ejemplo: "Todos los puntos que están a 5 cm de la cruz forman una circunferencia".

Después del trabajo de resolución por parte de los alumnos, habíamos planificado instalar algunas preguntas, por ejemplo: "¿Habrá algún instrumento de los que tienen en la mesa que nos permita marcarlos a todos?" La intención de esta intervención buscaría un análisis sobre "todos" los puntos. De allí que se les solicitaría también que intenten marcar "más y más" puntos que cumplan esa condición.

Grupo de trabajo con GeoGebra

Por otra parte, al grupo que luego trabajaría con GGB, al finalizar el juego se le presentó el programa y se le dio cinco minutos aproximadamente para que realizara una exploración. Esta decisión se tomó con base en la necesidad de que los alumnos y alumnas pudieran vincularse con algunas herramientas de dicho programa, ensayar para qué podría servir cada una de ellas, cómo seleccionarlas para usarlas, y realizar luego algunas construcciones libres.

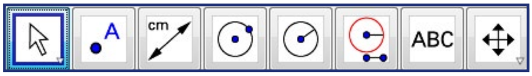
Para que pudieran concentrarse en las herramientas que luego nos iban a servir para el trabajo abordado se ocultaron algunas,[3] dejando disponibles las

3. Como pudimos ir viendo a lo largo del libro, esta variable didáctica fue tomada por los seis grupos que se conformaron en el Seminario.

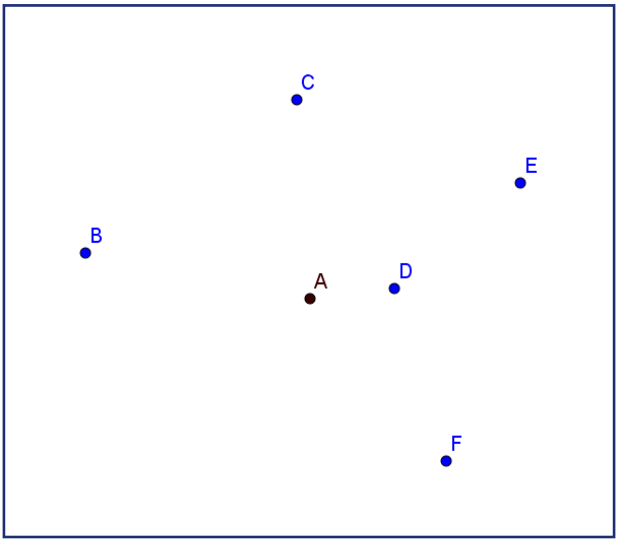
relacionadas con el trazo de circunferencias, segmentos, rectas, entre otras (imagen 2).

Luego se les facilitó un archivo donde solamente había marcado un punto negro y varios de color azul en la pantalla (imagen 3).

2



3



Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/cwgvcm4z>.

Luego se les propuso realizar un análisis a partir de las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se puede hacer para saber qué puntos están a 5 unidades de distancia del punto negro, sin estar midiendo en cada caso?
b) ¿Es posible que dos puntos estén a 5 unidades cada uno y estén en lugares distintos?
c) ¿Habrá más puntos que estén a 5 unidades de distancia del punto dado?
d) Marcá todos los puntos que estén a 5 unidades del punto original.

Una vez concluido el análisis del juego y respondidas las preguntas, habíamos previsto instalar otras como “¿pudieron marcar todos los puntos?” o “¿es posible marcar todos los puntos con alguna herramienta?”, con la intención de orientar la búsqueda de “todos” los puntos que estén a 5 unidades e identificar cuáles de las herramientas de GGB les permitirían marcar “todos” esos puntos.

Anticipábamos que era probable que los estudiantes realizaran algunos procedimientos como trazar segmentos de 5 unidades de GGB, desde el punto ubicado en el archivo dado, y luego los movieran hasta que quedaran ubicados en diferentes lugares. Otros podrían ubicar puntos a ojo y luego, con la herramienta *Distancia o longitud*, medir para moverlos y acomodarlos a 5 unidades. Después de una intervención de la docente a través de la cual se invite a la búsqueda exhaustiva de puntos que estén a la misma distancia de ese punto dado, podría ocurrir que algunos de los niños traten de unir esos puntos usando la herramienta *Polígono* y que de esa manera puedan pensar que alguna de las herramientas de circunferencia les permita hallar todos esos puntos.

GEOMETRÍA A PARTIR DE GEOGEBRA

Tal como fue comentado en la introducción de este texto, la decisión de realizar la secuencia utilizada para trabajar los conceptos de circunferencia, radio y centro, por un lado con lápiz y papel y por el otro con el programa GeoGebra, tuvo como objetivo indagar sobre el potencial de la secuencia a utilizar con alumnos y alumnas que no habían realizado ningún trabajo geométrico previo, más que comparar las conceptualizaciones alcanzadas por los diferentes grupos. Por tal motivo solo analizaremos las clases en las que fue utilizado el programa GeoGebra.

Analizaremos la clase 1 como punto de partida para las conceptualizaciones alcanzadas por los niños y niñas, y luego la clase número 2, donde se realizó una actividad de copiado de figuras, en la cual fue fundamental la puesta en juego de las relaciones entre los conceptos a los que se aproximaron en la primera clase.

Primera clase

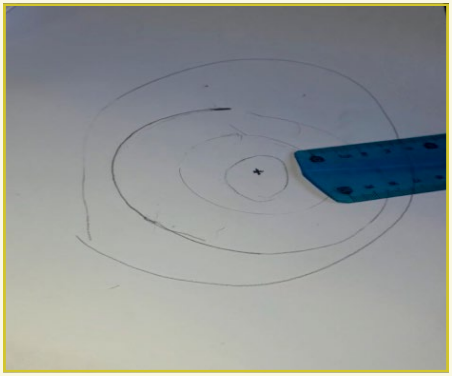
La clase comenzó con una extensa explicación de la consigna del juego propuesto. En la misma se intentó que se comprendiera el objetivo del juego. Los chicos y chicas comenzaron a jugar y enseguida surgieron situaciones interesantes.

En el grupo 1, Valentín (imagen 4) propuso hacer los círculos alrededor del centro marcado en el tablero entregado, argumentando que sería más fácil calcular el puntaje y lo comparó con su experiencia en juegos del estilo del tiro al blanco.

En el grupo 2, luego de jugar varias veces y calcular la puntuación correspondiente a cada partida, Pilar y Bianca comenzaron a colocar todas las pelotitas de papel (imagen 5), una al lado de la otra, para simular un tiro donde todos los papelitos sumaran el mismo puntaje.

Se decidió no hacer un intercambio colectivo ni una discusión de las estrategias utilizadas por cada uno de los grupos. Se priorizó utilizar la instancia de juego como una primera invitación a pensar en las relaciones sin explicitar el

4



5

asunto de las distancias entre puntos, más precisamente, entre un punto dado y otros puntos.

A continuación se invitó a los alumnos y alumnas a explorar el programa GeoGebra durante cinco minutos. Como muchos de los chicos y chicas de esta generación, no tuvieron inconvenientes con el uso de las herramientas y tampoco mostraron dificultades para probar el trazado de diferentes figuras.

La barra de herramientas no se les presentó en su totalidad, algunas fueron ocultas –como ya hemos mencionado–. Probablemente, por la restricción que se realizó en la barra de herramientas, la mayoría de los grupos, en el contexto de esa exploración, trazó circunferencias de manera intuitiva (quizás porque el ícono que acompaña a la herramienta da pistas de qué trazará en la pantalla).

Luego de la etapa de exploración, cada grupo accedió al archivo GGB mencionado, donde solo aparecía un punto fijo y algunos puntos azules. En esta actividad, los chicos y chicas debían ubicar los puntos a 5 unidades –la distinción entre unidades GeoGebra y centímetros fue compartida en el aula–.

Al presentar la actividad se realizó la comparación del tablero del juego con el archivo que entonces, cada grupo, podía ver en las pantallas de los dispositivos. Los chicos y chicas, a partir de las intervenciones a modo de preguntas que realizaba la docente, pudieron relacionar la cruz dibujada en el tablero del juego en papel con el punto que se encontraba en el archivo. Del mismo modo, vincularon los puntos que tenían que dibujar con las pelotitas de papel. Se leyeron las preguntas de análisis de la actividad que cada grupo debía contestar y luego comenzaron a trabajar en esta segunda actividad.

PASO A PASO CON GEOGEBRA

A continuación realizaremos una breve descripción de los procedimientos de cada uno de los grupos, así como también reflexiones que los ayudaron a llegar a una primera aproximación a las conceptualizaciones esperadas.

Grupo 1: Valentín, Sofía y Luciana

Recordamos que este grupo utilizó los círculos como recurso para el juego propuesto en la primera parte de la clase, basándose en los tableros de tiro al blanco que ya habían utilizado con otras intencionalidades didácticas. Creemos que esto les permitió, frente a la segunda actividad propuesta para ser realizada con el programa GeoGebra, utilizar como primer procedimiento el trazado de las circunferencias con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y luego medir la distancia que había entre esos dos puntos con la herramienta *Distancia o longitud*. Cuando tuvieron que encontrar “todos” los puntos que estuvieran a 5 unidades de distancia del centro, los comenzaron a marcar sobre la circunferencia que tenía 5 unidades de radio (imagen 6).

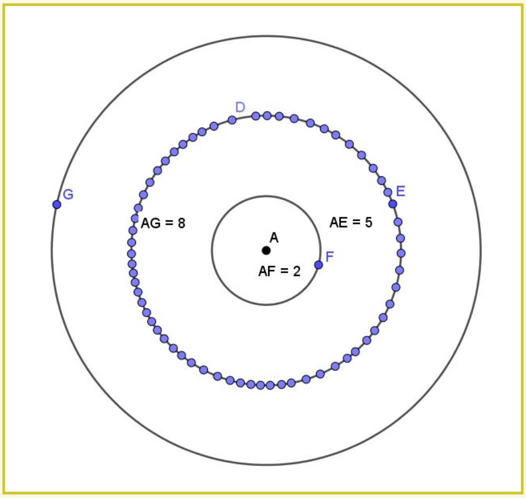
Grupo 2: Pilar y Bianca

Las alumnas de este grupo comenzaron midiendo con una regla la distancia de los puntos azules al negro. Se les sugirió que pensaran qué otras herramientas podrían usar para medir. Respondieron que el pulgar o un lápiz. Se les demostró que aunque se midiera con la regla, al acercar o alejar el gráfico en la pantalla, cambiaba la medida. También se hizo con ellas un recuento sobre las herramientas del programa y cuáles permiten medir. Recordaron que en la exploración habían encontrado una herramienta llamada *Distancia o longitud* que permitía medir. Utilizaron dicha herramienta para medir la distancia entre los puntos solicitados. Luego insertaron un punto I, y con la herramienta *Distancia* lo ubicaron a 5 unidades del punto A y repitieron este paso tres veces, cuidando de que los puntos quedaran cerca unos de otros. Cuando se les preguntó por qué los habían ubicado en esa posición, inmediatamente lo relacionaron con el juego. Ellas habían inferido que si intentaban “hacer puntería” se iba a ir formando un “redondo” con las pelotitas de papel.

A partir de esta idea trazaron una circunferencia con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* que “tocara” los puntos que ellas habían agregado. Cuando se les preguntó por qué no estaban todos los puntos sobre la línea (de la circunferencia), explicaron que solo los que medían 5 unidades iban allí. Los otros iban a medir más, o menos.

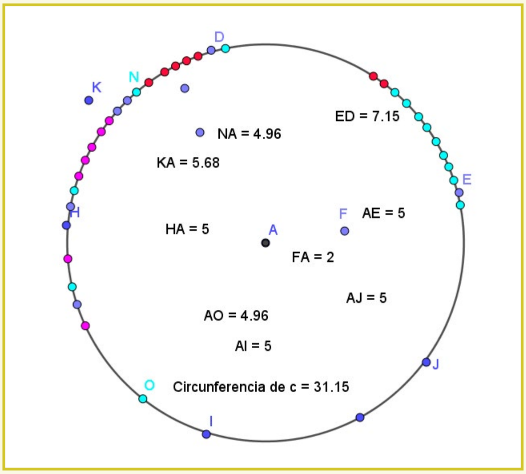
Frente a la pregunta “¿cuántos puntos se podrían colocar sobre la línea?”, insertaron 30 puntos más (imagen 7) y luego se quejaron aludiendo “podían estar hasta mañana porque entraban muchos puntos”.

6



Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/pt4dbrwy>.

7



Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/chqfpu34>.

Grupo 3: Maximiliano y Morena

Este grupo comenzó midiendo con regla la distancia entre los puntos solicitados, en la pantalla, pero por la cercanía de la ubicación en el aula escuchó todas las orientaciones de la docente al grupo 2 y utilizaron para su producción finalmente la herramienta *Circunferencia (centro, punto).*

CONCLUSIONES COLECTIVAS

Después de que los alumnos y alumnas concluyeran con la actividad, se propuso un espacio de intercambio colectivo. Cada uno de los grupos contó su procedimiento. Y luego se discutieron las preguntas propuestas para realizar el análisis de la actividad.

Valentín y Luciana (integrantes del grupo 1) dijeron que se “dieron cuenta que podían hacer una circunferencia en lugar de medir cada uno de los puntos”. Frente a la pregunta de la docente sobre por qué creían eso, ellos contestaron que ya se habían dado cuenta durante el juego (primera actividad de la clase), que “era igual que en el tiro al blanco”.

Pilar (integrante del grupo 2) comentó que “con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* se podían medir todos los puntos que estaban a la misma distancia, o sea que iban a medir 5 cm desde el punto medio”.

La docente preguntó dónde iban a estar entonces todos esos puntos que estaban a 5 unidades de distancia del centro: ¿dentro del círculo?, ¿afuera del círculo?[4] A lo que la mayoría de los chicos y chicas contestaron que estarían en el “borde”.

Si bien lograron acordar que todos esos puntos pertenecerían a la circunferencia, tuvieron que marcarlos sobre la misma como si todavía necesitasen que estuvieran presentes en el dibujo, sin terminar de identificar que la circunferencia contiene a todos. Por otro lado, si bien usaron *Circunferencia (centro, punto)*, dibujaron y trasladaron el punto para que tenga radio de 5, decidimos permitir que pudieran agrandar o achicar la circunferencia, aunque cambiara el radio, ya que en todos los casos volvieron a ajustarlo a la distancia entre puntos pedida en la consigna. El movimiento no fue un asunto a tratar en ese momento,[5] porque considerábamos que se necesitaba avanzar más para seguir esa discusión.

También se conversó sobre la cantidad de puntos que cada grupo había dibujado y sobre la posibilidad de agregar más cantidad. Los chicos afirmaron que se podían “agregar muchos más”. Morena (integrante del grupo 3) declaró

4. El uso de la palabra “círculo” intenta preservar las expresiones de los alumnos en esta instancia del trabajo.

5. Para analizar con mayor profundidad esta cuestión, véase capítulo 1, “Pensar GeoGebra como variable didáctica”.

que podían "ser infinitos porque no se podían contar". Si el punto era chiquito podían entrar más puntos. La docente recordó que todos esos puntos formaban "un círculo" e hizo hincapié sobre el nombre de la herramienta que permitió unir esos puntos. Cuando todos acordaron que era *circunferencia*, se corrigió la denominación y se definió que ese era el nombre correcto y el que se debía usar a partir de ese momento.

Segunda clase

Para la segunda clase decidimos que los alumnos de cada grupo realicen una copia de circunferencias concéntricas en las que no estaba dibujado su centro (figura 1 de la secuencia "Círculo y circunferencia" del *Documento de trabajo nº 5*), a partir de considerar que "copiar una figura puede ser una manera de empezar a pensarla en términos de los elementos que la constituyen y de las relaciones que hay entre ellos" (*Documento de trabajo nº 5*: 19), pero además confrontar con "los aspectos perceptivos del dibujo que pueden entorpecer, o por el contrario, favorecer la lectura geométrica" (Laborde, 1997: 35). Buscamos que los alumnos empiecen a transponer el nivel perceptivo e identifiquen algunas relaciones que caracterizan estas circunferencias concéntricas.

La ausencia del centro en el dibujo tuvo que ver, por un lado, con utilizar la figura original propuesta en el *Documento de trabajo nº 5*; por otro, con que los alumnos y alumnas identifiquen la necesidad de fijar un punto que les permita, luego, el copiado por medio del cálculo de la distancia entre ese punto y cualquiera de los otros de la circunferencia. En el caso del grupo que trabajó con lápiz y papel, se buscó generar la necesidad de conocer dónde pinchar el compás. En cuanto al grupo que trabajó con el programa GeoGebra, la necesidad de partir de un punto (centro) para poder trazar la circunferencia.

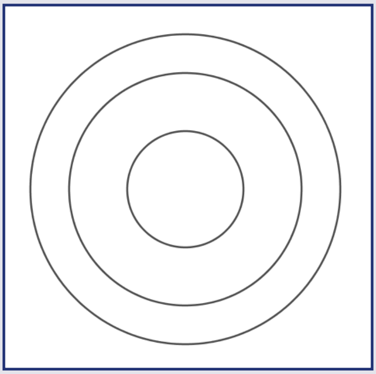
Sabíamos de la complejidad que involucra esta tarea. En lápiz y papel apostábamos a que los alumnos apelen al plegado (en dos semicircunferencias), identificando el diámetro (aunque no utilicen ese nombre) y al punto medio del mismo como centro de las tres circunferencias concéntricas. En cambio, nos resultaba una incógnita el modo en que enfrentarían el problema quienes trabajaran con GGB. Anticipábamos que les resultaría complejo ya que, para hallar el centro de un circunferencia dada se requiere de las mediatrices, objeto aún no abordado con los alumnos. Pero nuestra expectativa se centraba en el debate en torno a la noción de radio como determinante del "tamaño" de cada circunferencia.

ACTIVIDADES

Con lápiz y papel

El enunciado de la actividad de copiado fue el siguiente:

Dibujá una figura que tenga la misma forma y el mismo tamaño que la figura que se muestra a continuación, y otra que tenga la misma forma pero que sea más grande.[6]



Con esta segunda actividad esperábamos que los alumnos reconocieran que se trataba de tres circunferencias que coinciden en su punto centro pero cuyo radio varía, por lo que sería posible que los estudiantes produjeran el copiado, comenzando por la circunferencia mayor y otros por la menor, sin importar en un principio el centro de la figura original y aproximando a ojo el tamaño de las circunferencias. También podría ocurrir que tomaran "el diámetro" como la abertura del compás y lograran realizar una figura más grande o que buscaran por aproximación el centro.

Se planificó discutir, en un espacio de análisis colectivo, en qué lugar se podría pinchar el compás y con qué abertura. Al ser una actividad exploratoria no consideramos que fuera necesario utilizar lenguaje geométrico.

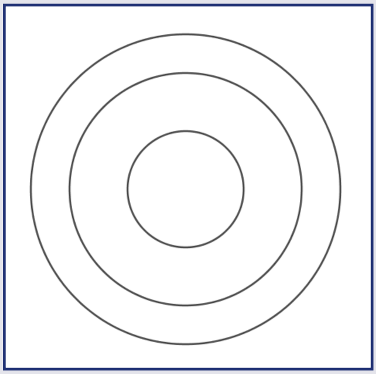
Con GeoGebra

A los alumnos que iban a trabajar con GGB les presentamos la actividad del siguiente modo:

Copiá en la *Vista Gráfica 2* la figura que se muestra a continuación, de manera que tenga la misma forma y el tamaño lo más parecido posible.[7]

6. Problema extraído del *Documento de trabajo nº 5*, p. 59.

7. GeoGebra permite trabajar con dos "pantallas": la de la izquierda tenía el modelo a copiar y la de la derecha estaba en blanco. Para ver esta cuestión, acceder al archivo de GGB de la actividad.



Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/gpkg249g>.

Pensamos que sería posible que los estudiantes empezaran a utilizar las siguientes herramientas para la construcción: *Circunferencia (centro, punto), Circunferencia (centro, radio)* o *Compás*. En este caso tampoco esperábamos que consideraran el centro de la figura original sino que hicieran circunferencias y que modificaran su tamaño hasta lograr que fueran lo más parecidas posible a las dadas en el archivo.

Otra cuestión que pensamos que podría suceder es que, utilizando cualquiera de las tres herramientas mencionadas, hicieran las circunferencias en cualquier lugar de la pantalla y luego trataran de ubicarlas de manera que quedasen de forma concéntrica.

También tuvimos en cuenta la posibilidad de que la ausencia del centro marcado en las circunferencias originales presentara alguna dificultad. Pero nos pareció importante que esa dificultad generara la necesidad de que los chicos encontraran recursos diferentes a partir de los cuales se podría llegar a trazar la circunferencia.

Insistimos, no esperábamos que el copiado se apoyara en todas las relaciones necesarias, solo nos interesaba identificar cómo los alumnos trataban con la noción de radio de la circunferencia.

ENVIÓN GEOGEBRA

Analizaremos lo sucedido en el grupo de trabajo con GGB, por la riqueza y diversidad de procedimientos. Además del potencial que encontramos en el programa para este tipo de actividades de copia,[8] coincidimos con Laborde

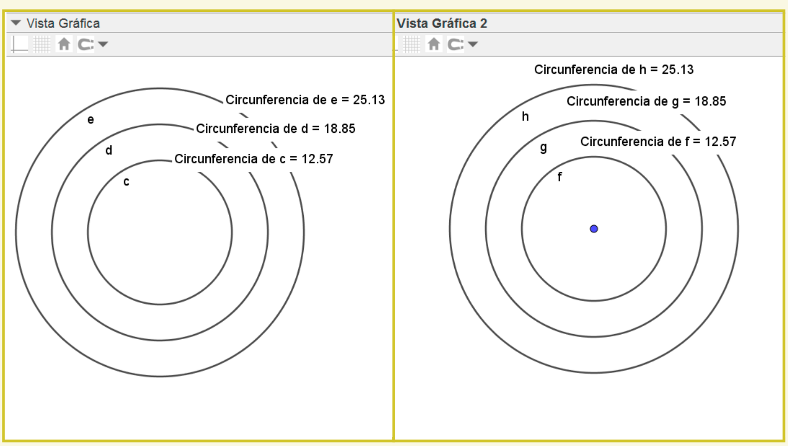
8. Para analizar más en profundidad el asunto de la copia en GGB, véase Murúa e Itzcovich (2018).

(1997: 39) en que “el campo de experimentación ofrecido por el dibujo en los dibujos con lápiz y papel está limitado por razones materiales (imprecisión del trazado, imposibilidad de hacer temporalmente invisible una parte del dibujo, limitación del número de elementos que hay que gestionar). Cabri-geómetra[9] amplía el campo de experimentación posible”.

Grupo 1: Valentín, Sofía y Luciana

Este grupo concluyó el copiado de la figura en muy poco tiempo, apenas se terminó de analizar con los alumnos la consigna (imagen 8). Al preguntarles cómo habían logrado esa copia exacta tan rápidamente, argumentaron que usaron la herramienta *Compás*. La docente preguntó cómo la utilizaron, pidiendo que amplíen la explicación de su procedimiento. Entonces Valentín contó que el día anterior, durante la exploración del programa, había trazado una circunferencia con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*. Luego eligió la herramienta *Compás* y al tocar la primera circunferencia, quedó copiada otra idéntica. Sofía amplió la argumentación diciendo que, entonces, ya sabían lo que tenían que hacer.

Este modo de resolución, aprovechando que la herramienta *Compás* también permite copiar una circunferencia sin necesidad de recurrir a ninguna otra herramienta, nosotros no la habíamos identificado; en cierta medida, nos jugó en contra del uso del radio.



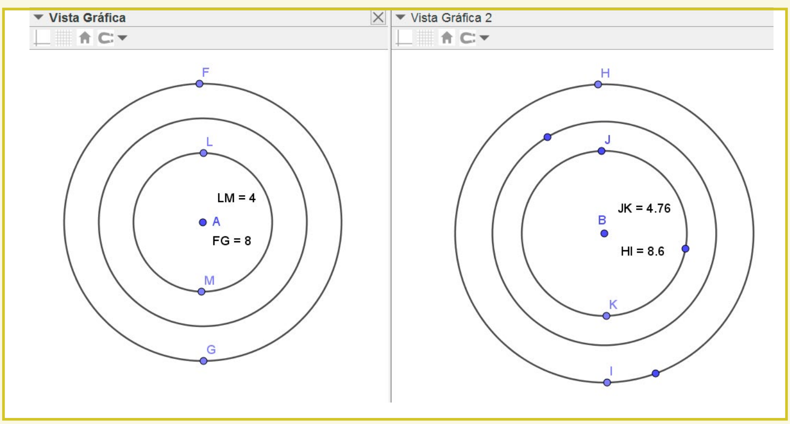
8 Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/swpeftby>.

9. Laborde utiliza otro programa, el Cabri-geómetra, con características similares a GeoGebra.

Al mismo tiempo, este grupo "midió" la circunferencia recurriendo a la herramienta *Distancia o longitud*, herramienta que les permitió corroborar que las circunferencias eran iguales, aunque no sabían que los números que arroja se refieren a la longitud de las mismas y no a su radio. Nuestra sorpresa fue tan grande frente a este despliegue, que incluso no supimos cómo maniobrar.

Grupo 2: Pilar y Bianca

En esta actividad, las chicas trazaron tres circunferencias con *Circunferencia (centro, punto)* similares al modelo original (imagen 9). La docente les preguntó cómo estaban seguras de que esa era la medida correcta. Después de alejar y acercar la imagen varias veces, una de ellas propuso medir cada circunferencia "de lado a lado". Marcaron un punto a cada "lado" de la circunferencia más grande de la figura original, aproximadamente alineados con el centro, midieron la distancia entre esos puntos con la herramienta *Distancia* y luego repitieron ese mismo procedimiento en su copia. Podemos imaginar en este procedimiento una idea que permitiría poner en debate la noción de diámetro, aunque no ha sido tratada. Como se puede ver en la siguiente imagen, su copia no era "exacta", más allá de que hay errores de medición, ya que al medir por ejemplo la distancia entre J y K no estaban tomando un diámetro porque los puntos los ubicaron a ojo.



9

Captura del archivo de GGB.

Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/b5fbt2fy>.

Acceder al video de la actividad en youtube <https://youtu.be/hYzABL_-RAM>.

Cuando las alumnas explicaron que utilizaron *Circunferencia* (*centro, punto)* para trazar las circunferencias, la docente indagó sobre la importancia de tener ese punto (el centro) en cuenta. Ellas respondieron "porque era donde se pinchaba el compás", luego lo relacionaron con el juego del día anterior, en el que ese punto era la referencia para medir la distancia entre el centro y un punto de la circunferencia. Acordaron llamarlo "centro".

Grupo 3: Maximiliano y Morena

Estos alumnos comenzaron utilizando la herramienta *Distancia o longitud*. Tocaron un punto sobre la circunferencia y el programa arrojó la medida de la longitud de la misma. Repitieron este paso en las tres circunferencias del dibujo original, pero luego borraron todo para que no quedaran las medidas en cada circunferencia, ya que sostenían que las originales no las tenían. A continuación trazaron las tres circunferencias concéntricas comenzando por la de mayor medida con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*.

A simple vista se pudo ver que eran muy similares al original, pero los chicos decidieron deshacerlo. Cuando se les preguntó por qué lo borraron, explicaron que el original no tenía los puntos del centro ni en los bordes tal como les quedaron en su dibujo. La docente les explicó que los puntos podían estar presentes, entonces ellos los volvieron a dibujar.

Finalizado este paso, midieron la longitud de las circunferencias con la herramienta *Distancia o longitud* (obteniendo en este caso también la longitud de la circunferencia como en el grupo 1), y fueron moviendo las circunferencias de la copia hasta conseguir que midan lo mismo que la original (imagen 10). Si bien creemos que no tenían noción de qué representaba ese número en cada circunferencia, este dato les sirvió como referencia para tratar de que les coincidieran esos valores del original con la copia.

9

Captura del archivo de GGB.
Acceder al archivo <https://www.geogebra.org/m/m7xqhava>.
Acceder al video de la actividad en youtube <https://youtu.be/Ryp48ay0dZ4>.

Finalizada la actividad, se propuso a los alumnos que, con su grupo de trabajo, mostraran en la pizarra digital cómo habían resuelto la consigna.

Los alumnos del grupo 2 mostraron el procedimiento que eligieron y explicaron que midieron la distancia. La docente les pidió que explicaran qué distancia habían medido y ellos comentaron que creían que era la distancia desde una punta a otra de la circunferencia. Nos resultó interesante esta apuesta de los alumnos que rondaba la idea de diámetro. Entonces, nos pareció una buena oportunidad para hacer referencia a la noción de radio y diámetro.

Los grupos 1 y 3 utilizaron la herramienta *Distancia* haciendo clic sobre las circunferencias. En estos casos, al dar GGB sus longitudes, decidimos no avanzar sobre esta cuestión porque era una magnitud que no estábamos en condiciones de tratar.

Por otro lado, Valentín rápidamente señaló que una herramienta para trazar circunferencia se llamaba *Circunferencia (centro, radio).* Tomando este aporte, se les indicó a todos que probaran utilizar esta herramienta para relacionarla con lo que se estaba hablando, teniendo en cuenta diferentes medidas de radio. Se fue insistiendo con la utilización de los nombres correctos: centro, radio y circunferencia. Se hizo un recuento de las distintas herramientas utilizadas por cada uno de los tres grupos que les permitieron dibujar una circunferencia: *centro radio*, *centro punto* y *compás*.

Creemos que los integrantes del primer grupo, al usar el compás, no reconocieron que lo que estaban trasladando era el radio. Sin embargo, el trabajo exploratorio de las herramientas les permitió acceder a una copia a través de dicha opción.

Resultó muy interesante que fueran tres grupos de trabajo y que la herramienta elegida para trabajar no fuera siempre la misma: *Circunferencia (centro, punto)* y *Compás*. Esto enriqueció mucho más el espacio de intercambio y facilitó la discusión sobre cuáles eran las herramientas que nos permitían trazar o copiar circunferencias y cuáles eran los elementos que debíamos tener en cuenta para usar cada una de ellas.

CONCLUSIONES

No podemos dejar de resaltar el potencial que encontramos en el programa GeoGebra, lo que nos lleva a pensar en que es mucho más que un recurso didáctico.

Al iniciar nuestro trabajo teníamos muchas dudas sobre cómo podrían responder los alumnos y alumnas a la incorporación del uso del programa, a lo que se agregaba, además, que debían construir nociones geométricas no trabajadas anteriormente. Esto no solo era una verdadera incertidumbre para este equipo de trabajo sino también un interrogante que invitaba a intentarlo. Pero, para nuestro asombro, no solo los chicos y chicas mostraron una gran facilidad al incorporar el manejo del GGB, sino que además resultó un medio potente para poner en debate conceptos desconocidos por ellos.

En las anticipaciones de posibles dificultades jugó un papel importante nuestra experiencia con el lápiz y el papel como alumnas y como docentes. Por un lado, porque todas recordábamos cómo habíamos iniciado nuestro aprendizaje geométrico con esos instrumentos; por otro lado, nos resultaba muy complejo anticipar procedimientos de los niños mientras usaran el GGB dada nuestra escasa experiencia de su empleo en las aulas.

Quizás el apoyo visual de los íconos de las herramientas, así como también la aparición de los nombres de esos objetos, figuras o elementos permitieron que los niños y niñas identificaran algunas relaciones o pudieran tratarlas con mayor naturalidad.

Por otra parte, en nuestra experiencia como docentes, muchas veces trabajamos estos contenidos (circunferencia, centro y radio) con lápiz y papel. Y podemos decir que en esta oportunidad, trabajando con GGB, no pasamos por la dificultad que tienen los alumnos y alumnas cuando, además de lograr aproximarse a los conceptos y relaciones que se ponen en juego, tienen que enfrentarse a la apropiación del funcionamiento de un instrumento geométrico como el compás.

Si bien aparece un nuevo elemento que es el programa, posiblemente debido a la familiaridad que hoy tienen los niños y niñas con las nuevas tecnologías, ellos invierten menos energía en el uso de las herramientas geométricas que provee el GGB si se lo compara con el uso del compás, que exige un tiempo y aprendizaje técnico. El clic en la pantalla permite a los chicos y chicas dar un salto en esa dificultad, acercándolos a lo geométrico específicamente. La exploración y el uso de una herramienta no pasa por aprender a usarla, sino por establecer relaciones que permitan identificar qué conocimientos geométricos se deben tener en cuenta para la construcción a partir de ella. Y eso también orientaba nuestras intervenciones. Porque, como dice Colette Laborde (1997: 44), "se trata de hacer y no de hacer [solo] un dibujo; los alumnos tienen que comunicar un procedimiento de trazado al dispositivo y no hacer el trazado por sí mismos. El dispositivo obliga a la distinción entre trazado y procedimiento de trazado".

Debemos destacar también, en función de esta experiencia, la posibilidad o conveniencia de que las circunferencias concéntricas que se proponen para la tarea de copiado con el GGB sean presentadas a los alumnos con el centro dibujado. Creemos que esta decisión permitiría a los niños tener un control mayor de las mediciones que realicen y de las herramientas que seleccionen, y sospechamos que los posicionaría en un lugar más confortable para elaborar explicaciones sobre las decisiones que tomaron.

Por otro lado, en el trabajo puntual con circunferencias, la variedad de herramientas para el trazado de dicha figura contribuyó a la discusión y a la comparación del uso de cada una de ellas, pudiendo hacer hincapié en las relaciones entre los elementos que entran en juego. Nos llamó la atención la necesidad de los alumnos de ubicar puntos en la circunferencia ya trazada, sin identificar que el trazo ya incluye los puntos. Una vez más la complejidad de relación entre el dibujo y sus propiedades estuvo presente. Reconocer que una circunferencia contiene “todos” los puntos que están a 5 unidades de uno dado es un asunto conceptual que, en esta experiencia, no resuelve la tecnología.

No podemos dejar de destacar el compromiso de los niños y niñas en el uso del programa y las computadoras, que generaron en ellos una buena predisposición para enfrentarse a un problema o quehacer geométrico.

GeoGebra nos abre una posibilidad de poner en práctica una geometría dinámica. Queda en nosotros animarnos.

Entonces... ¿empezamos sin lápiz y papel?

Bibliografía

Acosta Gempeler, Martín Eduardo

2005 "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", en *Educación Matemática*, vol. 17, nº 3, México, Grupo Santillana México, pp. 121-140.

Arcavi, Abraham y Hadas, Nurit

2003 "El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque" ["Computer Mediated Learning: An Example of an Approach", 2000], traducción libre de María Fernanda Mejía y Edinsson Fernández, documento de trabajo del Grupo EM&NT, Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle, Colombia. Disponible en: <https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf>

Brousseau, Guy

1988 "Los diferentes roles del maestro", en Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós Educador [conferencia pronunciada en la UQAM, 21 de enero de 1988, Canadá; traducción del francés de María Emilia Quaranta, reproducido con autorización del autor].

1995 "Glossaire de didactique des mathématiques", en íd. *et al.*, *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*, Burdeos, Copirelem, IREM d'Aquitaine.

Itzcovich, Horacio

2005 *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Laborde, Colette

1997 "Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría", en Puig, Luis (ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/672/2/Puig1997Investigar.pdf>

Murúa, Rodolfo e Itzcovich, Horacio

2018 "GeoGebra: 'nuevas' preguntas sobre 'viejas' tareas", en *Yupana*, nº 16, Universidad del Litoral, pp. 71-85. Disponible en: <https://tinyurl.com/2thvkryn>

Panizza, Mabel
2003 “Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática”, en íd. (comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós.

Parzysz, Bernard
1998 «“Knowing” vs “Seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures», en E*ducational Studies in Mathematics*, nº 19, pp. 79-92.

Perfetti, Verónica *et al.*
2018 “Los niños comienzan el trabajo con el GeoGebra. Relato de una experiencia”, en Mombello, Laura (coord.), *Una mirada sobre la propia práctica. La reflexividad en la docencia desde las experiencias de la Unipe*, Buenos Aires, UNIPE Editorial Universitaria, pp. 133-140. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/investigaciones/una-mirada-sobre-la-propia-pr%C3%A1ctica-detail>

Quaranta, M. Emilia y Wolman, Susana
2003 “Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute”, en Panizza, Mabel (comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós.

Sadovsky, Patricia *et al.*
1998 *Matemática. Documento de trabajo nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*, Actualización curricular, Educación General Básica, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Disponible en: <https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/ep_ac_mate_doc5.pdf>

Sobre las autoras y los autores

MARÍA EUGENIA ARCE es profesora de Nivel Primario y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como maestra de grado en escuelas públicas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. También ha trabajado como docente en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) y como capacitadora del Instituto Nacional de Formación Docente(INFoD).

MARÍA JULIA BENITES es licenciada en Didáctica de Matemática para Nivel Primario, recibida en la UNIPE. Actualmente se desempeña como inspectora de Enseñanza en Nivel Inicial del distrito de Luján, Provincia de Buenos Aires. En ese mismo distrito, forma parte –como coordinadora de narrativas pedagógicas– de un trabajo articulado con la Licenciatura en Educación de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

JESICA BRAGADINI es profesora de Enseñanza Primaria y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Primaria. Actualmente se desempeña como capacitadora docente del área de matemática en la Escuela de Maestros y coordina un proyecto de inclusión digital en Vicaría Educación.

LIDIA MABEL BULLÓN es profesora de Nivel Primario de Educación General Básica de Primer y Segundo Ciclo (Escuela Normal Superior N° 7 José María Torres). Además es especialista superior en Educación de Adolescentes y Adultos en el Nivel Primario (Instituto Privado de la Unión Docentes Argentinos) y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como maestra secretaria y coordinadora de sexto grado en una escuela de jornada completa del Distrito Escolar N° 7.

RICARDO VITO CAFICI es profesor de Enseñanza Preescolar (ISPEI Sara C. de Eccleston), profesor de Enseñanza Primaria (ESN N° 10) y licenciado en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Primaria (UNIPE). Cuenta con una carrera de veintidós años y participó como capacitador del proyecto LUA (Legajo Único de Alumnos) del gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Actualmente se desempeña como profesor titular de primaria en la Escuela N°9 DE2 Genaro Berón de Astrada. En ella se realizaron los trabajos de indagación correspondientes a su carrera de grado.

LUCIANA CASTELLARIN es profesora para la Enseñanza Primaria (Escuela Normal Superior N° 4), licenciada en Educación (Universidad

Nacional de San Martín) y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesora del campo de las prácticas en la Escuela Normal Superior N° 5. También forma parte del equipo de capacitación del área de Matemática en el Nivel Inicial en la Escuela de Maestros y es vicedirectora de una escuela primaria en el Gran Buenos Aires.

PAOLA CASTRO es profesora de Educación Primaria y actualmente se desempeña como profesora de escuelas públicas en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Cuenta con especializaciones docentes de nivel superior en Literatura Infantil y Juvenil (Summa) y en Políticas de Infancia (UTE). Además, se encuentra finalizando la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Primaria (UNIPE).

FLORENCIA CORREAS es profesora de Enseñanza Primaria (ENS N° 2), especialista superior en Enseñanza de la Matemática para el Nivel Primario (CePA) y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Trabaja como asistente técnica del Programa de Reorganización de las Trayectorias Escolares para niños con sobreedad en el nivel primario (Programa Aceleración) y como tutora virtual en el curso dictado por el Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD), "Enseñar en escenarios diversos (área matemática-nivel primario): la organización de los contenidos de cara a un futuro escolar en alternancia".

DANIELA DI MARCO es profesora para la Enseñanza Primaria (IES Juan B. Justo), especialista superior en Enseñanza de la Matemática para el Nivel Primario (CePA) y licenciada en Enseñanza de la Matemática para el Nivel Primario (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesora de matemática en la educación inicial (ENS N° 6) y en el Seminario de Matemática (Instituto Nuestra Señora de Las Nieves). Forma parte de los equipos de matemática de primaria dela Escuela de Maestros y del Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Además es profesora en el área de matemática en el curso de ingreso de la Universidad Nacional de José C. Paz y dicta cursos en el INFoD desde 2015.

NICOLÁS DINGIANNA es profesor de Enseñanza Primaria egresado del ENS Nº 10 y estudiante de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesor de cuarto grado en un colegio privado del Gran Buenos Aires. Es coautor de *Matetubers* (Tinta Fresca, 2020) y del libro de cuentos infantiles *El camino de los siete colores*, publicado ese mismo año.

ANDREA FAVARO es maestra de Educación Básica (Normal N° 6), especialista en la Enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas para los 3 ciclos de EGB (CePA, actual Escuela de Maestros) y diplomada en Gestión Educativa

(Flacso). Se desempeña como docente de primaria y forma parte del Equipo de Matemática de la Escuela de Maestros. Ha elaborado los cuadernillos de matemática (primaria adultos) de la Orientación y Preparación de Exámenes Libres (OPEL) y se ha desempeñado en las áreas de Currícula y Evaluación del Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

SANDRA PATRICIA GARCÍA es profesora de Nivel Primario-Educación General Básica de Primer y Segundo Ciclo, y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesora de matemática de séptimo grado en la Escuela N° 9 DE2 Genaro Berón de Astrada.

HORACIO ITZCOVICH es profesor de Enseñanza Media y Superior (UBA), especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática (Unsam) y doctorando en Ciencias de la Educación (Facultad de Filosofía y Letras, UBA). Coordina la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para Educación Primaria en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integra el equipo de investigación "Producción de conocimientos geométricos y didácticos por parte de maestros que participan de un seminario de enseñanza de la geometría en el que se incluye el uso del GeoGebra (UNIPE)". Es coautor de diseños curriculares y de materiales de apoyo curricular en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y en la Provincia de Buenos Aires, así como de artículos y libros para la formación de docentes y de textos para alumnos en el área de Matemática.

LAURA MARAFIOTI es profesora de nivel primario y licenciada en Enseñanza de la Lectura y Escritura en el Nivel Primario (UNIPE). Además tiene un máster en Investigación de la Lengua y la Literatura (Universidad de Barcelona). Actualmente se desempeña como docente en los niveles primario y superior, y como tutora en cursos del INFoD. Si bien se dedica principalmente a pensar las prácticas de lectura y escritura, disfruta también de los espacios de reflexión sobre la didáctica de la matemática, motivo por el cual se involucró en la presente propuesta.

RODOLFO MURÚA es profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA) y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE y en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). También forma parte del equipo de secundaria del Ministerio de Educación Nacional. Sus investigaciones se focalizan en la enseñanza de la geometría y las funciones mediante la utilización del programa GeoGebra.

ANTONELLA PAOLINI es profesora del Nivel Primario desde el año 2010, egresada del Normal Superior N° 4 Estanislao Severo Zeballos. Desde entonces, se desempeña como maestra de grado en escuelas públicas de la

Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Actualmente trabaja como titular en la Escuela N° 17 Gaspar Lucilo Benavento del Distrito Escolar 19, ubicada en Villa Soldati.

MARÍA FLORENCIA PENNINI es profesora de Educación Primaria (ENS N° 1 Pte. Roque Sáenz Peña) y licenciada en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como docente en escuelas del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. También ha trabajado como tutora en cursos correspondientes al área de matemática del Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD).

ALEJANDRA RODRÍGUEZ es profesora de Enseñanza Primaria. Actualmente se desempeña como maestra de grado en la Escuela Primaria N° 4 DE20 Félix de Olazábal. A partir de la práctica en el aula, su investigación se focalizó en la enseñanza de la geometría mediante la utilización del programa GeoGebra.

CATALINA ROSENDE SCORDAMAGLIA es profesora de nivel primario (Instituto Superior María Auxiliadora). Está cursando la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para Nivel Primario en la UNIPE. Actualmente se desempeña en el área de matemáticas en séptimo grado en el Colegio San Francisco de Sales (Ciudad Autónoma de Buenos Aires).

VIOLETA ROSENDE SCORDAMAGLIA es profesora de nivel primario (IES N° 2 Mariano Acosta) y diplomada en Educación Sexual Integral (Flacso). Es estudiante de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para Nivel Primario (UNIPE). Actualmente se desempeña en el área de matemáticas en sexto y séptimo grado. También está cursando el postítulo Especialización Docente de Nivel Superior en Educación Sexual Integral (ISP Joaquín V. González)

MARCOS SABAN es profesor de Educación Primaria (ENS N° 1 Pte. Roque Sáenz Peña) y licenciado en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como docente en escuelas del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. También ha trabajado como tutor en cursos correspondientes al área de matemática del INFoD.

u: unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Este libro, escrito por un grupo de maestras y maestros, plantea una pregunta para otros colegas que se desempeñan en los primeros grados del segundo ciclo de la educación primaria. ¿Es posible incorporar un programa informático como GeoGebra a la enseñanza de ese nivel o se trata de un recurso a reservar para los últimos grados o, incluso, para la escuela secundaria? A partir de ese interrogante, se analizan experiencias de aula que permiten entender las potencialidades del uso del programa bajo cierta intencionalidad docente.

Los capítulos presentados aquí son producciones de docentes-estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la UNIPE. Estas consistieron en planificar, realizar y analizar experiencias de trabajo geométrico con GeoGebra. Más allá de describir lo que ocurrió en las aulas, el libro indaga en las diferencias respecto al trabajo con lápiz y papel, en el rol que ocupa el movimiento en este programa informático y –sobre todo– en las relaciones geométricas que chicas y chicos construyeron durante este proceso. Confiamos en que será un aporte valioso para maestros y maestras que desean incursionar en otros modos de “hacer” geometría.

ISBN 978-987-3805-71-4

editorial.unipe.edu.ar