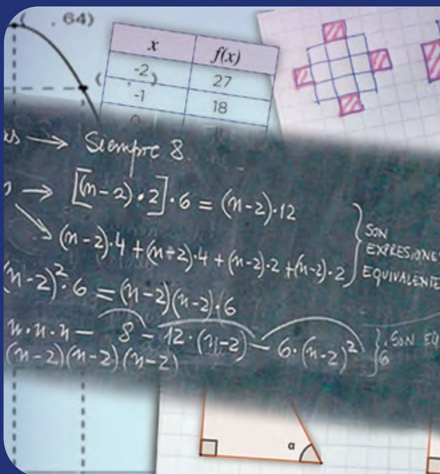


ENTRE DOCENTES II

Matemática para el aula de ciclo orientado de secundaria

Mónica Agrasar y
Graciela Chemello
(editoras de contenidos)

unipe
editorial
universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

>>

Entre docentes II

Entre docentes II

Matemática para el aula de ciclo orientado de secundaria

Mónica Agrasar y Graciela Chemello
(editoras de contenidos)

Marina Andrés
Carolina Benito
Valeria Borsani
María Teresa Coronel
Betina Duarte
Patricia Duarte Lezcano
Claudia Kerlakian
Cecilia Lamela
Federico Maciejowski
Marcela Menichelli
Carmen Sessa
Sandra Tettamanti

unipe
editorial
universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Entre docentes II: Matemática para el aula de ciclo orientado de secundaria / Marina Andrés... [et al.]; coordinación general de Mónica Agrasar; Graciela Chemello - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria, 2023.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática; 6)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-78-3

1. Formación Docente. 2. Formación de Formadores. 3. Matemática.
I. Andrés, Marina. II. Agrasar, Mónica, coord. III. Chemello, Graciela, coord.

CDD 510.712

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
Entre docentes II. Matemática para el aula de ciclo orientado de secundaria

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, junio de 2023

ISBN 978-987-3805-78-3

Índice

Introducción

Mónica Agrasar, Graciela Chemello y Carmen Sessa

Tal como lo señalábamos en *Entre docentes I*, el anterior volumen de esta serie, las propuestas que se presentan aquí recuperan experiencias de trabajo compartido entre los profesores formadores y los profesores estudiantes de la carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).

Esta experiencia de escritura compartida, novedosa y muy enriquecedora tanto para estudiantes como para docentes, permitió recuperar las discusiones mantenidas en los seminarios de la carrera a la hora de diseñar propuestas de enseñanza. De manera complementaria, dichas propuestas y experiencias de aula se tomaron como objeto de estudio en la especialización.

Las temáticas abordadas incluyen una propuesta por cada bloque de contenidos incluido en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP). El objetivo fue mostrar algunos ejemplos de cómo es posible construir, a partir de un trabajo colectivo, propuestas que apunten a hacer vivir a los alumnos un trabajo matemático genuino.

Relatar cada experiencia les permitió a los integrantes de los grupos volver a pensar en ellas para su difusión, tomando en cuenta que conocer experiencias realizadas por otros colegas permite advertir las posibilidades y límites de algunas decisiones de enseñanza y, a su vez, tener insumos para diseñar nuevas propuestas adecuadas a distintos grupos de alumnos y alumnas con saberes y dinámicas propias.

Además de las consignas para los alumnos, en cada capítulo se desarrollan comentarios acerca de las intenciones didácticas que se tuvieron en cuenta al diseñar las actividades, anticipaciones sobre posibles estrategias de los alumnos y algunas alternativas para la gestión docente en el aula.

Las formas que encontró cada grupo para comunicar su trabajo dan cuenta de distintos recorridos y reflexiones. En algunos casos, las propuestas se llevaron al aula. Por lo tanto, contamos con registros de esas experiencias y producciones de los alumnos que muestran el modo en que las actividades planificadas tomaron un rumbo particular y dieron lugar a nuevas decisiones o nuevas preguntas.

En conjunto, las propuestas retoman los propósitos generales especificados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para la Formación General del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria y sostienen como propósito de enseñanza la tarea de involucrar a los estudiantes en una actividad de producción de conocimientos que les resulten significativos. Así, la construcción del sentido de los conocimientos por parte de los alumnos, en la que se basa esta propuesta para el aula de secundario, supone una enseñanza que promueva los siguientes NAP:

- La producción, reinversión e integración de nuevos conocimientos mediante la resolución de problemas y la reflexión sobre lo realizado, y el reconocimiento de que existen distintos caminos para resolver un problema, como así también que los problemas pueden tener solución única, más de una solución, aun infinitas, y que algunos problemas no tienen solución.
- La interpretación de algunas formas de pruebas características de esta disciplina, tales como la referida al rol del contraejemplo para probar la invalidez de una afirmación y la demostración por el absurdo.
- La producción e interpretación de conjeturas, admitiendo que es posible acudir a ejemplos o a dibujos para elaborarlas, pero que no es suficiente para validarlas.
- La validación de conjeturas y afirmaciones de carácter general mediante propiedades matemáticas, acercándose así a las demostraciones.

- La generalización de procedimientos, resultados o relaciones mediante el establecimiento de regularidades o la transferencia de propiedades de una situación a otra, analizando el campo de validez.
- La justificación de decisiones al abordar situaciones de certeza o de incertidumbre, recurriendo a nociones matemáticas adecuadas (Ministerio de Educación, 2012: 13-14).

Esta caracterización de las situaciones de enseñanza que se explicita en los NAP supone una perspectiva desde la cual se busca que las alumnas y los alumnos logren acceder en la escuela a una práctica matemática genuina. Esto requiere que puedan compenetrarse en el estudio de una problemática específica, precisar las condiciones particulares y generales que dicho estudio involucra, generar conjeturas, utilizar e identificar técnicas y nociones teóricas con las que se puede abordar el problema, formular conclusiones, validarlas y explorar el campo de validez de las mismas, ampliando así la mirada sobre el problema y generando nuevas preguntas.

Como docentes, sabemos del cuidado que debemos tener al seleccionar los temas de discusión dentro del aula y al orientar los intercambios entre estudiantes de modo que sean ellos los protagonistas de la tarea. El objetivo es que piensen por sí mismos, tomen decisiones y busquen cómo expresar con sus palabras lo que hacen y los resultados que obtienen. Responsabilizarnos por el aprendizaje de nuestros alumnos exige no solo proponer problemas, sino también moderar los intercambios de ideas, promover la enunciación de argumentaciones, saber escuchar y reorientar en caso de necesidad, promover reflexiones sobre procedimientos, impulsar la generación de instancias de escritura y validación.

Nuestra palabra aparecerá, de modo oportuno, para aclarar lo que sea indispensable para continuar la tarea, para ordenar y sistematizar las conclusiones, para avanzar en formulaciones cada vez más generales, identificando la teoría y las técnicas que puedan ser utilizadas en nuevos problemas.

El conjunto de decisiones que tomamos determina si la clase es un espacio abierto y colaborativo de búsqueda compartida de nuevos conocimientos o si, más bien, se trata de una obligación que hay que atravesar viendo cómo algunos hacen mientras otros miran sin participar ni entender. Cabe aclarar que esta actitud, que supone una toma de posición de cada docente, no es estrictamente individual sino que requiere de un proyecto y de condiciones institucionales. Un trabajo de esta naturaleza lleva tiempo. Necesita de acuerdos entre profesores que permitan sostener y acompañar trayectorias orientadas a formar sujetos autónomos, convencidos de su capacidad para estudiar matemática, y no a repetir un conjunto de definiciones y técnicas.

Las propuestas que compartimos muestran experiencias que, orientadas desde la perspectiva que sostenemos, entran en diálogo con las prácticas cotidianas y muestran desarrollos posibles para algunos temas.

El primer capítulo es "Función cuadrática: entre lo funcional y lo algebraico", escrito por Valeria Borsani, Marcela Menichelli y Sandra Tettamanti. Allí se aborda de manera simultánea la enseñanza de la función cuadrática y la de la ecuación de segundo grado, buscando otorgar sentido tanto a la operatoria algebraica como al trabajo en torno a las representaciones de las funciones cuadráticas.

En la primera parte del trabajo, el foco está en el vínculo entre la expresión canónica de la fórmula y su gráfico, identificando la información que aporta cada representación. Se parte de una situación contextualizada, que permite explorar una variación con un comportamiento no uniforme, para luego avanzar en el análisis de distintas expresiones y elaborar una primera caracterización de una función cuadrática y de los elementos asociados de su gráfico. En la segunda parte del capítulo, si bien también se incluyen gráficos, las tareas se centran en la comparación de fórmulas equivalentes que, no obstante, permiten leer distinta información. Esto allana el camino, a su vez, a un trabajo sobre las fórmulas para identificar, por ejemplo, puntos que tienen la misma imagen.

El capítulo 2, "Razones trigonométricas: un estudio de las razones entre lados de triángulos rectángulos", lo escriben Carolina Benito, Cecilia Lamela y Federico Maciejowski. Su propuesta apela a la noción de proporcionalidad entre segmentos que son lados de triángulos rectángulos para ir avanzando en las nociones de coseno y seno de un ángulo y en el uso de tablas de valores para distintos ángulos.

En la primera parte, se presentan problemas en el contexto de una instalación turística de tirolesas, buscando formas de comparar sus inclinaciones (es decir, ángulos en triángulos rectángulos). Luego, en la segunda parte, se avanza a la definición de coseno, investigando cómo conocer el valor de los ángulos de un triángulo rectángulo a partir de los lados y usando una versión sencilla de las tablas trigonométricas como recurso. Por último, en la tercera parte, se propone avanzar en la definición de otra razón trigonométrica, el seno, estableciendo la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios.

Estos problemas fueron diseñados para que los estudiantes inicien el trabajo de manera exploratoria, con diferentes ensayos, y vayan avanzando hacia respuestas que serán debatidas con el conjunto de la clase. La tarea de exploración está pensada como forma de generar en los y las estudiantes un trabajo en el que acepten el desafío intelectual de elaborar criterios para validar su propio trabajo. Al considerar la gestión de la clase, este capítulo da relevancia a un momento en que el docente, cuando lo considera oportuno, convoca explícitamente a elaborar conclusiones apoyadas en el trabajo realizado: dicha cuestión aparece en la sección "Elaborar teoría con los estudiantes"

Las autoras del tercer capítulo, "Expresiones polinómicas: producción de fórmulas para contar", son Marina Andrés, María Teresa Coronel, Claudia Kerlakian y Carmen Sessa. El eje de su propuesta es hacer presente en el aula la actividad de modelización y la potencia del álgebra como lenguaje de lo general. El capítulo tiene dos partes y en ambas se trata de producir fórmulas para contar (es decir, expresiones algebraicas generales). En un caso, el objetivo es determinar la cantidad total de cuadraditos en una figura en función de la cantidad de cuadraditos de la base; en el otro, saber la cantidad de cubitos en un cubo grande en función de su arista. En los dos casos se llega a expresiones diversas que, como "cuentan lo mismo", resultan fórmulas equivalentes sobre las cuales se puede operar para transformarlas según lo que se pide. Así, el trabajo algebraico adquiere un sentido en el contexto.

La explicitación de las decisiones tomadas (por ejemplo, por qué discutir primero sobre la forma de las figuras planas, o por qué dar a la variable la misma denominación) son algunas de las cuestiones que pueden dar lugar al debate de alternativas dentro de un grupo de docentes interesados en analizar las propuestas. El análisis de las producciones de los alumnos y alumnas, sus semejanzas y diferencias, o la relación entre fórmulas y formas de contar que se puede inferir son otras cuestiones potentes en términos de comprender cómo piensan los estudiantes y poder diseñar nuevas actividades para articular con las aquí presentadas.

El capítulo 4, "Probabilidad condicional y medidas centrales: construcción de datos para la toma de decisiones", lo escriben Carolina Benito, Betina Duarte y Patricia Duarte Lezcano. La propuesta se divide en dos partes, una dedicada a la enseñanza de la probabilidad condicional y otra a la enseñanza de la construcción de medidas centrales que permitan describir un conjunto de datos y el análisis de su representatividad.

Las actividades proponen fases de trabajo en pequeños grupos y fases de trabajo colectivo, así como momentos de síntesis. También se presentan momentos de reflexión, tras resolver una serie de problemas, para abrir un debate que permita elaborar teoría con los estudiantes. El abordaje elegido al presentar la probabilidad condicional es trabajar con problemas que permiten identificar distintos espacios muestrales a partir de tablas de contingencia, a medida que se va teniendo nueva información sobre un suceso. En los sucesivos problemas se va eligiendo entre presentar la información en una tabla, en un texto o, también, con datos como porcentajes. Así, a partir de la idea de probabilidad simple (ya conocida por los estudiantes), se avanza a las de probabilidad conjunta y probabilidad condicional y, por último, se llega a un primer abordaje del teorema de Bayes, también desde las tablas.

Con respecto a la construcción de las medidas centrales, es interesante el análisis respecto de su suficiencia o no para describir o representar el conjunto de datos en estudio. El trabajo se inicia desde el conocido promedio y la mediana, analizando en qué casos son una buena medida del centro de la distribución y cómo completar la caracterización con otras medidas, por ejemplo los cuartiles o la dispersión.

Vale aclarar que los enunciados de varios de los problemas trabajados en este libro incluyen precios que han quedado muy desactualizados respecto a los posibles valores de hoy. No obstante, se decidió mantenerlos tal como figuraban en los enunciados originales.

BIBLIOGRAFÍA

Ministerio de Educación (Argentina)

2012 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de la Formación general. Ciclo Orientado Educación Secundaria*, Ministerio de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado?from=150199> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

CAPÍTULO 1

Función cuadrática: entre lo funcional y lo algebraico

Valeria Borsani, Marcela Menichelli y Sandra Tettamanti

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta de trabajo toma como problemática la enseñanza de la función cuadrática y de la ecuación de segundo grado en forma conjunta. Esta decisión se apoya en la búsqueda de otorgar sentido tanto a la operatoria algebraica como al trabajo en torno a las representaciones de las funciones cuadráticas. En general, el estudio de estas nociones se hace en forma disociada, enseñando primero lo referido a polinomios en general y su operatoria, con el objetivo de que los estudiantes posean habilidades al momento de abordar el trabajo con funciones cuadráticas y polinómicas.

Al elaborar esta secuencia consideramos como punto de partida la propuesta de enseñanza que se presenta en el documento *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado* (Sessa *et al.*, 2014). Compartimos el enfoque general del citado documento para la enseñanza de esta temática y realizamos un recorte de algunos asuntos presentes en él para elaborar esta nueva propuesta. El análisis matemático-didáctico que presentamos tiene por objetivo profundizar, ampliar y complementar lo que allí se analiza. La secuencia de actividades propone abordar el estudio de la función cuadrática poniendo en estrecha relación la información que se puede obtener de su fórmula expresada en forma canónica con otras expresiones equivalentes y con las características del gráfico que la representa.

Para recorrer este camino, se parte de una situación contextualizada que permitirá introducir a los estudiantes en un trabajo de lectura y producción de información a partir de la expresión canónica de la fórmula de la función que modeliza la situación, presentando una alternativa diferente a la de la construcción de una tabla y el gráfico a partir de la fórmula. Luego se propone un intenso trabajo donde se vincula la expresión canónica de la función cuadrática con su gráfico a través de la lectura de información de cada uno de estos registros de representación. Por último, se propone el estudio de las relaciones fórmula-gráfico y fórmula-fórmula a partir de la introducción de la noción de expresiones equivalentes.

En referencia a los saberes sobre funciones y álgebra, especificados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), las actividades que presentamos en este documento pueden vincularse con los siguientes núcleos:

- La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones lineales y cuadráticas, lo que supone: usar las nociones de dependencia y variabilidad; seleccionar la representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuada a la situación; interpretar el dominio, el codominio, las variables, los parámetros y, cuando sea posible, los puntos de intersección con los ejes y el máximo o mínimo en el contexto de las situaciones que modelizan.
- El análisis del comportamiento de las funciones lineales y cuadráticas, lo que supone: interpretar la información que brindan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas; vincular las variaciones de sus gráficos con las de sus fórmulas y establecer la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones.
- La interpretación de diferentes escrituras de las fórmulas de las funciones cuadráticas y su transformación mediante las propiedades de las operaciones de números reales (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) si la situación lo requiere (Ministerio de Educación, 2012: 16).

PARTE 1: LAS EXPRESIONES CANÓNICAS Y LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS

¿Qué relación hay entre la información que da la fórmula y la que da el gráfico de una función?

Las actividades de este apartado promueven el estudio de funciones que tienen una forma de variar diferente a la variación uniforme, que se entiende ya conocida por los estudiantes. Estos momentos de introducción al estudio de fenómenos cuadráticos coinciden aquí con el inicio de un estudio un poco más sistemático de fenómenos de variación no uniforme, lo que supone comprender las diferencias con las variaciones lineales a partir de considerar funciones con crecimiento no uniforme y la existencia de máximos o mínimos. A partir del estudio de las diferencias se avanzará en la caracterización de un nuevo tipo de funciones, las cuadráticas.

El trabajo se inicia en un contexto no matemático para centrarse luego en el análisis y comparación de fórmulas y gráficos. Progresivamente, y en función de los conocimientos disponibles en el grupo, se irán incluyendo términos específicos de este estudio como imagen, preimagen, abscisas, ordenadas, etc. Esto requerirá, eventualmente, recuperar el vocabulario, notación y tratamiento dado a funciones lineales, a la vez que se incorporan términos nuevos como parábola, vértice, etcétera.

Las distancias y puntos de apoyo entre los nuevos y viejos conocimientos de los estudiantes pueden aflorar en el espacio colectivo creando tensiones que permitirían la emergencia de ideas potentes acerca de la relación tabla-gráfico-fórmula. Para ello el recorte de actividades que conforman esta primera parte del documento, en relación con los NAP mencionados anteriormente, propone:

- Leer información a partir de la expresión canónica de la fórmula y ponerla en relación con la representación gráfica de la función.

- Analizar la posibilidad de que diferentes gráficos puedan corresponder o no a la representación gráfica de las funciones estudiadas, focalizando en las razones que se esgrimen para aceptar o descartar esas correspondencias.
- Obtener, a partir de la fórmula o gráfico de la función, valores y/o puntos simétricos, preimágenes o raíces sin necesidad de recurrir a la fórmula resolvente.
- Producir fórmulas de funciones cuadráticas que cumplan ciertas condiciones.

ACTIVIDAD 1

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras. Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio p que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta una fórmula que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora:

$$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$$

a) Miguel propone cobrar \$56 por hora, ¿cuánto ganarían en ese caso?
b) Ernesto quiere aumentar la ganancia, ¿a qué precio podrían cobrar la hora?
c) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia de \$2048?
d) ¿Es posible obtener una ganancia de \$1400? ¿Para qué valor o valores de precio por hora? ¿Es posible obtener una ganancia de \$3500? ¿Para qué valor o valores de precio por hora?
e) ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener? ¿Qué precio por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia? ¿Hay algún otro valor para el cual la ganancia es máxima?

f) ¿Existirá algún valor de precio por hora (p) para el cual no se obtenga ni ganancia ni pérdida?

La intención de esta primera actividad es que los estudiantes comiencen a interactuar y se familiaricen con un nuevo tipo de fórmulas –cuadráticas–, inaugurando un tipo de actividad propia del trabajo algebraico: leer información de una expresión y eventualmente manipularla para obtener nueva información de su lectura. La decisión de comenzar con un problema en contexto no matemático se sustenta en la posibilidad de que los estudiantes puedan encontrar en dicho contexto palabras e ideas en las que sostener sus explicaciones.

El contexto puede ofrecer frases que enmarcan conceptos matemáticos (máximo, mínimo, aumenta, disminuye) que serán objeto de estudio a través de las actividades de la secuencia. La interacción con la expresión canónica permite producir información sobre la situación que se está analizando. Ese diálogo entre la información obtenida a partir de la fórmula y el contexto de referencia es el que permitirá sostener o interpelar las respuestas que los estudiantes encuentren a las diferentes preguntas.

Puede ser útil, antes de presentar la consigna, conversar con los alumnos acerca de la relación entre ingresos, costos y ganancia con respecto a alguna actividad económica e identificar algunos factores que pueden incidir en las relaciones entre costos, precios y ganancia.

Si bien la fórmula simplifica el cálculo de la ganancia, pues no considera gastos fijos u otras variables, resulta un modelo útil para pensar una variación que involucra crecimiento en un intervalo, un máximo y decrecimiento en otro intervalo.

Se propone que la actividad se desarrolle en grupos pequeños y que se inicie con el estudio de los ítems a) y b). El ítem a) puede ayudar a que los estudiantes precisen cuáles son las variables representadas en la fórmula y qué letra representa cada una de esas variables. A partir del trabajo con el ítem b) se pretende que los estudiantes confronten intuiciones como “a mayor precio, mayor ganancia" con la información que se puede recabar de la fórmula. Para ello se propone que, en un primer análisis colectivo, el docente propicie la construcción en el pizarrón de una tabla que relacione el precio por hora y la ganancia mensual en la que se vuelquen los valores obtenidos por los distintos grupos. Para resolver este ítem, algunos estudiantes recurren a la proporcionalidad directa. En esos casos el docente podrá aprovechar el espacio colectivo para trabajar en torno a este asunto. Para ello podrá utilizar los valores propuestos por los estudiantes que se volcaron en la tabla. El análisis de dichos valores debería dejar en evidencia que no siempre que aumenta el precio por hora aumenta la ganancia.

Es probable que en los pequeños grupos se obtengan valores de p cercanos al 56 o que opten por números redondos como el 100, por lo que el docente podría solicitar a cada uno de ellos que calculen ganancias para diferentes precios por hora con la intención de asegurarse de llegar al espacio colectivo con un abanico de valores de ganancia, entre ellos algunos menores que \$2048. La sorpresa de algunos estudiantes frente a que no siempre un aumento del precio por hora aumenta la ganancia, puede ser aprovechada para proponerles realizar conjeturas sobre la situación. Por ejemplo, la idea de que "al aumentar el precio habrá una disminución de clientes" es algo que los estudiantes pueden suponer y que el comportamiento de la función confirma. Es necesario tener en cuenta que, en este caso, el aumento en el costo por hora del servicio va a bajar la demanda y, consecuentemente, disminuir la ganancia.

Después de trabajar en el espacio colectivo con los dos primeros ítems, se presentarán el c) y d). Para responder al ítem c), una posibilidad es que los estudiantes planteen y resuelvan la ecuación $3200 - 2(p - 80)^2 = 2048$. En este procedimiento es probable que no adviertan que $p = 56$ también es solución de la ecuación. Otra estrategia que podría surgir es que, sabiendo por el ítem a) que $G(56) = 3200 - 2(-24)^2 = 2048$, los estudiantes busquen el valor de p para el cual $p - 80 = 24$, obteniendo $p = 104$. El momento de análisis colectivo de estas estrategias puede favorecer la confrontación y la relación entre ambas. La segunda estrategia puede servir para comprender que el opuesto (-24) también es solución. Será el docente quien deberá sostener en este espacio la importancia de encontrar respuestas al problema a través de la lectura y manipulación numérica de la fórmula sin necesidad de plantear ecuaciones.

Al analizar otros valores de ganancia en el ítem d), se busca movilizar la práctica de lectura y manipulación de la fórmula para decidir si una ganancia es posible y obtener los valores de p correspondientes. Algunos estudiantes pueden probar dándole valores a p (el rango de valores que prueban suele estar orientado por los que surgieron en los ítems anteriores) y comprobar si la ganancia es de 1400. Otros podrán plantear la ecuación $3200 - 2(p - 80)^2 = 1400$ y resolverla de diferentes maneras: despejando p con procedimientos estandarizados y conocidos de antemano; o planteando que $2(p - 80)^2 = 1800$ para luego leer que $p - 80 = 30$ o que $p - 80 = -30$.

De la misma manera, la situación de enfrentar a los estudiantes con la imposibilidad de encontrar un valor de p para que la ganancia sea de $3500 promueve diferente tipos de argumentos:

- la exploración con valores numéricos, que permitirá conjeturar que no es posible encontrar valores de p para que la ganancia sea 3500;
- el planteo y despeje de la ecuación $3200 - 2(p - 80)^2 = 3500$, para concluir que no es posible porque “el radicando” queda negativo;
- el planteo y lectura de la ecuación $3200 - 2(p - 80)^2 = 3500$.

La discusión colectiva sobre los diferentes argumentos que sostienen estas estrategias ofrece buenas condiciones para propiciar un trabajo de lectura de información de la fórmula: “A 3200 siempre se le resta un número positivo, por lo que no va a dar 3500”; o “a 3200 habría que restarle algo negativo para que dé 3500 y eso no puede pasar”. Así mismo este tipo de análisis permite leer de la fórmula que “la ganancia será máxima cuando al 3200 no se le reste nada” (cuando el paréntesis se hace cero).

Con el ítem f) los chicos tienen que interpretar que esa no ganancia ni pérdida significa que $G(p) = 0$.

El trabajo realizado al buscar valores para ganancias y precios por hora anticipa la búsqueda de imágenes y preimágenes de una función que se propone en la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2

Dada la función

$$f(x) = (x - 3)^2 + 2$$

a) Determinen el valor de $f(x)$ para $x = -1$.

b) Analicen si existen otros valores de x para los cuales se obtenga el mismo valor de $f(-1)$.

c) Determinen $f(5)$ y analicen si hay otros valores de x que tengan la misma imagen, ¿cuántos hay?

d) Analicen, si existen, valores de x tales que $f(x) = 11$. ¿Cuántos hay? ¿Y para $f(x) = 3$?

e) ¿Es cierto que hay tres valores de x tales que $f(x) = 27$?

f) Analicen para qué valores de x, si es que existen, $f(x) = 2$. ¿Cuántos hay?

g) Analicen para qué valores de x, si es que existen, $f(x) = 0$.

A través de esta actividad se busca avanzar con la búsqueda de imágenes y preimágenes, y en el estudio de la existencia o no de estas últimas, a partir de la lectura de la información que porta una fórmula, que en este caso no refiere a un modelo de una situación. A su vez, se pretende focalizar en las diversas escrituras que se usan convencionalmente en el trabajo con funciones (así como fortalecer el trabajo con los posibles valores que toma la función), ofreciendo elementos para comenzar a discutir ciertas ideas en torno a la noción del conjunto imagen para este tipo de funciones, un contenido que se irá precisando en los próximos problemas.

En los tres primeros ítems se propone encontrar valores de la función para un x dado y la búsqueda de su “compañero”, entendiendo como compañeros a aquellos pares de valores del dominio que tienen la misma imagen. En el ítem a) se presenta la notación $f(x)$, buscando afianzar el reconocimiento de que esa x es el valor para el cual queremos encontrar la imagen. El ítem c) favorece un trabajo similar.

En cambio, en los ítems siguientes se dan como datos valores de $f(x)$ para hallar, si existen, los valores de x compañeros que correspondan, propiciando la lectura de la fórmula. En el análisis se presentan distintas posibilidades: que haya pares de compañeros –ítems d) y e)–, que exista un único valor de x en el caso de que la imagen es 2 –ítem f)– y que no exista x para el valor dado –ítem g)–.

A través de lo trabajado con los distintos ítems se pretende que los alumnos recuperen las estrategias desarrolladas en el problema anterior para la búsqueda de compañeros a través de la lectura de información de la fórmula y a través de la búsqueda de los valores que dan opuestos dentro del paréntesis elevado al cuadrado. Es probable que como estrategia de resolución vuelvan a surgir procedimientos más estandarizados y quizá, nuevamente, aparezca un solo valor. En este caso el docente puede proponer recuperar procedimientos ya analizados, poniendo en discusión cuándo se dan dos soluciones, cuándo una o cuándo ninguna a través de la lectura de la información que porta la fórmula. Por ejemplo en el ítem e), podría plantearse: "*¿Cómo garantizamos que existen solo dos valores de x* con imagen 27? ¿Por qué no puede haber tres valores?". Si bien los estudiantes no cuentan con conocimientos matemáticos para demostrar que no puede haber tres preimágenes de 27 –ítem e)–, la decisión de incorporar este ítem apunta a fortalecer la idea de que al tener un término cuadrático se pueden encontrar a lo sumo dos preimágenes.

Por último, para comenzar a discutir algunas ideas sobre el conjunto imagen de la función, que será precisado a partir la actividad 4, se propone que el docente solicite a los estudiantes que encuentren otros valores que no toma la función $f(x)$. Este análisis, junto con los analizados en los ítems f) y g), pone en juego argumentos que se sostienen en la lectura global de la fórmula.

ACTIVIDAD 3

En grupos, analicen cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían corresponder a la función dada en el problema anterior y expliquen por qué:

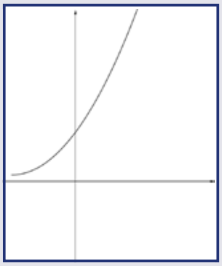


Gráfico 1

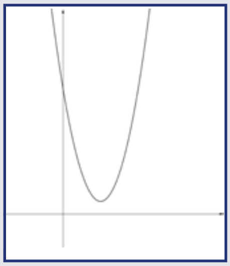


Gráfico 2

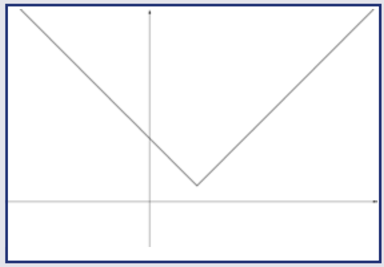


Gráfico 3

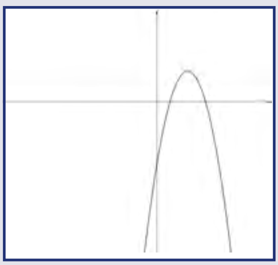


Gráfico 4

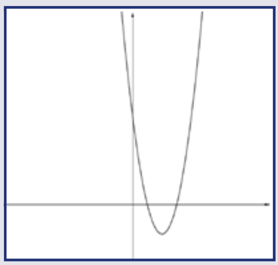


Gráfico 5

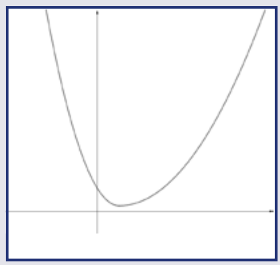


Gráfico 6

Esta actividad promueve que los estudiantes recuperen y organicen la información que analizaron en la actividad anterior, con el objetivo de ponerla en relación con los gráficos que se presentan. Para estudiantes acostumbrados a realizar gráficos a partir de finitos datos que se obtienen de una fórmula, puede resultar novedoso el pedido del análisis de un gráfico que corresponda a una función dada por una fórmula. Como sostienen Sessa *et al.* (2014: 32):

> Estudiar cada uno de los seis gráficos buscando razones para aceptarlo o descartarlo, es una tarea que comporta una complejidad diferente a la de la confección de un gráfico, que clásicamente se resuelve en la escuela siguiendo el siguiente recorrido: fórmula de la función, confección de tabla de valores, marcado de puntos en un sistema de ejes cartesianos, dibujo de un gráfico aproximado uniendo los puntos.

Es posible que los estudiantes intenten ubicar en los gráficos la información que fueron encontrando en los ítems del problema anterior. Esta primera forma de abordar la actividad llevaría a descartar, por ejemplo, los gráficos 1, 4 y 5. Para el gráfico 1 también podrían argumentar inexistencia de compañeros en el mismo.

La ubicación de puntos en estos gráficos (que carecen de una escala de referencia) suele presentar cierta complejidad para los estudiantes. Por ejemplo, podrían seleccionar el gráfico 4 si ubicaran los puntos con abscisa $x = 6$ y $x = 8$ en la "rama izquierda" del gráfico y argumentaran que en ese intervalo la función crece; o podrían ubicarlos en diferentes "ramas" del gráfico. Será el trabajo con sus valores de x "compañeros" ($x = 0$ y $x = -2$) el que permita justificar que en el gráfico $x = 6$ y $x = 8$ deberán ubicarse en la rama derecha de la curva. En particular, ubicar estos valores en la rama derecha de la gráfica 4 contradice el crecimiento que se conoce a partir de la actividad anterior. Resultará interesante discutir con los estudiantes la posibilidad de anticipar, a partir de los "compañeros" que se tienen con anterioridad, qué abscisas corresponden a una rama u a otra de la gráfica.

Si hay estudiantes que optan por alguno de estos gráficos, será importante recuperar cuáles son los argumentos que sostienen esta decisión y su relación con los datos de referencia. Esto permitiría analizar que dichos argumentos no resultan suficientes para que el gráfico represente la función puesto que hay otros datos obtenidos en la actividad 2 que contradicen aquello que el gráfico informa. A su vez el docente podrá preguntar, antes de pasar al análisis de los gráficos restantes, "¿cómo se podrían descartar los gráficos 1, 4 y 5 sin ubicar puntos?, ¿qué datos de la actividad 2 te ayudan a hacerlo?". Se pretende con esto fomentar argumentos que se sostengan en una lectura global del gráfico y de la fórmula, a través de relacionar los datos que aportan los puntos obtenidos: casi todos los valores de x tienen compañeros, hay un valor de $f(x)$ que es el más chico, la función $f(x)$ no toma valores negativos.

Es posible que los estudiantes elijan el gráfico 3 puesto que están familiarizados con representaciones de funciones lineales. Otro criterio para elegirlo podría ser el hecho de que en la gráfica existan pares de compañeros y un valor mínimo. Otros estudiantes quizás usen este último argumento para seleccionar también los gráficos 2 o 6, por lo que en el espacio de análisis colectivo se podrá concluir que dicho criterio no resulta suficiente para optar por uno u otro gráfico.

Será necesario generar una discusión colectiva propiciando la argumentación de las selecciones realizadas tanto para descartar como para elegir posibles gráficas que representen la función dada. La exposición de estos argumentos posibilitará la confrontación de las diferentes posiciones que expliciten los estudiantes, en las que la noción de variación uniforme podría ser una entre las posibles.

¿Qué intervenciones del docente permitirían que los estudiantes analicen cada uno de los gráficos y tomen una decisión más precisa? El docente podría solicitarles que elaboren una tabla donde vuelquen los datos obtenidos en la actividad anterior y analicen la relación entre los valores. Una tabla como la siguiente puede propiciar el estudio del tipo de variación que se ve en la misma y que se analiza en cada uno de los gráficos.

Los estudiantes podrían analizar como varían las imágenes al variar *x* en una unidad, por ejemplo:

x	$f(x)$
-2	27
-1	18
0	11
1	6
2	3
3	2
4	3
5	6
6	11
7	18
8	27

+1 → +1: al variar *x* de 3 a 4, las imágenes varían 1 unidad.

+1 → +3: al variar *x* de 4 a 5, las imágenes varían 3 unidades.

+1 → +9: al variar *x* de 7 a 8, las imágenes varían 9 unidades.

La lectura que realicen los estudiantes de la tabla les posibilitará confirmar que los valores obtenidos de la función no varían de manera uniforme.

De la misma manera podrían observar que la variación no es uniforme si tienen en cuenta los valores que se encuentran por encima de los analizados. Por lo tanto, la lectura que realicen los estudiantes de la tabla les posibilitará confirmar que los puntos de la gráfica que representa la función no varían de manera constante. Esto les permitirá descartar el gráfico 3.

Una experiencia sobre el análisis de este tipo de gráficos al estudiar la variación cuadrática fue realizada por el equipo de Sessa *et al.* (2014: 32), quienes afirman que:

> Hacer una tabla de valores no necesariamente lleva al alumno a establecer alguna relación sobre el tipo de variación que se está estudiando. Es necesario pensar en un trabajo sobre la tabla construida para atrapar algunas características de la variación.

Otra estrategia que podrían utilizar los alumnos es a determinar la pendiente de cada recta utilizando valores de la tabla. Al usar esta estrategia a partir de dos pares distintos de puntos de una de las ramas de la parábola, quedaría en evidencia que los mismos no pertenecen a una recta, dado que se obtienen distintas pendientes. Por ejemplo, si toman los pares de puntos (1;6), (-1;18) y (-1;18), (0;11), observarán fácilmente que las pendientes dan diferente:

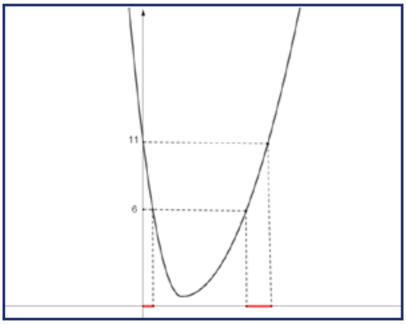
$$m = \frac{6 - 18}{1 - (-1)} = -6 \qquad m' = \frac{18 - 11}{-1 - 0} = -7$$

Así, queda en evidencia que los tres puntos no pertenecen a una misma recta. El gráfico 3 queda descartado a partir de este proceso.

El docente puede propiciar un espacio de discusión colectiva que favorezca en los estudiantes la ruptura entre la noción de variación uniforme del modelo lineal y un tipo de variación no uniforme propia del modelo cuadrático que comienzan a estudiar. Esa ruptura se instaura a través de la lectura de la tabla, por ello consideramos importante priorizar en este caso su análisis.

La selección entre los gráficos 2 y 6 puede resultar compleja, puesto que aún no se ha visto que los “puntos compañeros” son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola. Sin embargo, para descartar el gráfico 6, algunos chicos quizás digan que no sirve porque en el gráfico se ve que “no sube igual que baja” y en la tabla “pareciera que sube igual que baja”. En este sentido, el docente podría solicitar a los estudiantes que precisaran sus ideas preguntando: “¿Qué es lo igual que se ve en la tabla? ¿Y qué es lo igual (o distinto) que se ve en el gráfico?”. Para ello, puede acompañar el discurso de los estudiantes con la ubicación en el gráfico de pares de puntos compañeros y la variación de las imágenes en cada una de las ramas.

Tal vez los estudiantes consideren en el gráfico dos valores de imagen de la función (por ejemplo, $y = 6$ e $y = 11$), ubiquen los dos pares de abscisas compañeras y observen que la distancia entre las mismas es distinta. Al comparar esta conjetura con los datos que se tienen en la tabla, podrían ver que la distancia entre las abscisas de pares compañeros no varía, lo que les permitiría verificar que esto no se cumple en el gráfico.



Si estas estrategias de análisis de variaciones vía la tabla y el gráfico no aparecieran en el aula como resultado de producciones de los estudiantes, el docente puede optar por:

- presentarlas para analizarlas y, de este modo, con apoyo en las incompatibilidades entre lo que informa el gráfico y la tabla, descartar todos los gráficos menos el segundo;

- aceptar más de un gráfico como posible, postergando este estudio variacional para luego de la actividad 4, donde se pide la construcción de un gráfico aproximado. Finalizada la actividad 4 se puede retomar la actividad 3 para terminar de descartar los gráficos con argumentos basados en el análisis de las variaciones.

En uno u otro caso, la idea es que comiencen a circular en el aula explicaciones que se apoyen en el estudio de la compatibilidad entre las variaciones que se leen de la tabla de valores y las variaciones que se pueden leer del gráfico.

La selección o descarte de gráficos vía análisis de variaciones permite dar argumentos para descartar gráficos que no corresponden a $f(x)$. Sin embargo, este tipo de análisis no permite determinar que el gráfico 2 es el que corresponde a la función. Como tampoco se encuentran argumentos para descartarlo, una conclusión es que ese gráfico podría ser el de la función.

Esta propuesta de enseñanza no pretende demostrar que la representación gráfica de una función cuadrática es una parábola, ya que los conocimientos necesarios para establecer esta relación exceden a aquellos que se abordan en la escuela secundaria.

ACTIVIDAD 4

PARTE 1

Dada la función $g(x) = -(2x + 4)^2 - 1$, analicen en cada caso si las siguientes afirmaciones son ciertas y expliquen por qué.

a) $g(3) = -101$

b) $g(x) = -15$ cuando $x = 0$

c) La gráfica alcanza un máximo cuando la imagen es $g(x) = -7$

d) Hay dos valores de x tales que $g(x) = -5$

e) Hay dos valores de x tales que $g(x) = 0$

f) $g(-1{,}5) = g(-2{,}5) = -2$

PARTE 2

Grafiquen aproximadamente la función.

En varios ítems de este problema se sigue trabajando en la obtención de compañeros, las diferentes formas de escritura, el estudio de imágenes y preimágenes a través de la lectura y manipulación de la fórmula. Lo novedoso en este caso es que la fórmula presenta un coeficiente negativo y la x aparece multiplicada por un número dentro del paréntesis, por lo que no es evidente el valor de x donde la función alcanza el máximo. Además, por primera vez los alumnos deberán elaborar la gráfica de la función poniendo en juego herramientas construidas a partir de la manipulación de la fórmula y la información que provee su lectura.

Las respuestas a los ítems a), b) y f) requieren que los estudiantes realicen cuentas para calcular el valor de la función $g(x)$ para un valor específico de x. En los demás ítems, en cambio, se espera que recurran a la lectura de la fórmula para decidir sobre la veracidad de cada afirmación enunciada. Si transitaran la primera parte solamente haciendo explícitos argumentos basados en cálculos, les resultará difícil más adelante anticipar algunas relaciones (por ejemplo, si la función tiene máximo o mínimo) que se pueden leer de la fórmula. En este sentido, será necesario generar una discusión colectiva sobre la posibilidad de no recurrir a la realización de cuentas en estos casos: analizar que los ítems c), d) y e) se pueden responder sin el planteo de ecuaciones o cálculos numéricos. Por ejemplo, en el ítem d), considerando que el máximo valor de la función $g(x)$ es en -1, los alumnos podrían anticipar la existencia de dos valores de x para los cuales $g(x) = -5$, y que no existirán valores de x para los cuales $g(x)$ sea 0.

De tal manera, se promueven estrategias de lectura de la expresión algebraica de la función que están analizando. Esto favorecerá contar con herramientas que les permitan anticipar algunas características del gráfico que se les propone construir en la segunda parte de la actividad.

Un trabajo de anticipación sobre las características del gráfico les posibilitará recuperar, entre otras cuestiones, que las ramas van “hacia abajo” o que va a tener un máximo, haciendo una vinculación explícita con la lectura de la resta (o la suma) del término cuadrático de la fórmula.

Antes de abordar la construcción del gráfico, el docente puede pedir que se expliciten esas posibles características de un gráfico. Luego, quizás los estudiantes recurran a la tabla y confeccionen un gráfico ubicando los puntos y uniéndolos, por ejemplo, con una poligonal. Si bien quizás no aparezcan argumentos que permitan descartar este gráfico como posible, el docente podría reducir sucesivamente los intervalos que se toman, dando idea de que es plausible repetir esta operación sucesivamente.

Con estos cuatro problemas, los estudiantes han venido interactuado con tres fórmulas diferentes de funciones cuadráticas expresadas en su forma canónica o "cuasi-canónica". Con el objetivo de que recuperen los conocimientos movilizados hasta ahora en relación con las fórmulas y gráficos analizados, y que comiencen a sistematizarlos, el docente podrá solicitar que vuelvan sobre cada una de las actividades realizadas hasta aquí y que completen un cuadro similar al siguiente, en el que se incluye la función del primer problema, considerando que ahora los chicos cuentan con elementos para pensar en las características de su gráfico:

Función cuya fórmula es...	Tres pares de compañeros	Valor de *x* que no tiene compañero	Valores que la función no va a tomar	La función tiene un máximo o un mínimo	Características del gráfico que representa la función
$f(x) = (x - 3)^2 + 2$					
$g(x) = -(2x + 4)^2 - 1$					
$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$					

Una vez que los estudiantes completaron esta tabla, el docente puede proponer una nueva tarea: explicar (con alguna de las funciones anteriores) cómo obtener nuevos pares de compañeros y cómo encontrar valores que la función no va a tomar.

La actividad de volver hacia atrás para revisitar el trabajo realizado quizás les sirva a los estudiantes para revisar cuestiones que no hayan comprendido. A su vez les permite articular diferentes sentidos de una misma noción y hacer evolucionar sus explicaciones.

La idea sería analizar con los estudiantes cómo, a partir de estos cuatro primeros problemas, han comenzado a reconocer, en relación con las fórmulas de las funciones trabajadas, que:

- Los valores de x que tienen un "compañero" tienen la misma imagen.
- Hay valores que $f(x)$ no va a tomar.
- El conjunto imagen es el de aquellos valores de $f(x)$ que tienen preimagen x.
- Existe un valor de $f(x)$ máximo o uno mínimo.
- El valor de x que hace que $f(x)$ sea el máximo o mínimo posible no tendrá compañero (es único) y se lo denomina vértice.

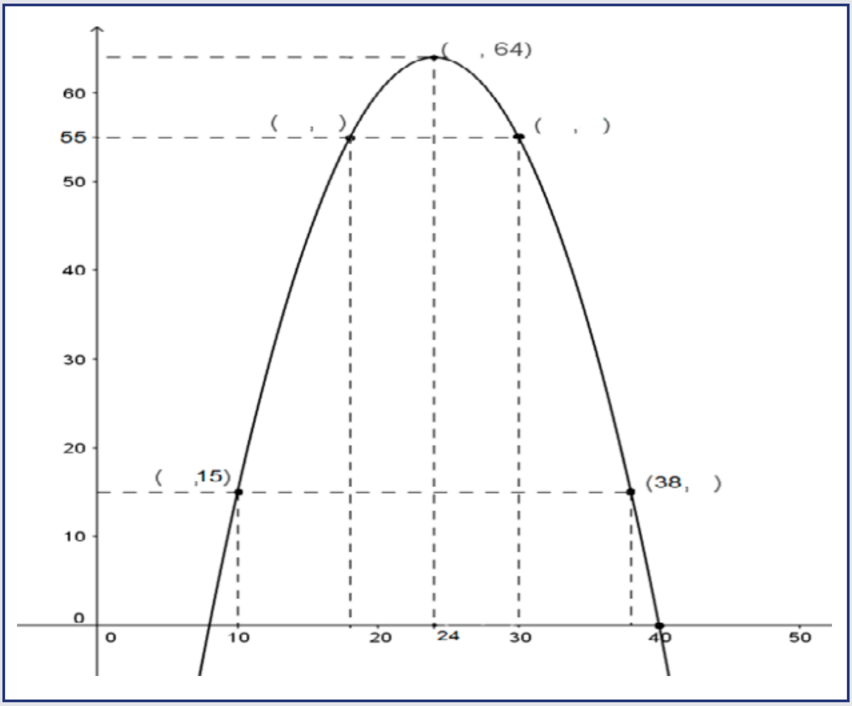
Es posible entonces construir una primera aproximación a la noción de función cuadrática. En este caso no estamos pensando en una definición acabada de la misma, ya que se irá puliendo a medida que se va avanzando en este documento. Esa definición provisoria podría ser así, por ejemplo: "La función cuadrática no responde a una variación uniforme y puede ser representada por una expresión de la forma $f(x) = a(x - b)^2 + c$, con $a \neq 0$".

Por otra parte, en relación con los gráficos se podría registrar que:

- Sube y baja, o baja y sube, "de la misma forma".
- El gráfico tiene una forma de U (para arriba o para abajo).
- Los gráficos de estas funciones no corresponden a variaciones uniformes (es probable que esta noción deba ser recuperada por el docente).
- El gráfico para este tipo de funciones es una parábola (más adelante se van a ir precisando otras características de la misma).

ACTIVIDAD 5

El siguiente gráfico corresponde a una función cuadrática $f(x)$. Respondan las siguientes preguntas y expliquen sus respuestas.



a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

b) ¿Es cierto que la ordenada del punto que tiene abscisa 10 es 38?

c) ¿Es cierto que $f(40) = 0$?

d) Den las coordenadas de dos pares de puntos compañeros.

e) ¿En qué puntos la gráfica corta al eje de la x?

f) Encuentren el punto compañero de (2;-57)

Por un lado, esta actividad aspira a que los estudiantes recuperen o se familiaricen con las escrituras de coordenadas de puntos en el plano cartesiano, las nociones de abscisa y ordenada y sus relaciones con la notación funcional; y, por otro, a que reconozcan “puntos compañeros”, el vértice o raíces a través de la lectura de la información que porta la representación gráfica.

En el ítem b), los chicos podrían confundir abscisa y ordenada, puesto que el compañero del punto de abscisa $x = 10$ es justamente el de $x = 38$, por lo cual podría aparecer alguna respuesta afirmativa. El trabajo con los tres primeros ítems brinda la oportunidad para recordar los conceptos de abscisa, ordenada y la notación de pares ordenados en relación con la notación funcional (por ejemplo, $f(40) = 0$).

El ítem d) da la posibilidad de que los estudiantes comiencen a analizar relaciones entre un par de puntos compañeros y el vértice, o de los pares de puntos compañeros entre sí. Se espera que identifiquen que un par de puntos compañeros son aquellos que están a la "misma" altura respecto del eje x; es decir, que son pares de puntos del gráfico cuyas segundas coordenadas son iguales. Así, mirando el gráfico podrían establecer que (10;15) y (38;15) son puntos compañeros y que los dos puntos del gráfico que están sobre la recta horizontal $y = 55$ también son puntos compañeros. En este caso, pueden leer que el punto de la derecha es (30;55) y que no está claro cuál es la primera coordenada de su punto compañero.

Es posible que los estudiantes busquen esa primera coordenada estimando un valor cercano al 20 o tratando de establecer la escala del eje de las abscisas midiendo con sus reglas para luego dar un valor aproximado de la primera coordenada. Aunque aún no se abordó el estudio de la simetría de la parábola respecto de un eje, otra alternativa sería que algunos estudiantes identifiquen que los puntos compañeros se encuentran a la "misma distancia" del vértice. También puede ser que visualicen que un par de puntos compañeros se encuentran a la "misma distancia" de otro par de puntos compañeros. Probablemente sea necesaria una intervención docente que invite a los estudiantes a terminar de fundamentar qué quieren decir con "la misma distancia". Así, para concluir que el punto compañero de (30;55) es (18;55), podrían explicar que:

- Si la distancia entre $x = 24$ (abscisa del vértice) y $x = 30$ (abscisa de uno de los puntos compañeros a estudiar) es de 6, la distancia entre $x = 24$

y la abscisa buscada también debe ser 6. Apoyados en la representación gráfica, los estudiantes pueden ubicar el punto (18;55).

- Se conocen las abscisas de un par de puntos compañeros, que son $x = 38$ y $x = 10$, y del otro par se conoce solo una de las abscisas, $x = 30$, pero no se sabe cuál es la del otro punto. No obstante, sí se sabe que esa abscisa desconocida está a 8 de distancia de $x = 10$. La representación gráfica puede ser un buen apoyo para afirmar que hay que sumar 8 al 10.

Estas mismas ideas pueden ser desplegadas en el ítem e) para encontrar los puntos en que el gráfico corta al eje de las x.

El último ítem presenta la dificultad de que el punto solicitado y su compañero, dado como dato, no se ven en la gráfica. Esta situación puede resultar novedosa e implica estrategias que posiblemente no se hayan puesto en juego en los ítems anteriores. En este caso, los estudiantes podrían extender las ramas de la gráfica, ubicar aproximadamente el punto (2;-57) y, a partir de ahí, analizar cuál sería su compañero. Otra posibilidad es que, por ejemplo, identifiquen que $x = 8$ y $x = 40$ son compañeros y que como $x = 2$ está a 6 unidades a la izquierda de $x = 8$, el compañero de $x = 2$ está a 6 unidades a la derecha de $x = 40$; es decir, el compañero de $x = 2$ es $x = 40 + 6$.

El análisis de las distancias desde las abscisas de un par de puntos compañeros hasta la abscisa del vértice, o entre las abscisas de un par de puntos compañeros y otro par de puntos compañeros, es uno de los aspectos que comienzan a delinear la simetría de la parábola, tema abordado con mayor profundidad en la actividad 7.

Se sugieren tres momentos diferenciados de discusión colectiva: la primera, luego del ítem c), para establecer y precisar cuestiones de notación y la relación entre las formas de escribir y los puntos del gráfico; la segunda, para analizar las diferentes estrategias que se usaron en los ítems d) y e) dejando que se expliciten aquellas basadas en estimaciones y mediciones, contrastándolas con las que, sin necesidad de medir, se apoyaron en relaciones entre compañeros. Por último se propone que los estudiantes realicen el ítem f) con la intención de reinvertir lo discutido en los dos espacios colectivos anteriores y de precisar las relaciones entre puntos compañeros.

ACTIVIDAD 6

a) Dadas las siguientes fórmulas de funciones cuadráticas, decidan qué gráficos pueden corresponder a su representación gráfica y justifiquen su elección.

$$z(x) = (x + 5)^2 - 4$$

$$r(x) = -2(x - 4)^2 + 8$$

$$h(x) = (x + 4)^2 + 5$$

$$k(x) = -\frac{1}{5}(x + 3)^2 + 5$$

$$m(x) = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 9$$

$$t(x) = -(x - 3)^2 + 16$$

$$s(x) = (x - 5)^2 - 4$$

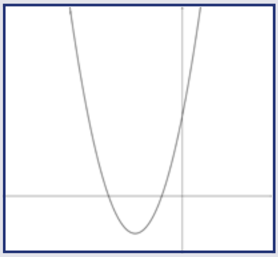


Gráfico a

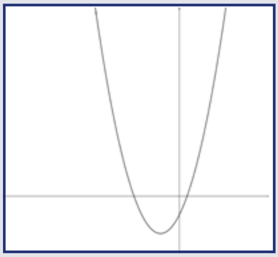


Gráfico b

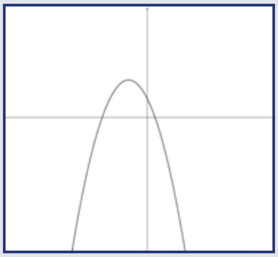


Gráfico c

Gráfico d

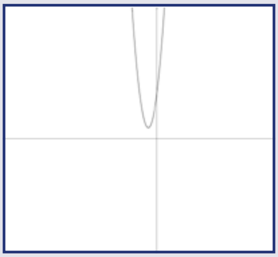


Gráfico e

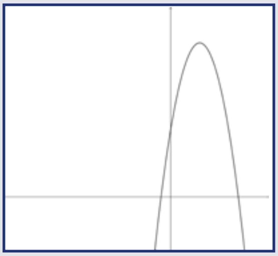


Gráfico f

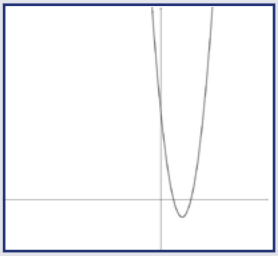


Gráfico g

b) Sabiendo que hay una fórmula para cada gráfico:

b.1) Si el punto (-5;-4) pertenece al gráfico a, ¿qué fórmula o fórmulas de las anteriores pueden corresponder a funciones cuadráticas que tengan ese gráfico? ¿En qué lugar del gráfico ubicarían ese punto? Expliquen su decisión y aporten las coordenadas de otros tres puntos que pertenezcan a ese gráfico.

b.2) Si el punto (1;0) no pertenece al gráfico d, estudien si puede pertenecer a algún otro gráfico. Expliquen su respuesta.

Estudiar cada uno de los siete gráficos en relación a cada una de las fórmulas presentadas, buscando razones para aceptar o descartar su relación, es una tarea que comporta una complejidad diferente a la de la confección de un gráfico, que clásicamente se resuelve en la escuela siguiendo el recorrido: fórmula ⇨ tabla de valores ⇨ gráfico. Con esta tarea se pretende que el análisis de cada gráfico se apoye en las informaciones que los estudiantes pueden obtener a partir de la lectura de las fórmulas.

Hasta aquí, los estudiantes vienen trabajando con máximos, mínimos y compañeros, por lo cual es esperable que en la resolución de este ítem identifiquen los gráficos a, b o g para las fórmulas $z(x) = (x + 5)^2 - 4$, $m(x) = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 9$ o para $s(x) = (x - 5)^2 - 4$ y que, indistintamente, le atribuyan uno a otra.

Algunos alumnos podrían identificar el gráfico por la disposición de las ramas, lo cual brindaría una oportunidad para discutir la lectura de la relación gráfico-fórmula, ya que si bien el gráfico e también tiene un mínimo, dicho punto tiene ordenada positiva. La misma situación se presenta con los gráficos c, d y f, así como con las fórmulas de $r(x)$, $t(x)$ y $k(x)$.

Un alumno que moviliza las relaciones estudiadas en las actividades anteriores podría leer información en ambos registros de representación y que no le alcance para tomar una decisión. Una vez realizado el ítem a), quizás el docente quiera consultar al grupo sobre las diferentes elecciones realizadas, dejando las mismas escritas en el pizarrón para retomarlas luego en una discusión colectiva.

La lectura global de la fórmula informa si la función tiene un máximo o un mínimo. Esto permite seleccionar los gráficos a partir de la orientación de las ramas y de la ubicación del vértice. Sin embargo, para elegirlos o descartarlos será necesario recurrir a nueva información.

Una vez finalizado el espacio de discusión colectiva en relación a lo trabajado en el primer ítem, el docente presentará a los estudiantes las consignas del ítem b). Este ítem apunta a afinar el estudio de los gráficos y fórmulas a través de la información que aportan algunos puntos del gráfico, proponiendo justamente la lectura puntual en ambos registros. Esto obligará a los estudiantes a analizar de manera más precisa qué tipo de información porta y brinda cada tipo de registro de representación. En este sentido la consigna propone profundizar la relación gráfico-fórmula porque promueve que se precise la lectura de información que se realiza en cada uno de estos registros.

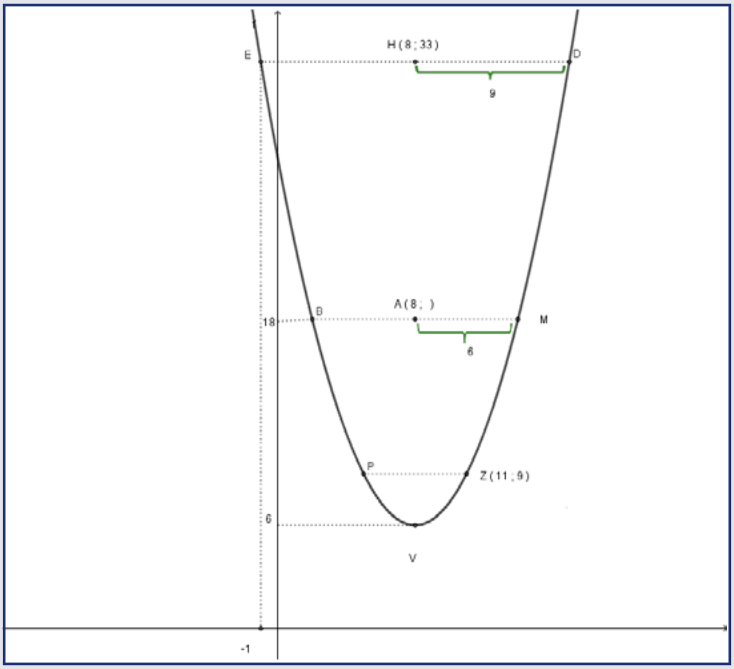
En la resolución del ítem b.1) los estudiantes disponen de diversas estrategias. Una sería la de reemplazar las coordenadas del punto en las variables de cada fórmula. Algunos podrían hacerlo particularmente en aquellas que presentan el 5 y el 4 en su expresión. Sin embargo, en función de lo trabajado en los problemas anteriores no esperamos que hagan una comprobación de este tipo sino que realicen la lectura puntual de la misma. Esta lectura los podría llevar a optar por las fórmulas $z(x)$ o $s(x)$, siempre que hayan logrado identificar el mínimo. Si esto último no ocurre, los alumnos también podrían pensar en $h(x)$ como posible. Pero, ¿qué los lleva a descartar o no alguna de las fórmulas? La función $h(x)$ deberían descartarla por el valor del mínimo, que en este caso es positivo. Para descartar $s(x)$ necesitan analizar para qué valor de x la función tiene un mínimo en -4. Esto los llevará a la lectura puntual de la fórmula, a analizar para qué valores el término cuadrático se anula y determinar que la fórmula que corresponde es la de $z(x)$. Este ítem permite trabajar la idea de que la fórmula tiene diferentes lecturas: la lectura global, que a grandes rasgos tienen que usar para una primera selección del grafico; y una lectura puntual, para chequear si un punto está o no en el mismo, o para generar nuevos puntos que están en el gráfico cuando dicho gráfico está definido.

El ítem b.2), por su parte, propone seguir estudiando a través de puntos la lectura del gráfico. Una vez analizado todo el ítem b) se propondrá a los alumnos retomar el a). Ahora dispondrán de nuevas estrategias para identificar cada gráfico con su fórmula a través de la lectura de distintos puntos como las raíces, máximos, mínimos o la ordenada al origen (la intersección con el eje de las y). Proponemos que este estudio se discuta colectivamente.

ACTIVIDAD 7

En el siguiente gráfico se presenta una parábola. Se conocen las coordenadas de los puntos H (8;33) y Z (11;9).

a) Expresen las coordenadas de todos los puntos indicados en el gráfico, teniendo en cuenta que los puntos H, A y V están alineados.
b) Den las coordenadas de un punto T que tenga por imagen 9 y se encuentre a igual distancia de los puntos P y Z.
c) El punto (20;54) pertenece a la parábola, busquen su punto compañero.



Lo nuevo de esta actividad es que obliga a los estudiantes a encontrar las coordenadas del vértice (V) y puntos “compañeros” utilizando la noción de distancia entre estos y un punto dado que no pertenece a la parábola (pero sí al eje). Para ello los estudiantes podrían centrarse en analizar las distancias entre los pares de puntos H-E, H-D, A-B, A-M, que tienen la misma ordenada, y luego recuperar dicho análisis para determinar el lugar que ocupa el punto T en el gráfico representado. Una vez resuelta la actividad, el docente podría plantear una discusión colectiva a fin de poner en juego la idea de simetría del gráfico respecto de la recta $x = 8$ (eje de simetría) a partir de la búsqueda de las coordenadas de los distintos pares de “compañeros”.

Con todo lo trabajado se podría concluir que cualquier par de compañeros posibilita encontrar la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola (haciendo la semisuma de sus abscisas), recta que el docente podrá institucionalizar como “eje de simetría”.

Una vez desarrollada esta actividad, el docente podrá solicitar a los estudiantes que elaboren un “machete” lo más detallado posible con el fin de revisar y sistematizar las ideas trabajadas en las actividades 5 y 7. Los estudiantes pueden escribir con sus palabras frases que contengan las siguientes ideas:

- Toda parábola tiene eje de simetría, con ecuación $x =$ abscisa del vértice.
- A partir de un par de puntos compañeros puedo determinar el eje simetría y la abscisa del vértice, calculando la mitad de la distancia entre las abscisas de los dos puntos y luego se la sumo a la abscisa del menor (o se la resto al de la abscisa del mayor).
- Si tenemos el vértice (o eje de simetría) y un punto de la parábola, se puede encontrar el compañero del punto. Primero, calculo la distancia entre la abscisa del punto y el eje de simetría; y luego, ese valor se lo sumo (o resto) a la abscisa del vértice. La "y" vale lo mismo en los dos compañeros.
- El vértice siempre está ubicado en el eje de simetría.
- El vértice es un punto de la parábola que representa el máximo o mínimo de la función y el único que no tiene compañero.

Los machetes pueden ser leídos y discutidos en clase con el objetivo de precisar los escritos y las ideas, y para obtener uno lo más completo posible. Esta estrategia de revisión permite al docente obtener información de lo que los alumnos consideran importante acerca de la noción que están trabajando. Para profundizar sobre estas y otras estrategias de repaso, se recomienda la lectura del documento *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio* (Napp *et al.*, 2005).

ACTIVIDAD 8

En cada caso escriban, de ser posible, la fórmula de dos funciones cuadráticas que cumplan con lo pedido. Expliquen sus respuestas.

a) Funciones cuadráticas que tengan mínimo 10 y se alcance en $x = 6$.

b) Funciones cuadráticas que tengan mínimo 10 en $x = 6$ y cuyos gráficos pasen por (8;28).

c) Funciones cuadráticas que tengan máximo 9 en $x = -4$ y cuyos gráficos pasen por (2;0).
d) Funciones cuadráticas cuyos gráficos tengan eje de simetría en $x = 5$ y que no corten al eje de las abscisas.
e) Funciones cuadráticas cuyos gráficos pasen por (3;8) y (11;8).

Este problema plantea a los estudiantes la posibilidad de producir fórmulas de funciones cuadráticas que cumplan ciertas condiciones. Hasta aquí, los estudiantes venían trabajando a partir de gráficos o fórmulas ya dadas. El hecho de producir la fórmula los involucra en un trabajo diferente en el que deberán explorar cómo se atrapan desde la fórmula las condiciones que se están pidiendo.

En el ítem a) es probable que algunos estudiantes produzcan una sola fórmula, asumiendo que el coeficiente principal es 1 (omitiendo su escritura). Ante este tipo de producción será necesario que el docente instale la pregunta por otras posibilidades. Esto habilita la reflexión sobre los diferentes –e infinitos– valores que puede y no puede tomar dicho coeficiente, y la influencia que esto tiene en la fórmula. El análisis de las diferentes posibilidades de coeficientes principales puede estar acompañado por gráficos para apoyar la idea de que para cada opción de coeficiente principal se trata con una función diferente.

En los ítems b) y c) no es posible encontrar dos fórmulas diferentes, el coeficiente principal está determinado. Esto vuelve más complejo el análisis y resolución de estos ítems, por lo que se puede proponer la búsqueda de una fórmula que primero contemple la condición del mínimo de la función (o el máximo), para luego estudiar el coeficiente que acompaña el término cuadrático. Es posible que los estudiantes intenten encontrar dicho valor por tanteo. Otros quizás planteen la necesidad de que el punto dado se pueda generar con la fórmula pidiendo, por ejemplo, que $g(2) = 0$, y que luego operen con la fórmula que encontraron $g(2) = a(2 + 4)^2 + 9$. Será necesario socializar este tipo de estrategia para que esté disponible en la resolución de las actividades siguientes.

A partir de estos ítems se puede concluir que si se tienen como datos un punto (que no tiene la misma ordenada que el vértice) y el vértice de la representación gráfica de la función, hay una única función cuadrática que cumple lo pedido.

Los ítems d) y e) permiten analizar y sistematizar la influencia del eje de simetría sobre los elementos de la fórmula. Será interesante analizar con los estudiantes qué información sobre la función se podría agregar a las dadas en estos ítems para que exista una sola función. En particular, para el ítem e) suponemos que, por lo que vienen trabajando los estudiantes, podrían responder que necesitan el vértice para encontrar una única función.

No fue planteada en esta secuencia la obtención de una función cuadrática a través de tres puntos cualesquiera: para obtenerla los estudiantes deberían recurrir a procedimientos algebraicos, y no es nuestra intención ponerlos en juego en esta propuesta.

Aquí, el uso de un software de geometría dinámica puede favorecer el trabajo de exploración de los estudiantes. El programa GeoGebra es un buen recurso para abordar lo que la actividad plantea, aun si los chicos no han experimentado con este tipo de entorno dinámico.

PARTE 2: ESTUDIO DE DIFERENTES FÓRMULAS DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

¿Qué datos se pueden conocer de una parábola con solo mirar distintas fórmulas?

Hasta ahora se ha trabajado en forma biunívoca la relación entre la fórmula canónica o "cuasi-canónica" de la función cuadrática y su correspondiente gráfico. En este apartado se busca introducir el estudio de diferentes expresiones equivalentes de una misma función cuadrática –desarrollada, factorizada y otras variantes que surgen de las mismas– a través de un trabajo que relaciona gráfico-fórmulas y fórmula-fórmula.

Entendemos como fórmulas equivalentes a aquellas expresiones algebraicas para las que se obtiene el mismo resultado para cada valor de la variable. En las actividades siguientes, la discusión en torno a la equivalencia de las fórmulas se puede abordar a través de dos planos diferentes:

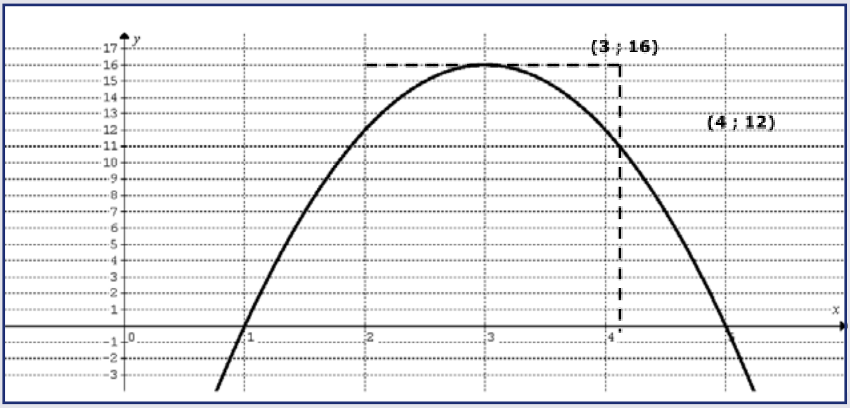
- El tratamiento algebraico de las expresiones, a través de transformaciones apoyadas en propiedades de los números y de las operaciones.
- El análisis de la relación entre los puntos del gráfico de la función y las diferentes fórmulas; en este caso, estudiando el vértice y otro punto.

Con este estudio se instala en el aula la idea que una misma función admite diferentes formas de escribir su fórmula y una sola representación gráfica.

Además del trabajo con expresiones equivalentes que representan diferentes fórmulas de una misma función, se aborda el análisis de la información que provee cada una de las fórmulas estudiadas. A través de este análisis esperamos generar buenas condiciones para que los estudiantes puedan determinar, de manera autónoma, qué información "leer" en cada una de las diferentes formas de escritura.

ACTIVIDAD 1

a) Encuentren una fórmula de la función $f(x)$, sabiendo que (3;16) es el vértice y (4;12) un punto de la parábola.



b) Analicen si alguna de las siguientes fórmulas corresponde también a la función representada en el gráfico anterior. Expliquen por qué:

$h(x) = -(2x - 6)^2 + 16$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{1}{4}(4x - 12)^2 + 16$

Hasta ahora los estudiantes han estado trabajando en torno a algunas relaciones que se pueden establecer entre la información que se puede leer de fórmulas de funciones cuadráticas expresadas en forma canónica (o similar) y las características de sus representaciones gráficas. En general el trabajo consistió en identificar la expresión canónica de una función cuadrática con su representación gráfica y viceversa. El objetivo de esta actividad es generar una ruptura de esta relación entre una fórmula y un gráfico de una función para comenzar a establecer que una parábola es la representación gráfica de una función que puede ser expresada por diferentes fórmulas. La presencia de distintas expresiones de una función cuadrática dará lugar a un trabajo con la noción de fórmulas y expresiones equivalentes.

En el ítem a) de la actividad se espera que los estudiantes, poniendo en juego lo realizado en la actividad 8 de la primera parte de este capítulo, lleguen a la expresión $f(x) = -4(x - 3)^2 + 16$.

Una vez socializada la fórmula obtenida, el docente podrá plantear el ítem b). Inicialmente, quizás los estudiantes respondan que la gráfica no puede representar a las funciones cuyas fórmulas son $g(x)$ y $h(x)$, pues “a un gráfico le corresponde una fórmula”. Cuestionar dicho supuesto es uno de los propósitos de esta actividad.

Para aquellos estudiantes que no logren movilizar estrategias para abordar este ítem, el docente puede proponer preguntas como las siguientes: “¿Qué información se puede leer del gráfico o de la fórmula de $f(x)$?”; “¿Pueden determinar si $h(x)$ tiene mínimo o máximo?, ¿cuál sería?”; “¿Pueden determinar compañeros de la función $h(x)$?”; “La información que van obteniendo de $h(x)$, ¿se contradice con la información que se tiene de $f(x)$? ¿Y qué ocurre con la información obtenida de $g(x)$, la otra función?”.

Para responder estas preguntas los estudiantes podrían leer puntos del gráfico de $f(x)$ y probar si los pueden generar desde las fórmulas de $h(x)$ o $g(x)$ (vértice, algunos compañeros, raíces); también podrían generar puntos con las fórmulas de $h(x)$ y $g(x)$ y corroborar si pertenecen al gráfico o si se pueden generar con la fórmula de $f(x)$.

Sería interesante que estas estrategias, y otras, se desplieguen en el espacio colectivo con el objetivo de fortalecer las relaciones que se ponen en juego en ellas. Los diferentes modos de exploración y la cantidad de puntos generados a partir de esa exploración permitirán plantear en el análisis colectivo la duda sobre la cantidad de puntos a analizar para garantizar que las funciones $h(x)$ y $g(x)$ corresponden a la función que está representada por el gráfico. Una forma de abordar este planteo es a través del estudio de la equivalencia de las tres fórmulas, $f(x)$, $h(x)$ y $g(x)$. En este caso, se pueden manipular algebraicamente las expresiones para concluir que las tres son iguales para todo valor de la variable. Esto puede darse de dos maneras:

- Realizando la extracción de 2^2 o 4^2 del término cuadrático de $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente, con lo cual obtendrían la fórmula canónica de la función.
- Desarrollando en cada fórmula el término cuadrático y luego agrupando los términos semejantes. Operando con las tres fórmulas, llegarían a la expresión $-4x^2 + 24x - 20$, fórmula desarrollada de la función cuadrática.

Si alguna de estas estrategias no fuera producida por los chicos, es una buena oportunidad para que el docente la presente y se analice colectivamente. En cualquiera de los casos, será necesario discutir y analizar con los estudiantes que la equivalencia de las fórmulas garantiza que todos los puntos $(x;f(x))$ del gráfico pueden ser obtenidos a partir de cualquiera de ellas. Como conclusión de esta actividad se puede explicitar que se estuvo trabajando con una función cuadrática que tiene una representación gráfica, pero puede estar expresada por diferentes fórmulas. Es decir:

$$f(x) = -4(x-3)^2 + 16 = -(2x-6)^2 + 16 = -\frac{1}{4}(4x-12)^2 + 16 = -4x^2 + 24x - 20$$

ACTIVIDAD 2

Analicen cuál/es de las siguientes fórmulas pueden corresponder a la función cuya gráfica se presentó en la actividad anterior. Expliquen su decisión.

$f_1(x) = -4(x-1)(x-5)$

$f_2(x) = -(x-3)^2 + 16$

$f_3(x) = (-4x + 24)x - 20$

$f_4(\mathrm{x}) = -6x(x-6) - 36$

$f_5(x) = -x^2 + 6x + 7$

La actividad 1 permitió a los estudiantes analizar tres fórmulas que representaban la misma función cuadrática. En la actividad 2 se enfrenta a los estudiantes con nuevos tipos de expresiones que no conocen como fórmulas de funciones cuadráticas.

Para descartar la fórmula f_2, que se presenta en forma canónica, los estudiantes podrían directamente comparar su coeficiente principal con el de la expresión canónica de $f(x)$. No obstante, ante lo "raro" de las fórmulas f_1, f_3 y f_4 quizás los estudiantes afirmen que no representan a la función estudiada. En este caso el docente puede invitarlos a que obtengan puntos del gráfico y los verifiquen en las fórmulas; o pedirles que hallen puntos a través de estas fórmulas y observen si pertenecen al gráfico. Ya han venido trabajando que si a una fórmula le corresponde un gráfico, los puntos obtenidos a través del uso de la fórmula pertenecen al gráfico de la función y que al reemplazar las abscisas de cada punto en la fórmula se obtienen las ordenadas de los mismos.

Si toman las coordenadas del vértice y las reemplazan en las fórmulas, solo podrán descartar la f_4, ya que la f_2 y f_5 comparten el mismo vértice de la parábola que corresponde a $f(x)$. En cambio, si toman puntos diferentes al vértice podrán descartar f_2 y f_5, y si esos puntos no son (4;12) y (2;12), también podrán descartar la f_4.

Las fórmulas f_1 y f_4 permiten el desarrollo de una nueva estrategia para producir compañeros. De estas fórmulas podrían leer, por ejemplo, que $f(40)$

$= f(46) = -36$. Con esta información es posible buscar el máximo de la función y concluir que no coincide con el de $f(x)$. La estrategia de lectura de compañeros en este tipo de fórmulas será estudiada en profundidad en las actividades siguientes, por lo que no se espera que el docente la ponga a discusión si no surge del trabajo autónomo de los estudiantes.

Para confirmar que f_1 y f_3 son fórmulas que representan a la función $f(x) = -4(x-3)^2 + 16$ será necesario demostrar la equivalencia de estas expresiones a través de un desarrollo algebraico como el desplegado en la actividad 1 de esta segunda parte. Esta estrategia también permitiría descartar las fórmulas restantes.

Con este problema los estudiantes se enfrentan a nuevos formatos de fórmulas, la factorizada, la desarrollada y una que elegimos denominar "cuasi-factorizada". Este puede ser un buen momento para que el docente dé un nombre a los diferentes tipos de fórmulas con el objetivo de identificar unas de otras: canónica, cuasi-canónica, factorizada (producto de dos lineales), cuasi-factorizada (producto de dos lineales más un número) y desarrollada (no tiene paréntesis).

A partir de las actividades 1 y 2, se propone reflexionar sobre la idea de que una misma función cuadrática puede ser expresada por distintas fórmulas y representada por una única gráfica, una parábola. Luego, el docente puede proponer una nueva definición de función cuadrática:

> Si la fórmula de una función $f(x)$ es equivalente a una del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números cualesquiera y $a \neq 0$, entonces $f(x)$ es una función cuadrática

Una vez presentada esta definición, se puede retomar la actividad 2 sabiendo que todas las fórmulas corresponden a funciones cuadráticas. Ahora, bastará con tomar el vértice y un punto de la parábola para decidir si las fórmulas son equivalentes o no.

ACTIVIDAD 3

Dadas las fórmulas de las funciones cuadráticas:

$$g(x) = -\frac{1}{5}\,(x - 2)\,(x + 3)$$

$$f(x) = (x + 4)\,(x + 3) + 5$$

$$h(x) = -\frac{1}{5}\,(x + 4)\,(x - 3) - \frac{6}{5}$$

a) ¿Es cierto que $x = -3$ es compañero de $x = 2$ en las funciones presentadas?
b) Encuentren dos pares de compañeros en cada una de las funciones.
c) Realicen un gráfico aproximado de cada función.

Esta actividad apunta a que los estudiantes se familiaricen con la búsqueda de compañeros, del eje de simetría y del máximo o mínimo a través de las expresiones factorizadas y "cuasi-factorizadas" de las funciones cuadráticas. Para resolverla, los alumnos podrían considerar los valores dados $x = 2$ y $x = -3$ en cada fórmula y determinar si son o no compañeros. Luego, confirmando que estos valores son compañeros para las funciones $g(x)$ y $h(x)$, los estudiantes podrían avanzar sobre el ítem b) y buscar nuevos compañeros mediante alguna de las siguientes estrategias:

- Encontrando el eje de simetría en $x = -12$ y sumando o restando a -12 un mismo valor para determinar otras abscisas compañeras.
- Sumando a un x un cierto valor y restando el mismo valor a su compañero. Por ejemplo, $x = 2 - 1$ y $x = -3 + 1$ son abscisas compañeras; $x = 2 + 1$ y $x = -3 - 1$ también lo son, puesto que $x = 2$ y $x = -3$ son compañeros.

Para el caso de $f(x)$, los valores de x dados no son compañeros. Los estudiantes tendrán que desplegar nuevas estrategias para producir compañeros. Una de ellas es que se apoyen en el cálculo que realizaron en el ítem a), $f(-3) = 0 + 5$ y buscar para qué otro valor de x, $f(x) = 0 + 5$; es decir, hallar el valor de x que anula el factor $(x + 4)$. Si los chicos usaran esta estrategia apoyados en $f(2) = 30 + 5$, les será mucho más complejo encontrar para qué otro valor de x resulta $f(x) = 30 + 5$.

En el ítem c), los estudiantes deben usar los datos que tienen para realizar los gráficos. Para ello, necesitarán recurrir a la búsqueda de las coordenadas del vértice. Si ellos mismos no se plantearan que $g(x)$ y $h(x)$ son la misma función, el docente instalará este asunto ya que tienen herramientas suficientes para abordar dicho estudio.

ACTIVIDAD 4

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no. Expliquen por qué:

a) La función $k(x) = (4x + 24)\ (x - 10)$ tiene compañeros en $x = -24$ y en $x = 10$.
b) La función $f(x) = -2(x - 3)\ (x + 6) + 5$ tiene un máximo en 45,5.
c) Las funciones $t(x) = x(x + 2) + 4$ y $g(x) = x^2 + 2x + 4$ son iguales.
d) La función $g(x) = x^2 + 2x + 4$ tiene un mínimo en 3.
e) -9 es el valor mínimo que toma la función $r(x) = 4x^2 - 12x$.

Con esta actividad se pretende que los estudiantes puedan decidir sobre la validez de las afirmaciones dadas utilizando la potencialidad que las distintas escrituras ofrecen (cuasi-factorizada, factorizada y desarrollada). No se trata de que encuentren la fórmula desarrollada sino de que se apoyen en la idea de que el vértice de las parábolas que representan las funciones se ubica en el eje de simetría y que este se obtiene hallando dos compañeros.

Con los dos primeros ítems se busca que los estudiantes fortalezcan la lectura de compañeros a partir de la fórmula cuasi-factorizada que comenzaron a movilizar en la actividad 3. El razonamiento podría ser: "Es fácil leer que $x = 3$ y $x = -6$ en $f(x) = -2(x - 3)\ (x + 6) + 5$ son compañeros porque ambos hacen cero los paréntesis".

En el ítem c), los estudiantes podrían analizar la equivalencia de las expresiones apelando a la transformación de la fórmula de $t(x)$ en $g(x)$ por medio del uso de la propiedad distributiva, o a la de $g(x)$ en $t(x)$ por medio de sacar factor común x. La equivalencia de las expresiones justifica que las funciones $t(x)$ y

$g(x)$ son iguales. Esta equivalencia ofrece, a su vez, una herramienta fundamental para abordar el ítem d), ya que para obtener datos sobre la función $g(x)$ se puede trabajar con cualquiera de las dos fórmulas.

Es la primera vez, en esta secuencia de actividades, que los estudiantes se enfrentan con una fórmula expresada en forma desarrollada para obtener información sobre la función. Por eso, quizás intenten generar "compañeros" explorando con diferentes valores de x. La idea es que reconozcan que "leer" compañeros de una expresión desarrollada puede no resultar una tarea sencilla. Si los estudiantes no recurrieran a la expresión cuasi-factorizada para generar compañeros, el docente puede intervenir preguntando por ejemplo si $t(100)$ da lo mismo que $g(100)$, para concluir que la información que se obtienen en una y otra fórmula es la misma. Entonces, se puede usar la fórmula $t(x) = x(x + 2) + 4$ para sacar compañeros de $g(x) = x^2 + 2x + 4$.

El trabajo con los ítems anteriores le brinda herramientas a los estudiantes para abordar la resolución del e). En este caso quizás reconozcan la dificultad de encontrar compañeros y, apoyados en los ítems c) y d), decidan transformar la fórmula de $r(x)$ en una fórmula cuasi-factorizada, sacando factor común x, quedando $r(x) = 4x^2 – 12x = x(4x - 12)$. De esta fórmula se puede leer que $x = 0$ y $x = 3$ son compañeros.

Esta actividad permite explorar una nueva estrategia para obtener compañeros partiendo de diferentes fórmulas de la función cuadrática. A la vez, ayuda a sistematizar criterios para estudiar la equivalencia de distintas expresiones de una función, así como los procedimientos para la búsqueda de máximos/mínimos, el eje de simetría, entre otros.

Al finalizar esta actividad, y como síntesis de lo analizado en las actividades 2, 3 y 4, se espera arribar colectivamente a diferentes conclusiones:

- Si la fórmula está expresada de forma factorizada (producto de dos lineales) o cuasi-factorizada (producto de dos lineales más un número) se pueden determinar un par de compañeros de manera sencilla: los valores de x que hacen cero a las lineales.

- Si la fórmula está expresada de manera desarrollada, no es sencillo “leer” compañeros. Se la puede transformar en una expresión equivalente (sacando factor común x) para que quede una cuasi-factorizada.

REFLEXIONES FINALES: ¿CÓMO SEGUIMOS?

En este documento se presentaron una serie de actividades con la intención de que los estudiantes construyan conocimientos sobre las funciones cuadráticas, sus correspondientes gráficas y las diferentes fórmulas que las representan. En la primera parte del documento fue central el trabajo en torno a la lectura de información de expresiones canónicas o cuasi-canónicas, la distinción del tipo de variación cuadrática de la variación uniforme y las implicancias que esto tiene en el gráfico de estas funciones y la producción de fórmulas canónicas a partir de tener ciertos datos. En la segunda parte se estudiaron formas equivalentes de expresar la fórmula de una función cuadrática para luego analizar la información que porta cada una de ellas sobre la función y su gráfico.

Todos estos conocimientos generan buenas condiciones para introducir a los estudiantes en el estudio de los ceros de una función cuadrática a partir de la fórmula desarrollada. Para ello se podría proponer, por ejemplo, una consigna como la siguiente: “Sabiendo que $g(x) = 2x^2 + 6x – 20$ es equivalente a $g(x) = 2x(x + 3) – 20$, encuentren las raíces de la misma”.

A partir de este tipo de actividad los estudiantes podrían trabajar con la expresión cuasi-factorizada $g(x)$ para hallar un par de compañeros y el mínimo de la función. Luego, armar la fórmula canónica equivalente (actividades 8 de la primera parte y 1 de la segunda) y, a partir de ahí, calcular los ceros. Finalmente, al sistematizar este procedimiento con los estudiantes, se obtendrá la fórmula general de la resolvente para calcular los ceros de la función.

Un análisis didáctico matemático de este proceso de enseñanza puede encontrarse en el documento de *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado*, al que ya nos referimos.

BIBLIOGRAFÍA

Borsani, Valeria; Lamela, Cecilia; Luna, Juan Pablo y Sessa, Carmen

2013 "Discusiones en el aula en torno a una variación cuadrática: la coordinación entre distintos registros de representación", en *Yupana*, nº 7, Universidad Nacional del Litoral, pp. 11-31. <http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/Yupana/article/view/4260/6455> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Duval, Raymond

2006 "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación", en *La Gaceta de la RSME*, vol. 9.1, pp. 143-168. <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Ministerio de Educación (Argentina)

2012 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de la Formación general. Ciclo Orientado Educación Secundaria*, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado?from=150199> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

2015 "Matemática para todos en el nivel primario. Clase 5. Lectura complementaria. Nociones para el análisis didáctico". <http://tiny.cc/rykmuz> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Napp, Carolina; Novembre, Andrea; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen

2005 *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento N°2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires-Secretaría de Educación. <https://www.

buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Sessa, Carmen

2005 *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, Buenos Aires, Del Zorzal.

Sessa, Carmen *et al.*

2014 *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado*, Buenos Aires, Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Duval, Raymond

s/f "Conferencia en el VI Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas". <http://educast.pucp.edu.pe/video/1111/vi_coloquio_internacional_sobre_ensenanza_de_las_matematicas__dr_raymond_duval_francia> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

CAPÍTULO 2

Razones trigonométricas: un estudio de las razones entre lados de triángulos rectángulos

Carolina Benito, Cecilia Lamela y Federico Maciejowski

Para la elaboración de esta propuesta se ha considerado el eje "en relación con la geometría y la medida" de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para la Formación General del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, donde se menciona "el análisis de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente y sus relaciones, apelando a la proporcionalidad entre segmentos que son lados de triángulos rectángulos" (Ministerio de Educación, 2012: 17). En particular, aquí abordaremos un saber priorizado para el tercer y cuarto año.

Presentamos una serie de actividades que el docente puede modificar según los conocimientos de su grupo y combinar con otras. Estas actividades proponen distintas tareas para los estudiantes y tienen por objetivo reflexionar sobre el trabajo realizado, discutir las razones por las cuales un determinado conocimiento funciona de una cierta manera, lograr cierto nivel de fundamentación para los conceptos y las propiedades, y generalizar procedimientos, resultados o relaciones.

En algunas actividades, tanto en contextos extramatemáticos como intramatemáticos, no se espera que los estudiantes resuelvan de manera inmediata todo lo que se les propone. La intención es que empiecen a explorar, abordar y ensayar. A veces llegarán a conclusiones de manera autónoma, otras veces a conclusiones intermedias y en ciertas oportunidades será el docente quien convoque explícitamente a elaborar conclusiones apoyadas en el trabajo realizado. A estos apartados los hemos llamado "Elaborar teoría con los estudiantes".

La tarea de exploración está pensada como una forma de generar en los estudiantes un trabajo autónomo. La intención es que acepten el desafío intelectual y elaboren criterios para validar su propio trabajo. En algunas ocasiones los estudiantes tendrán dificultad para entender lo que se les está pidiendo. En general esta dificultad va a estar relacionada con que la tarea propuesta es conceptualmente nueva. Por eso, entender lo que una actividad propone implica ampliar la perspectiva de los conceptos involucrados. Entendemos que comprender esto es parte del aprendizaje que deberán enfrentar los alumnos y las alumnas, lo que supone una posición diferente al decir habitual de la escuela, según el cual "el alumno no entiende las consignas".

En ciertas actividades será imprescindible –y así lo mencionamos en las reflexiones didácticas de las mismas– que el docente aporte lo necesario para que sus estudiantes puedan involucrarse en el trabajo planteado y que "complete" de manera oral las formulaciones escritas del problema.

En el caso de las razones trigonométricas, optamos por comenzar a estudiar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y de qué modo esa relación permite reconocer si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide lo mismo que alguno de los ángulos agudos de otro triangulo rectángulo, aun sin conocer el valor de ese ángulo. Somos conscientes de que detrás de estas cuestiones están las ideas de semejanza de triángulos. Pero nos detendremos aquí por un momento.

Cuando se tienen varios triángulos rectángulos en los cuales uno de sus ángulos agudos mide lo mismo, se sabe que todos esos triángulos rectángulos son semejantes entre sí. Esto es, entre dos de esos triángulos existe una razón de semejanza que es la relación entre los lados homólogos de ambos triángulos, y esta razón puede variar en función de los triángulos que se elijan. Sin embargo, lo que no cambia, lo que es invariante, es la razón entre los lados de cada triángulo rectángulo. Esto es, para cualquier triángulo rectángulo que tiene un ángulo que mide 37º, por ejemplo, la razón entre sus lados no cambia.

Por caso, si se considera la razón $\frac{\text{cateto adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$, en todos los triángulos se obtendrá el mismo resultado. De este modo, es posible relacionar ese valor solo con el ángulo de 37º, y podríamos decir que la razón "caracteriza" a ese ángulo. Esta es la idea que abordaremos en las actividades de la parte 1 de este capítulo.

A la vez, si se tienen dos triángulos rectángulos que cumplen con que la relación entre sus lados es la misma (esto es, el cociente entre un cateto y la hipotenusa o entre los catetos es el mismo en ambos), entonces podemos asegurar que son triángulos semejantes y que van a tener sus ángulos iguales. Ese cociente entonces va a permitir conocer el valor de ese ángulo, cuestión de la que nos ocuparemos en la parte 2. Allí también veremos cómo avanzar para definir otras razones trigonométricas.

PARTE 1: BUSCANDO UN MÉTODO PARA COMPARAR ÁNGULOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

¿Cómo comparar ángulos conociendo longitudes?

En esta primera instancia de trabajo se presentan varias actividades en torno a un complejo turístico de tirolesas, ofreciendo un contexto favorable para comenzar a discutir en el aula sobre la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Para ello se propone, a partir de las medidas de dos lados de cada triángulo rectángulo, comparar los ángulos agudos correspondientes entre los distintos triángulos. En este sentido, las razones entre los lados de un triángulo rectángulo se convierten en un recurso que permite, de algún modo, comparar la amplitud de los diferentes ángulos, aunque por el momento no permite saber cuál es exactamente dicha amplitud.

ACTIVIDAD 1

Un complejo recreativo en el que se realizan deportes extremos ofrece un circuito de tirolesas mediante el siguiente folleto:

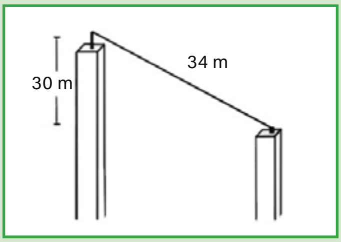
Tirolesa A

Altura descendida: 12 m
Longitud total recorrida: 20 m

Tirolesa B

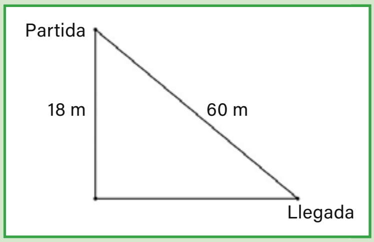
Altura descendida: 24 m
Longitud total recorrida: 68 m

Tirolesa C



Altura descendida: 30 m
Longitud total recorrida: 34 m

Tirolesa D



Altura descendida: 18 m
Longitud total recorrida: 60 m

Tirolesa E

Altura descendida: 40,2 m
Longitud total recorrida: 67 m

a) ¿En cuál de las tirolesas se podrá recorrer mayor longitud?

b) ¿En cuál se logrará descender una altura mayor?

c) Si se quiere elegir entre las tirolesas B y la C la que sea más empinada, ¿cuál se debería elegir? ¿Y entre las tirolesas A y B?

Esta actividad presenta como posible escenario el enunciado y el folleto del complejo de tirolesas. La idea es que los estudiantes discutan sobre el contexto que propone la situación, sin presentarles todavía las preguntas. Esta discusión se puede llevar a cabo a través de preguntas tales como "¿qué es una tirolesa?" o "¿qué información brinda el folleto?". O mediante otras preguntas que el docente crea necesarias para que los chicos entren en tema. De este modo, en la clase se comienza a discutir que en el complejo hay tirolesas más altas que otras y con diferentes recorridos. Más adelante se discutirá que no solo hay tirolesas de mayor longitud y mayor altura, también las hay de mayor inclinación, y no necesariamente serán las mismas.

Para comenzar a analizar la información del folleto se propone el trabajo en pequeños grupos que respondan a las preguntas. Al dar solamente el folleto, será oportuno que estas preguntas queden registradas en el pizarrón, y también en la carpeta o el cuaderno de los chicos.

Una vez planteadas, las preguntas a) y b) podrían llevar a establecer algunas primeras conjeturas necesarias para el ítem c). Por ejemplo, "una tirolesa es más empinada si es más alta" o "una tirolesa es más empinada si la longitud del recorrido es mayor", entre otras posibilidades.

Si bien para comparar la inclinación de las tirolesas se pueden recuperar algunas nociones de semejanza de triángulos y proporcionalidad, se intenta que los y las estudiantes comiencen a desplegar diferentes estrategias. Además, se pretende que analicen que esa inclinación queda determinada por el ángulo formado entre la altura que se desciende en cada tirolesa y la longitud del recorrido sobre el cable, y que se establezcan en el aula criterios para comparar esas inclinaciones sin conocer efectivamente el valor de ese ángulo.

En el caso de la comparación de las tirolesas B y C, los valores elegidos (longitud del recorrido 68 m y altura 24 m para la tirolesa B y longitud del recorrido 34 m y altura 30 m para la tirolesa C), dan la posibilidad de comparar utilizando las ideas de *dobles* o *mitades*. Por ejemplo, analizar cuánto desciende la tirolesa B al recorrer 34 metros sobre el cable (que es lo mismo que recorre la tirolesa C). En este caso el descenso sería de 12 m (poniendo en juego la proporcionalidad o recurriendo a una figura de análisis), con lo cual, al recorrer la misma longitud que la C pero tener menos altura, se puede concluir que es menos empinada.

Sin embargo, es posible realizar esta comparación sin recurrir a ideas de proporcionalidad: la tirolesa C es más empinada porque es más alta y recorre menos que la tirolesa B. O bien, la tirolesa B es menos empinada porque al recorrer el doble de distancia que la tirolesa C desciende una altura menor.

La respuesta obtenida en este punto podría reforzar la conjetura “una tirolesa es más empinada si tiene mayor altura”. Será interesante dejar vivir esta idea en el aula porque las actividades posteriores pondrán en juego otras relaciones que permitirán revisarla. Más adelante se podrá concluir que no depende exclusivamente de la altura de la tirolesa ni de la longitud del recorrido sino que hay que mirar la relación entre ambos valores para poder determinar si una tirolesa es más empinada que otra.

En el caso de comparar las tirolesas A y B, cuyos valores para la altura son 12 m y 24 m respectivamente, es posible multiplicar a 12 m por 2, o bien dividir a 24 m por 2, apoyados en la idea de proporcionalidad o semejanza de triángulos. Se les puede proponer que hagan, ya sea en el pizarrón o dentro los pequeños grupos, tablas como las siguientes:

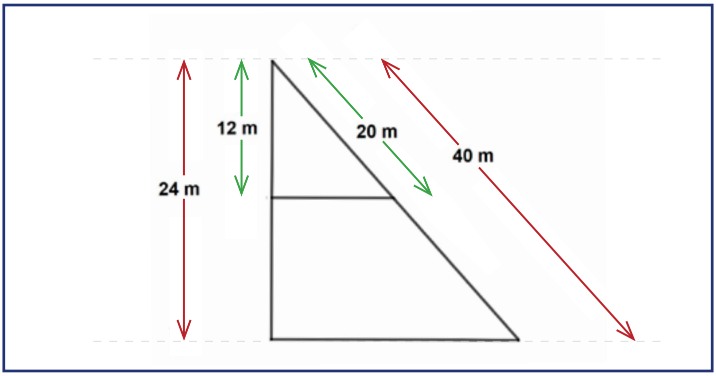
TIROLESA A	
Altura	Distancia recorrida
12	20
24	40

TIROLESA B	
Altura	Distancia recorrida
24	68
12	34

Si se considera la tirolesa B y una tirolesa de igual inclinación que la tirolesa A, pero esta vez con una altura de 24 m y 40 m de distancia recorrida, es posible argumentar que como las alturas son iguales y la tirolesa B recorre más distancia para esa altura, entonces la tirolesa A es más empinada que la B. O dicho de otro modo, la inclinación de la tirolesa A es mayor que la inclinación de la tirolesa B.

En este momento se podría recuperar frente a toda la clase la idea de que en un triángulo rectángulo, si se duplican dos de sus lados (en este caso la altura de la tirolesa y la distancia recorrida) pero se conserva el ángulo de inclinación, obtendrán un triángulo que resulta semejante al original y que por lo tanto tendrá los mismos ángulos.

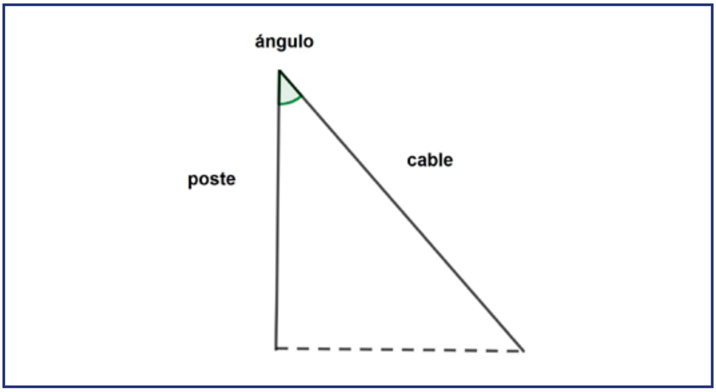
1



Si los y las estudiantes han trabajado antes con la idea de semejanza, vale la pena mencionar que se obtiene una pareja de triángulos semejantes cuya razón de semejanza es 2 (o $\frac{1}{2}$). En este caso, la tirolesa más alta no es la más inclinada.

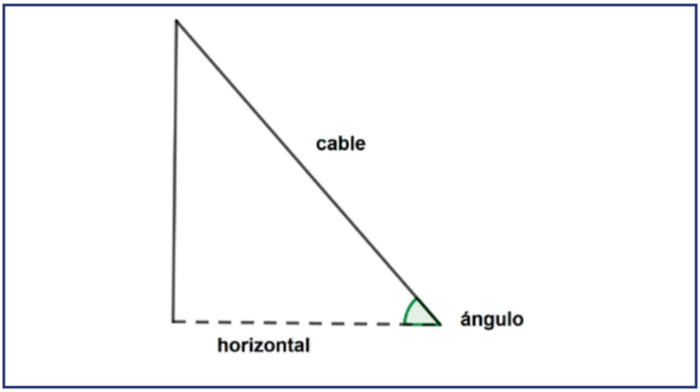
Para concluir, se podría discutir con toda la clase qué significa que una tirolesa resulte más empinada que otra en términos de un ángulo, ya que la inclinación de una tirolesa también es posible determinarla por el ángulo formado entre los lados del triángulo rectángulo que modeliza el esquema de las tirolesas. Así, la tirolesa será más empinada cuanto menor sea el ángulo que forma el cable de la tirolesa con el poste de la altura (imagen 2).

2



Otra estrategia es tomar el ángulo que forma el cable con la horizontal: en este caso, la tirolesa será más empinada cuanto mayor sea este ángulo (imagen 3). También puede pensarse como el ángulo de elevación si el observador se coloca en el punto de llegada y observa la tirolesa desde abajo. Y a su vez, es congruente al ángulo de depresión, si el observador se coloca en el punto de partida de la tirolesa y observa desde arriba el punto de llegada.

3



De este modo, se espera que en el aula comience a circular la idea de que “la inclinación de una tirolesa está vinculada a un ángulo”. Será necesario acordar con los estudiantes cuál de los ángulos se tomará para comparar las tirolesas, dado que posteriormente se hará referencia al mismo.

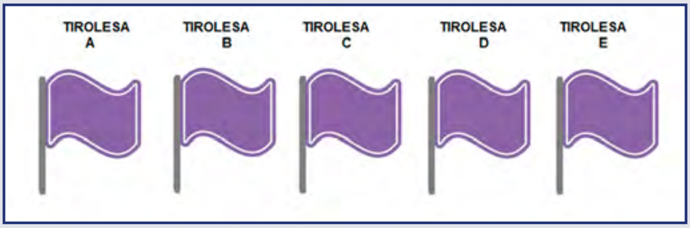
Quizás aparezcan en el aula cuestiones relacionadas al contexto. Por ejemplo, que cuando se desciende en la tirolesa, la cuerda no es completamente una línea recta. También es posible que algún estudiante intente hacer una representación a escala de las mismas. En esos casos se puede aprovechar la oportunidad para señalar que se está haciendo un modelo de la realidad y, por lo tanto, es posible analizar los valores sin un dibujo a escala o sin tener en cuenta que la línea no será exactamente una línea recta. Sin embargo, se puede estudiar la situación y las respuestas que se obtengan estarán vinculadas a dicha decisión.

ACTIVIDAD 2

a) ¿Cuál de las tirolesas tendrá la mayor inclinación? ¿Cómo se dan cuenta?

b) ¿Cuánto desciende cada tirolesa al recorrer 1 metro sobre el cable?

c) Los encargados del complejo recreativo quieren utilizar un banderín con estrellas para indicar el nivel de dificultad de cada tirolesa y así poder diferenciarlas: el banderín correspondiente a la tirolesa menos inclinada tendrá una estrella y la cantidad de estrellas aumentará gradualmente a medida que aumente el nivel de dificultad, esto es, a medida que aumente la inclinación de la tirolesa.



Indiquen la cantidad de estrellas que colocarían en cada banderín.

El ítem a) plantea la necesidad de desplegar estrategias de comparación. Para su abordaje los estudiantes tendrán que tomar algunas decisiones. Por ejemplo, ¿qué par de tirolesas conviene comenzar a analizar? ¿De qué modo realizar la comparación? ¿Es necesario comparar todas las tirolesas? ¿Cómo habría que organizar la información del problema y los resultados parciales para cada tirolesa?

El manejo de tanta información puede provocar cierta incertidumbre en los estudiantes. Sin embargo, la posibilidad de resolver la actividad de diferentes modos quizás favorezca la confrontación entre diferentes posturas. Si bien no hay una única forma de responder a la consigna, se espera que los estudiantes vayan desarrollando estrategias para reducir la cantidad de comparaciones.

El docente podrá intervenir proponiendo, por ejemplo, que hagan tablas para cada tirolesa en las cuales vayan completando posibles valores que conserven la inclinación y sirvan para comparar esa tirolesa con alguna de las otras. Un método que quizás resulte conveniente es considerar dos tirolesas con alturas iguales y analizar la longitud del recorrido en cada caso.

En la actividad anterior ya se ha determinado que la inclinación de la tirolesa C es mayor que la inclinación de la tirolesa B. Y que la A también es más inclinada que la B. ¿Pero cómo determinar entre la tirolesa A y la C cuál es más empinada? Se puede considerar una tirolesa de igual inclinación que la A pero con otra altura (ver tabla). De este modo, se llega a la conclusión de que la inclinación de la tirolesa C es mayor que la inclinación de la tirolesa A.

TIROLESA A	
Altura	Distancia recorrida
12	20
6	10
30	**50**

TIROLESA C	
Altura	Distancia recorrida
30	**34**

En las comparaciones anteriores, tomar en consideración "tirolesas equivalentes" (o de igual inclinación) pero con otra altura permite decidir, entre dos tirolesas, cuál es la más empinada. En este caso, la idea que lo sustenta es: "Una tirolesa es más empinada que otra si para la misma altura, la longitud recorrida es menor".

Otra alternativa es que los estudiantes analicen cuánto desciende cada tirolesa ante un recorrido de igual distancia. De esta manera, la idea intuitiva que permite avanzar en la resolución es la siguiente: "Una tirolesa es más empinada que otra si para la misma longitud recorrida desciende más altura".

En el caso de las tirolesas C y D se pueden establecer medidas proporcionales y determinar, al igual que en los casos anteriores, una altura común o una distancia recorrida común, y así poder compararlas. Pero también se puede argumentar que, haciendo un mayor recorrido, en la D se desciende menos altura que en la C.

Los valores elegidos para la tirolesa E podrían dificultar su comparación con las demás. Si eso ocurriera, este estudio podría postergarse o proponerse una comparación aproximada. Por ejemplo:

TIROLESA C	
Altura	Distancia recorrida
30	34
60	**68**

TIROLESA E	
Altura	Distancia recorrida
40,2	**67**

En este caso, se observa que para un recorrido prácticamente de la misma longitud, las alturas son lo suficientemente diferentes como para argumentar que la tirolesa C es más empinada. A partir de un análisis viable, como el que se ha querido anticipar, los estudiantes podrán concluir que la tirolesa más empinada es la C.

Tal vez haya alguna tirolesa para la cual algunos o algunas estudiantes manifiesten "no estar seguros" si es o no más empinada que otra; o que no logren organizar la información que obtienen luego de realizar algunas comparaciones parciales. Para eso se plantea el ítem b) de la actividad. Este ítem permite volver sobre la pregunta de cuál es la tirolesa más empinada y brinda la posibilidad de encontrar nuevos argumentos que convenzan aún más. La pregunta sobre "cuánto desciende cada tirolesa al recorrer 1 metro sobre el cable" invita a determinar, de algún modo, otro método de comparación.

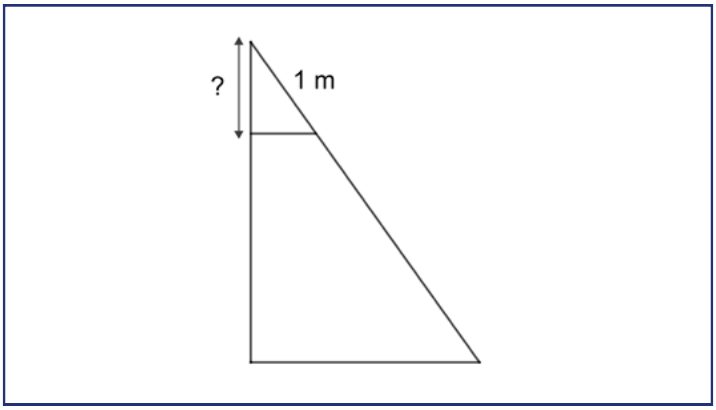
Si se analiza cuánto desciende cada tirolesa cada vez que avanza 1 metro sobre el cable, se pueden comparar las distintas alturas para un mismo recorrido. En este caso, para cada tirolesa quedarán los siguientes valores:

- *Tirolesa A*: si recorre un metro sobre el cable, desciende 0,6 metros.
- *Tirolesa B*: si recorre un metro sobre el cable, desciende aproximadamente 0,35 metros (en este caso habrá que acordar cuántas cifras decimales se tomarán).
- *Tirolesa C*: si recorre un metro sobre el cable, desciende 0,88 metros (al igual que el caso anterior, se han tomado dos cifras decimales detrás de la coma).

- *Tirolesa D*: si recorre un metro sobre el cable, desciende 0,3 metros.
- *Tirolesa E*: si recorre un metro sobre el cable, desciende 0,6 metros.

Es probable que algunos o algunas estudiantes calculen estos valores utilizando proporcionalidad, ya que en cada caso se estaría buscando un triángulo semejante al anterior pero que tenga una hipotenusa de 1 m de longitud. En este momento se podrá aprovechar para reflexionar sobre las técnicas y procedimientos que ellos conocen y utilizan pero que probablemente no saben por qué son válidos.

4



Será interesante detenerse en estos valores y en el modo en que los mismos permiten comparar la inclinación de las tirolesas, dado que se ha establecido una “unidad común”: cuánto desciende cada tirolesa al haber recorrido 1 metro sobre el cable.

En el ítem c) se propone resignificar los valores obtenidos en el ítem b), dado que a partir de los mismos no solo se puede identificar a la tirolesa más empinada sino que también es posible establecer un orden que vaya de la menos inclinada a la más inclinada: cuanto mayor es la cantidad de metros que desciende la tirolesa por metro recorrido, mayor será la inclinación.

En el espacio colectivo se podrá hacer referencia al hecho de que no es necesario tomar las unidades sino que se puede utilizar el valor obtenido como razón. En términos de reflexión para el docente (y no necesariamente para trabajar con sus estudiantes), el valor que se obtiene al hacer la razón

$$\frac{\text{altura descendida}}{\text{longitud recorrida sobre el cable}}$$

es el valor de una razón trigonométrica (seno o coseno, de acuerdo al ángulo considerado como referencia). En cambio, si se deduce mediante proporcionalidad, el resultado será la cantidad de metros que se desciende por cada metro que se recorre sobre el cable.

Después del trabajo con esta actividad, es importante resaltar que el número que se obtiene al tomar la razón

$$\frac{\text{altura descendida}}{\text{longitud recorrida sobre el cable}}$$

permite caracterizar, de alguna manera, la inclinación de cada tirolesa y sirve para determinar si una tirolesa es más empinada que otra o si tienen la misma inclinación. Momentáneamente, se podría llamar a ese número (que luego será el seno o el coseno del ángulo considerado) como “razón de inclinación”.

A partir de lo trabajado, podrían surgir algunos interrogantes con respecto a los ángulos. Por ejemplo, si será posible conocer la amplitud de los ángulos de inclinación, o de qué modo podremos saber cuánto mide el ángulo en cada una de las tirolesas a partir de la “razón de inclinación”. Por el momento, será conveniente dejar abiertas estas preguntas y destacar cómo la razón de inclinación permite comparar la inclinación de las tirolesas.

A continuación se presenta una actividad de cierre para el trabajo de estas dos actividades. La misma consiste en escribir en el pizarrón algunas afirmaciones para que los alumnos y las alumnas decidan si son verdaderas o falsas. Proponemos las afirmaciones de la actividad que sigue solo a modo de ejemplo, estas podrán reemplazarse por otras que se hayan registrado durante el trabajo realizado hasta el momento:

ACTIVIDAD 3

Consideren las siguientes afirmaciones para determinar si son verdaderas o falsas:

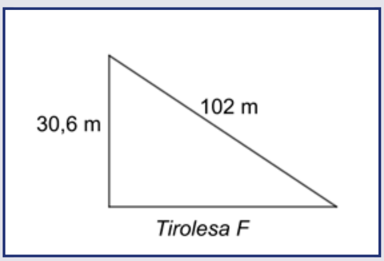
a) Una tirolesa es más empinada que otra si tiene mayor altura.
b) Si se quiere elegir la más empinada entre dos tirolesas, hay que elegir la que desciende una altura mayor al recorrer un metro sobre el cable.
c) Una tirolesa es más empinada que otras si el ángulo de inclinación es mayor.
d) Si dos tirolesas descienden lo mismo, es más empinada la que recorre una mayor longitud.

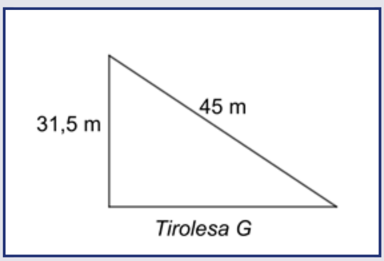
Junto con esta actividad, también se les puede pedir a los estudiantes que formulen nuevas afirmaciones: una verdadera y otra que resulte falsa. También se les puede proponer que completen otras afirmaciones para que resulten verdaderas, o que entre todos formulen nuevas afirmaciones verdaderas en el pizarrón.

Las actividades que siguen ponen en juego las ideas producidas anteriormente. Pero, a su vez, permiten empezar a trabajar un modo de encontrar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo conociendo solamente la medida de otro lado y el valor que ha de tener el cociente entre ambos.

ACTIVIDAD 4

En el complejo quieren construir una nueva tirolesa con distinta inclinación que las anteriores. Decidan si los siguientes diseños cumplen con dicho requerimiento y expliquen cómo se dan cuenta:





En esta actividad se reinvierte el conocimiento de que el número que se obtiene al hacer $\frac{\text{altura de la tirolesa}}{\text{longitud recorrida}}$ permite representar la inclinación de esa tirolesa, además de representar cuánto desciende la tirolesa por un metro recorrido. De esta forma, se puede asegurar que dos tirolesas tienen la misma inclinación si la razón

$$\frac{\text{altura de la tirolesa}}{\text{longitud recorrida}}$$

da el mismo número. De lo contrario, se puede afirmar que una de ellas es más empinada que la otra.

Se puede realizar una síntesis con el total de la clase en donde se establezcan las primeras conclusiones:

- Si calculamos la razón entre la altura de la tirolesa y la longitud recorrida, obtenemos un número. Este número indica cuántos metros se desciende por cada metro recorrido en la tirolesa y además permite caracterizar la inclinación (y el ángulo asociado a ella) del siguiente modo:
  - si en dos tirolesas de diferentes medidas, esta razón nos da el mismo resultado, esto implica que ambas tirolesas tienen la misma inclinación (es decir, el mismo ángulo);
  - si este número no coincide, entonces ambas tirolesas tendrán diferente inclinación y, además, es posible comparar sus ángulos: “cuanto mayor es el número, mayor será la inclinación”.

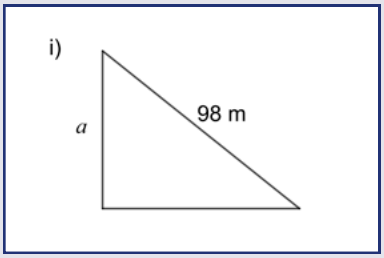
En la última actividad de esta parte se propone el diseño de tirolesas.

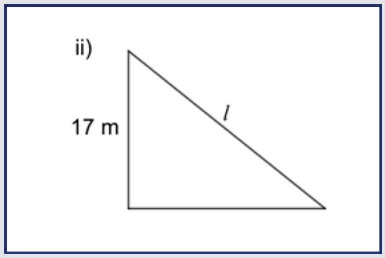
ACTIVIDAD 5

El dueño del complejo turístico decide ampliar las instalaciones y solicita la construcción de un nuevo circuito de tirolesas.

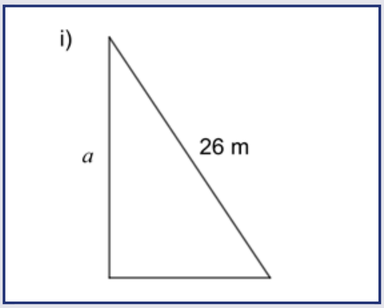
a) Propongan 3 pares de medidas posibles para armar tirolesas que mantengan la inclinación de la tirolesa C, teniendo en cuenta que la altura de las mismas no debe ser mayor de 70 metros.

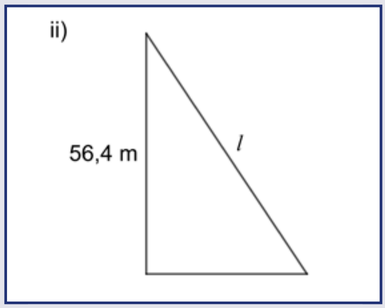
b) Los siguientes diseños corresponden a tirolesas que deben tener la misma inclinación que la tirolesa D. En cada uno, determinen cuál debe ser la medida de la altura o de la longitud del recorrido:





c) Los siguientes diseños corresponden a tirolesas que deben tener la misma inclinación que la tirolesa E. En cada uno, determinen cuál debe ser la medida de la altura o de la longitud del recorrido:





En el ítem a) se propone diseñar nuevas tirolesas con la misma inclinación que una tirolesa "conocida". En este caso, las medidas elegidas para la altura y la longitud del recorrido deberán determinar la misma razón de inclinación que la tirolesa C.

Es posible que algunos alumnos busquen tirolesas equivalentes a partir de las medidas 30 m y 34 m (altura y longitud de la tirolesa C) pero otros recurran a la aproximación de la razón de inclinación obtenida en la actividad 2 (0,88). De esta manera, en el aula podrían circular diferentes respuestas que provienen de considerar estas dos situaciones. Por ejemplo: altura 15 m y longitud recorrida 17 m; o altura 8,8 m y longitud recorrida 10 m.

En los ítems b) y c) se continúa poniendo en juego el valor de la razón de inclinación, ese número que en los dos problemas anteriores sirvió para comparar. No obstante, aquí se utiliza de un modo distinto: permite determinar la medida de la altura o la distancia recorrida en tirolesas con la misma inclinación que una tirolesa dada.

A modo de cierre, se puede proponer a los estudiantes la confección de un método que permita calcular la altura a partir de conocer la longitud de la tirolesa y el valor de la inclinación que se quiere, y otro para hallar la longitud a partir del valor de la inclinación requerida y la altura de la tirolesa.

$$\text{altura} = \text{razón de inclinación} \times \text{longitud}$$

$$\text{longitud} = \frac{\text{altura}}{\text{razón de inclinación}}$$ [1]

Al finalizar esta secuencia de cuatro actividades, será interesante hacer una síntesis de lo trabajado, así como también resaltar los diferentes usos de la razón entre la altura y la longitud:

- Caracteriza, de algún modo, la amplitud de un ángulo.
- Permite comparar ángulos.
- Dado un valor de la razón, es decir, una determinada inclinación, se puede calcular la medida de un lado sabiendo la medida del otro.

Si no se ha discutido previamente, el docente podrá explicitar y dejar abierta la siguiente pregunta: "*¿Es posible saber cuál es la amplitud de un ángulo a partir del valor de la razón?*".

Quizás, los chicos ensayen respuestas como "no es posible saber", "se puede hacer la construcción a escala y medir el ángulo con algún instrumento", etc. En este momento se propone explicitar con los chicos que esta pregunta queda abierta y que va a ser estudiada con las actividades que siguen.

Hasta el momento, las actividades giraron en torno a diseñar y comparar tirolesas. Este contexto permite discutir varias cuestiones vinculadas con los triángulos rectángulos, la relación entre sus lados y sus ángulos, así como invariantes que se mantienen cuando esos triángulos rectángulos son semejantes.

1. Este será un buen momento para discutir de qué modo se resuelven ecuaciones del estilo $\frac{a}{x} = b$ en donde a y b son números y x es la variable.

Brevemente, podríamos decir que:

- Tanto en la actividad 1 como en la 2, al comparar las inclinaciones de las tirolesas a partir de la relación entre los lados de los triángulos rectángulos que las modelizan, comenzó a aparecer un número que es la razón entre la altura descendida y la longitud del recorrido. Ese número permite, de algún modo, cuantificar esa inclinación. Más adelante, dicho número será definido como el coseno del ángulo de inclinación (en el caso de que se tome el ángulo entre la altura y la hipotenusa) o el seno del ángulo de inclinación (en el caso de que se tome el otro ángulo).
- En las actividades 4 y 5 se puede decidir si dos tirolesas tendrán o no la misma inclinación apelando a ese "número razón". De este modo, una inclinación igual entre dos o más tirolesas implica que esos triángulos que las modelizan son semejantes. Y una determinada inclinación (o ángulo de inclinación) se encuentra relacionada –o es posible de cuantificar– por una razón: $\frac{\text{altura}}{\text{longitud}}$. A su vez, conociendo esa razón, se pudo calcular la altura de una tirolesa a partir de la longitud del recorrido, o al revés.

PARTE 2: CONOCIENDO EL VALOR DE LOS ÁNGULOS A PARTIR DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

¿Cómo se puede conocer el valor de un ángulo a partir de longitudes?

Etapa 1: el caso del coseno

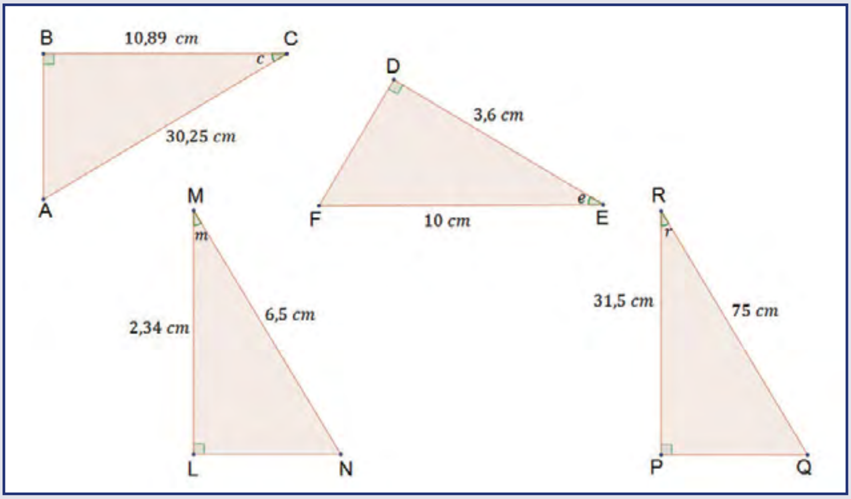
En las actividades que siguen se descontextualiza lo estudiado en el parque de tirolesas y se comienza a trabajar con las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo pensando la razón de inclinación como un invariante en triángulos rectángulos semejantes.

En el recorrido propuesto en esta parte, se espera una sistematización teórica de las primeras razones trigonométricas abordadas.

En particular, la actividad que sigue está pensada para realizar una síntesis de lo trabajado hasta el momento y como escenario propicio para definir el coseno de un ángulo.

ACTIVIDAD 1

Decidan si los ángulos c, e, r y m tienen la misma amplitud.



En esta actividad, para poder decidir si los ángulos son iguales, se espera que los alumnos recurran a la razón de inclinación utilizada anteriormente. Sin embargo, al tratarse de una actividad en contexto intramatemático y con triángulos en diferentes “posiciones”, esta razón ya no será entre la altura y la longitud de la tirolesa (hipotenusa), sino que los estudiantes deberán identificar que dicha razón se establece entre los lados que “forman el ángulo” que se quiere comparar. Como es probable que algún alumno o alumna reconozca la hipotenusa en el triángulo rectángulo, el docente puede indicar que el cateto que “forma ese ángulo” recibe el nombre de “cateto adyacente al ángulo”.

Por lo tanto, para comparar los ángulos en los triángulos dados se deberá calcular la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa (o también entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo), y a partir de dicho valor se podrá decidir cuáles son los ángulos que tienen la misma amplitud.

De este modo, si se elige

$$\frac{\text{cateto adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}},$$

quedarán cuatro cocientes:

1) $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \dfrac{10{,}89 \text{ cm}}{30{,}25 \text{ cm}} = 0{,}36$

2) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EF}} = \dfrac{3{,}6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}36$

3) $\dfrac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \dfrac{31{,}5 \text{ cm}}{75 \text{ cm}} = 0{,}42$

4) $\dfrac{\overline{ML}}{\overline{MN}} = \dfrac{2{,}34 \text{ cm}}{6{,}5 \text{ cm}} = 0{,}36$

En los casos de los triángulos ABC, DEF y LMN, ese valor es el mismo. Sin embargo, en el triángulo PQR se obtiene un número distinto.

De esta manera, se puede afirmar que el ángulo *r* no es igual a los otros, ya que la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa da diferente. Como ya se ha visto en las actividades anteriores, este valor caracteriza al ángulo. Resulta entonces que, para cualquier triángulo rectángulo que tenga el mismo ángulo agudo que los triángulos ABC, DEF y LMN, este cociente nos dará el mismo resultado independientemente de la medida de los lados de dicho triángulo: lo que se "mantiene" es el ángulo y, por lo tanto, la razón entre dichos lados. Es decir, este valor es un invariante presente en triángulos rectángulos semejantes.

Como aclaración para el docente, es necesario tener en cuenta que cuando la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa es la misma en dos o más triángulos rectángulos, los ángulos comparados en dichos triángulos son iguales y, por lo tanto, se puede afirmar que son triángulos semejantes. Sin embargo, si la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa da un valor diferente al obtenido en otro triángulo, es posible afirmar que ese ángulo no es igual a los otros, pero no es motivo suficiente para decidir si los triángulos son semejantes o no, esto dependerá del ángulo que no fue comparado.

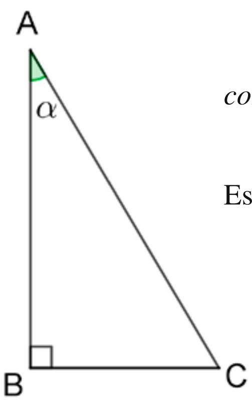
Elaborar teoría con nuestros estudiantes

La actividad 1 es un buen punto de apoyo para empezar a incorporar ciertas cuestiones teóricas. Queremos detenernos en este asunto. Si bien las razones trigonométricas necesitan ser definidas por el docente, el trabajo previo realizado por los alumnos y las alumnas puede servir como referencia para dar mayor sentido a las cuestiones teóricas que se definirán posteriormente. Así, la definición aparece como el punto de llegada de un trabajo en el cual la noción a definir estuvo en juego.

Por lo tanto, después de este trabajo el docente podría definir que ese número que caracteriza al ángulo tiene un nombre: es el coseno del ángulo.

En esta instancia, el docente puede proponer, de algún modo general, la definición de coseno de un ángulo. Solo a modo de ejemplo, se puede dibujar un triángulo rectángulo ABC y escribir la fórmula para el coseno del ángulo:

5

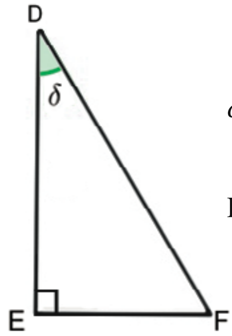


$$cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

Es decir que: $cos\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Por otra parte, si en el triángulo rectángulo DEF (imagen 6) además se cumple que *cos* α = *cos* δ, se puede afirmar que los ángulos α y δ son congruentes y que, por lo tanto, ambos triángulos son semejantes ya que al contar con dos ángulos iguales (el ángulo estudiado y el recto), tendrán el tercer ángulo igual.

6



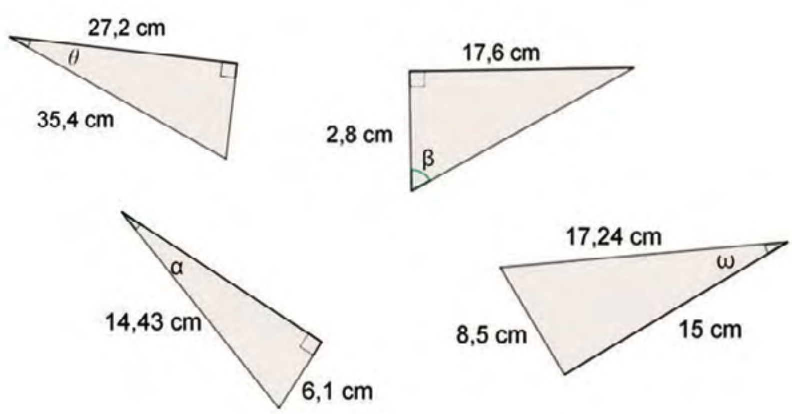
$$cos\ \delta = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\delta}}{\text{hipotenusa}}$$

Es decir que: $cos\ \delta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$

Si fuera necesario, el o la docente podrá aclarar que si bien la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo también es invariante en triángulos rectángulos semejantes, esta razón no recibe el nombre de coseno del ángulo. Además, quizás necesite resaltar que, por el momento, se seguirá trabajando con la razón indicada como coseno del ángulo. A continuación, se sugieren un par de actividades que ponen en juego el coseno de un ángulo sin saber todavía el valor del ángulo.

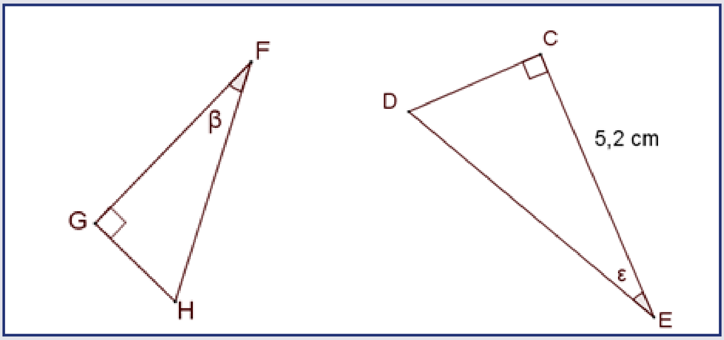
ACTIVIDAD 2

En cada caso, calculen el coseno del ángulo indicado con una letra. ¿Algunos de esos ángulos son iguales?



ACTIVIDAD 3

Determinen la medida del lado DC, teniendo en cuenta que $\hat{\beta} = \hat{\varepsilon}$ y, que *cos* β = 0,4.



Las tablas trigonométricas como recurso para determinar el ángulo o para calcular el coseno de un ángulo dado

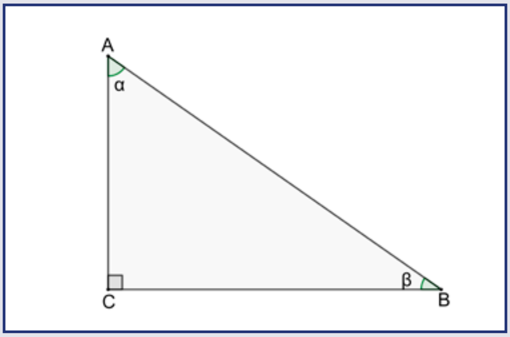
En las siguientes actividades se propone un trabajo en el que se pondrán en juego las siguientes ideas:

- Si se conoce el valor del coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como hay infinitos triángulos rectángulos que tienen ese ángulo agudo, no es posible conocer las medidas de los lados de ese triángulo.
- ¿Qué valores puede tomar el coseno de un ángulo? Por ejemplo, ¿puede ser que *cos* α = 2?

Finalmente, para determinar la medida del ángulo que se está considerando, se propone la utilización de las tablas trigonométricas. De este modo, se podrá determinar la medida de un ángulo sabiendo el valor del coseno y, a la inversa, determinar el valor del coseno del ángulo conociendo la amplitud del mismo. Posteriormente, este trabajo se podrá realizar utilizando la calculadora científica.

ACTIVIDAD 4

Decidan, en cada caso, si es posible construir un triángulo rectángulo ABC que cumpla lo pedido. Si piensan que es posible, indiquen las medidas de sus tres lados. Si piensan que no se puede, expliquen por qué.



a) Que tenga un ángulo α cuyo coseno sea 0,5 y que la hipotenusa mida 8,3 cm.

b) Que tenga un ángulo α que cumpla *cos* α = 0,5.

c) Que tenga un ángulo β tal que *cos* β = 4 y que la hipotenusa mida 8, 3 cm.

d) Que *cos* α = 2 y el cateto adyacente al ángulo α mida 7,5 cm.

e) Que *cos* β = 0,25 y el cateto adyacente al ángulo β mida 6 cm.

Con esta actividad se intenta analizar, por un lado, qué valor puede tomar el coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo y, por otro, en qué casos el triángulo rectángulo queda completamente determinado a partir de ciertos datos.

Por ejemplo, en el caso de *cos* β = 4 e hipotenusa 8,3 cm, algunos estudiantes podrán determinar un valor, a partir de la igualdad:

$$\frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = 4$$

$$\text{Cateto adyacente al ángulo } \beta = 4 \times 8{,}3 \text{ cm} = 33{,}2 \text{ cm}$$

Sin embargo, habrá que analizar que no puede haber un triángulo rectángulo que tenga un cateto que mida 33,2 cm cuya hipotenusa mida 8,3 cm. Por otra parte en a), b) y e) será interesante discutir sobre la cantidad de soluciones que hay en cada caso. Es decir, el coseno del ángulo determina una relación entre la medida de los lados de dicho triángulo rectángulo, pero si no se conoce la medida de uno de los lados, lo que se puede determinar es una familia de triángulos rectángulos semejantes.

Al finalizar esta actividad, el docente podrá realizar una síntesis indicando que, dado que el coseno de un ángulo se define como la razón entre un determinado cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, este valor estará comprendido entre 0 y 1, ya que la hipotenusa siempre es mayor que los catetos.

Además, si solo se conoce el valor del coseno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, no es posible determinar exactamente cuáles serán las medidas de los lados de este, ya que existen infinitos triángulos que cumplen esa condición. Lo que sí se puede afirmar es que todos los triángulos que, por ejemplo, tengan $cos\ \alpha = 0{,}25$ tendrán los mismos ángulos.

Luego de realizar esta actividad el docente podrá proponer una pregunta en torno a la posibilidad de encontrar el valor del ángulo conociendo el valor del coseno de ese ángulo. Por ejemplo: “Si sabemos que el coseno de un ángulo es 0,25, ¿cuánto mide este ángulo?”.

Aquí nos interesa señalar que no hay una forma de calcular (en el sentido de hacer una cuenta) que permita conocer cuánto mide ese ángulo. Solo en unos pocos casos particulares sería posible, mediante un razonamiento deductivo y con los conocimientos disponibles, determinar el valor exacto del ángulo que corresponde a un determinado valor de coseno, por ejemplo el caso donde el coseno es igual a 0,5 (véase el Anexo 1, al final del capítulo). También se podría analizar, para algunos casos particulares, la situación inversa: dado un determinado ángulo, determinar el valor del coseno (Anexo 2).

Una posibilidad es realizar la construcción de un triángulo rectángulo en el que la razón entre un cateto y su hipotenusa sea 0,25 (por ejemplo, cateto 2,5 cm e hipotenusa 10 cm), esto implica que el coseno de uno de sus ángulos es igual a 0,25, y luego se podrá medir ese ángulo. Entendemos que este tipo de cálculo aproximado con construcciones o dibujos resulta una actividad importante debido a que otorgan más sentido a lo que se está elaborando. Pero al mismo tiempo, creemos necesario recurrir a otras estrategias ya que es un procedimiento que conlleva errores de medición y podrían aparecer en el aula diferentes valores para la amplitud de un mismo ángulo. Por otra parte, además de ser un procedimiento inexacto, es realmente muy trabajoso realizarlo en cada caso que se estudie.

Quizás se le pueda contar a los y las estudiantes que, a lo largo de la historia, muchas matemáticas y matemáticos han trabajado sobre estos problemas y han ido volcando algunos valores en tablas. Los mismos se fueron precisando cada vez con mayor exactitud. En la actualidad, estos valores se pueden determinar utilizando la calculadora científica.

Proponemos un primer abordaje al problema de encontrar el ángulo agudo cuyo coseno es igual a 0,25 a partir del uso de una tabla trigonométrica con valores enteros para los ángulos. No desconocemos que el ángulo de 0º y el de 90º no tendrían sentido en términos de ángulos agudos posibles para un triángulo rectángulo. Sin embargo, sostenemos su aparición en la tabla para que sean tomados en cuenta, sobre todo al momento posterior de definir las funciones trigonométricas. En la tabla es posible analizar que el ángulo estará entre 75º y 76°, pero por el momento no se podrá determinar un valor más aproximado.

Ángulo	Coseno		Ángulo	Coseno		Ángulo	Coseno	
0°	1,000		8°	0,990		16°	0,961	
1°	0,9998		9°	0,988		17°	0,956	
2°	0,9993		10°	0,985		18°	0,951	
3°	0,998		11°	0,982		19°	0,946	
4°	0,997		12°	0,978		20°	0,940	
5°	0,996		13°	0,974		21°	0,934	
6°	0,995		14°	0,970		22°	0,927	
7°	0,993		15°	0,966		23°	0,921	

Ángulo	Coseno		Ángulo	Coseno		Ángulo	Coseno	
24°	0,914		46°	0,695		68°	0,375	
25°	0,906		47°	0,682		69°	0,358	
26°	0,899		48°	0,669		70°	0,342	
27°	0,891		49°	0,656		71°	0,326	
28°	0,883		50°	0,643		72°	0,309	
29°	0,875		51°	0,629		73°	0,292	
30°	0,866		52°	0,616		74°	0,276	
31°	0,857		53°	0,602		75°	0,259	
32°	0,848		54°	0,588		76°	0,242	
33°	0,839		55°	0,574		77°	0,225	
34°	0,829		56°	0,559		78°	0,208	
35°	0,819		57°	0,545		79°	0,191	
36°	0,809		58°	0,530		80°	0,174	
37°	0,799		59°	0,515		81°	0,156	
38°	0,788		60°	0,500		82°	0,139	
39°	0,777		61°	0,485		83°	0,122	
40°	0,766		62°	0,470		84°	0,105	
41°	0,755		63°	0,454		85°	0,087	
42°	0,743		64°	0,438		86°	0,070	
43°	0,731		65°	0,423		87°	0,052	
44°	0,719		66°	0,407		88°	0,035	
45°	0,707		67°	0,391		89°	0,017	
						90°	0,000	

En esta oportunidad, se propone un trabajo con la tabla previo a la utilización de la calculadora científica, considerando que la tabla favorece la idea de que cuando se calcula el coseno de un ángulo no se está realizando una cuenta con ese ángulo. En este sentido las actividades planteadas permiten un ida y vuelta entre el ángulo y el valor del coseno. Es decir, dado un ángulo determinado calcular su coseno y, conociendo el coseno de cierto ángulo, determinar la amplitud del mismo. Al tener esta información en forma de tabla, es posible que sea más simple poder diferenciar el ángulo del coseno del mismo. Esta situación muchas veces confunde a los estudiantes debido a que estos procedimientos quedan ocultos cuando se usa la calculadora científica, donde con la misma tecla se obtienen ambos resultados: uno tecleando *cos* y el valor del ángulo; el otro, con *Shift*, *cos* y el valor de la razón calculada para ese ángulo.

De esta manera, el docente podría realizar preguntas que requieran interpretar la forma en que se construyó la tabla. A modo de ejemplo:

El coseno del ángulo de 45° es ....

Cos 30° = ...

El ángulo cuyo coseno es 0,574 es ....

Si $cos\ \alpha = 0{,}934$, entonces $\hat{\alpha} =$ ....

Cada docente decidirá si sostiene por un tiempo el trabajo con la tabla o bien incorpora el uso de la calculadora científica, en un principio para comprobar lo que dice la tabla y, luego, para calcular otros valores que no están en la misma. De todos modos, es esperable que el trabajo previo utilizando la tabla en una y otra dirección (ángulo-coseno o coseno-ángulo) fortalezca y le dé más sentido al posterior uso de la calculadora científica.

Etapa 2: relación entre seno y coseno de ángulos complementarios

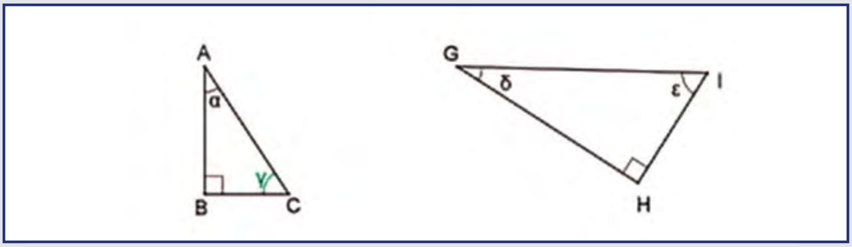
En las siguientes actividades se propone analizar otras posibles razones que se dan entre otros lados en un triángulo rectángulo. La idea es discutir que no solo mediante la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa se pueden comparar dos ángulos de distintos triángulos rectángulos sino que se podrían considerar otras posibles razones entre otros (dos) lados: en los triángulos rectángulos, cada razón tomada entre dos lados permite caracterizar sus ángulos. El análisis de estas nuevas razones permitirá definir el seno y la tangente de un ángulo.

Es importante destacar que para calcular estas razones hay que "mirar" el ángulo que se quiere comparar y la "posición que ocupan" los lados del triángulo con respecto a ese ángulo. Porque se pueden tener dos razones que den el mismo resultado, pero tratarse de ángulos diferentes: por ejemplo, considerando en un triángulo la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto al ángulo; y, en el otro, el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. También se pueden obtener dos razones distintas y de todas formas estar frente a triángulos semejantes.

En la siguiente actividad, se comienzan a poner en juego algunas de estas cuestiones con la intención de definir el seno de un ángulo a partir del coseno de su complementario.

ACTIVIDAD 5

Frente a los triángulos ABC y GHI, donde $\overline{AB} = 14{,}1$ cm, $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{HI} = 8{,}55$ cm, y $\overline{GI} = 25$ cm, Adrián y Estela no se ponen de acuerdo.



- Adrián sostiene: "Para mí, los ángulos α y δ no son iguales porque si calculás, $cos\ \alpha = \frac{14{,}1 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 0{,}94$, mientras que si calculás el $cos\ \delta = \frac{8{,}55 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 0{,}342$".
- Estela no está de acuerdo. "Lo que decís es incorrecto, porque el *cos α* es 0,94 y según la tabla ese ángulo es de 20°. Y la cuenta $\frac{8{,}55 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 0{,}342$ es el coseno de $\hat{\varepsilon}$, no de $\hat{\delta}$. Y en la tabla, ese ángulo es de 70°. Si $\hat{\varepsilon} = 70°$, entonces $\hat{\delta} = 20°$. Por lo tanto, los ángulos α y δ miden lo mismo".

¿Cuál de los dos tienen razón? ¿Es cierto que los ángulos α y δ son iguales?

Lo que se plantea en este problema es que si se calcula la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa se obtiene el coseno del ángulo, pero si se tiene como dato el otro cateto (en este caso el opuesto al ángulo δ), lo que se obtiene con el cociente entre el cateto y la hipotenusa es el coseno del ángulo complementario a δ.

Hasta el momento, se trabajó en actividades donde se afirmaba que si la razón

$$\frac{\text{altura descendida}}{\text{longitud de la tirolesa}}$$

daba distinto al comparar dos tirolesas, entonces las tirolesas tenían diferente inclinación. Sin embargo, estas afirmaciones son ciertas en el contexto de las tirolesas, dado que la ubicación de los lados con respecto al ángulo estaba dada por la altura y la longitud del recorrido.

En la actividad 5, la forma en que se presentan los datos no está vinculada a un contexto extramatemático que permita analizar el ángulo en relación con los lados. Por lo tanto, es posible que se calcule la razón entre los números dados sin analizar la "posición" de dichos lados con respecto a los ángulos que se desea comparar. Esto puede observarse en las palabras de Adrián, que calcula dos razones y obtiene diferentes resultados para cada triángulo. Sin embargo, en este caso los triángulos tienen ángulos congruentes.

Se hace evidente entonces que es necesario analizar si el cateto considerado es el cateto adyacente al ángulo o si es el cateto opuesto. En este caso, Adrián calcula la razón entre cateto adyacente a $\hat{\alpha}$ y la hipotenusa; y entre el cateto opuesto a $\hat{\delta}$ y la hipotenusa. Como dice Estela, lo que calcula es el coseno del ángulo α y el coseno del ángulo ε. Una nueva cuestión que pone en juego esta actividad es que a partir de una razón distinta a la que hay entre el cateto adyacente a $\hat{\delta}$ y la hipotenusa, precisamente mediante la razón

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\delta}}{\text{hipotenusa}}$$

podría determinarse cuál es la amplitud del ángulo δ. Esto puede verse en palabras de Estela y tiene que ver con la posibilidad de determinar, mediante la tabla, su ángulo complementario. Por lo tanto, esta razón también permite caracterizar, de algún modo, al ángulo δ.

Elaborar teoría con los estudiantes

Es momento de presentar a esta razón como el seno del ángulo δ. Es decir, así como el coseno de un ángulo es igual a la razón entre el cateto adyacente a ese ángulo y la hipotenusa, el seno de un ángulo se obtiene haciendo el cociente entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa.

Cada docente podrá realizar aquí una síntesis y definir el seno de un ángulo. Posteriormente, se propone analizar esta otra relación: “Conociendo el coseno de un ángulo es posible conocer el seno del ángulo complementario”. A partir de esta última, se les propone a los chicos una nueva actividad.

ACTIVIDAD 6

En la tabla del coseno de un ángulo habrán observado que hay una columna sin completar. Esa columna corresponde al seno del mismo ángulo. Completen la tabla trigonométrica.

Apelando a la relación $sen\ b = cos(90° - \hat{b})$, se puede proponer completar la tabla trigonométrica que se les ha entregado anteriormente pero que cuenta con una columna vacía junto a los valores del coseno. Justamente se ha dejado esta columna para completar ahora los valores del seno de esos ángulos.

A modo de ejemplo proponemos algunas preguntas en ida y vuelta con los chicos, que podrían guiar esta actividad:

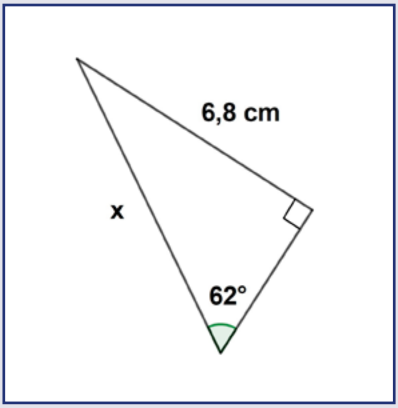
- “En la tabla, a partir del coseno de 30°, ¿se puede completar el seno de qué ángulo?” (se busca en la tabla y se completa.)
- “El seno de un ángulo de 50°, por ejemplo, se calcula como el coseno del otro ángulo agudo en el triángulo rectángulo. ¿El coseno de qué ángulo sería?” (se busca en la tabla y se completa la columna del seno).

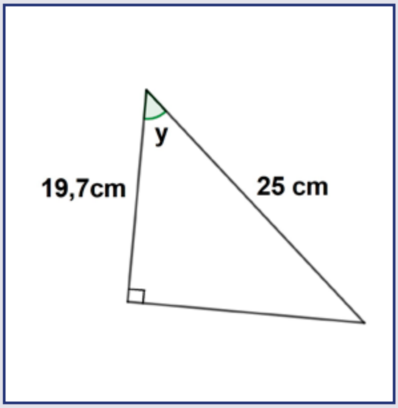
- "Si *cos a* = 0,643, ¿entonces *sen a* = ...?"
- "Sabiendo que *cos* 14° = 0,97 determinen *sen* 14° = ... y *sen* 76° = ...?" (se buscan en la tabla y se completan).
- "¿Es posible que el *sen a* = *cos a*? ¿Por qué?"

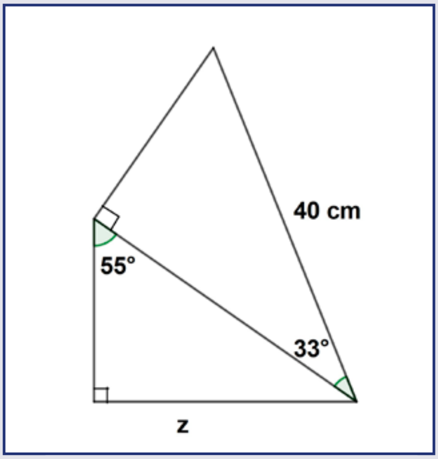
Luego de completar la tabla se pueden proponer algunos problemas que involucren lo trabajado hasta el momento. Como ejemplo, se sugiere la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 7

En cada caso, calculen los valores indicados con las letras, teniendo en cuenta que los triángulos dibujados son rectángulos:







A continuación se presenta una última actividad que permite introducir la idea de tangente de un ángulo.

ACTIVIDAD 8

En el patio de la escuela, durante la mañana del día 15 de septiembre, se midieron la altura y la longitud de la sombra de algunos objetos. Los datos obtenidos se registraron en la siguiente tabla:

Objeto	Altura	Longitud de la sombra
Mástil	3,5 m	4,2 m
Regla	0,45 m	0,54 m
Puntero	1,7 m	2,55 m

¿Cuáles medidas fueron tomadas a la misma hora?

Los rayos del sol caen sobre la superficie de la Tierra formando una inclinación con la horizontal. Esa inclinación cambia según la estación del año, la latitud del lugar y la hora del día. Para esta consigna, hace falta proponer un criterio que permita afirmar que la sombra de dos objetos fue medida a la misma hora. Es necesario informar sobre el ángulo de incidencia de los rayos solares: los objetos expuestos a los rayos del sol a la misma hora, y en el mismo lugar, lo hacen bajo el mismo ángulo de incidencia.

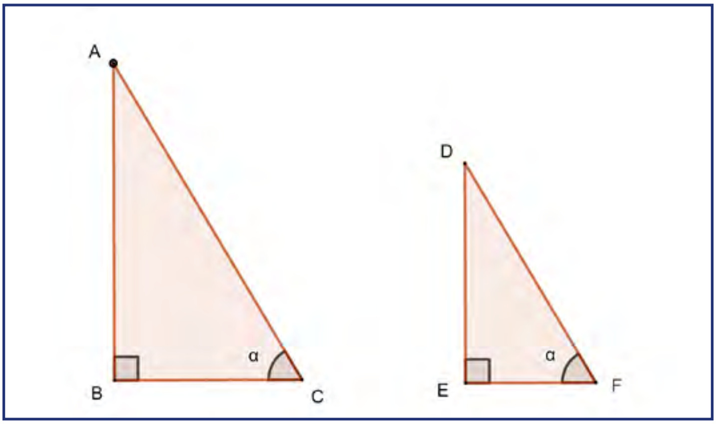
7

Con esta actividad se espera volver a analizar que, en un triángulo rectángulo, la medida de dos lados cualesquiera determina la medida del lado que falta y la de los ángulos. Es decir que, conociendo dos lados de un triángulo rectángulo, este queda determinado completamente. En esta oportunidad, los lados que se conocen son los que forman el ángulo recto y lo que se propone es establecer una relación entre los catetos del triángulo y los ángulos del mismo.

Es posible que, para determinar el ángulo de incidencia, algunos alumnos o alumnas determinen la hipotenusa del triángulo rectángulo que se utiliza para representar la situación (altura del objeto, longitud de la sombra), y luego calculen el seno o coseno de dicho ángulo. Sin embargo, si esto sucede se pondrá en discusión si en los triángulos rectángulos semejantes el cociente entre los dos catetos es el mismo. Para esto se puede apelar a la razón de semejanza:

- Si los triángulos rectángulos ABC y DEF (imagen 8) son semejantes, entonces vale la igualdad $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, ya que es la razón de semejanza. Y a partir de esta igualdad se puede concluir que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$

8



- Con los datos aportados, puede suceder que se tomen dos cocientes:

$$\frac{\text{altura del objeto}}{\text{sombra}}$$

o

$$\frac{\text{sombra}}{\text{altura del objeto}}$$

Nuevamente, será necesario unificar criterios en el espacio colectivo o dejar en claro que esos cocientes deben ser considerados en el mismo orden en cada objeto para poder realizar la comparación. Luego del trabajo en el espacio colectivo, el docente podría definir la tangente de un ángulo, en este caso del ángulo de incidencia, tomando el cociente entre la altura del objeto y su sombra.

Se podría proponer la siguiente pregunta: "¿Cuál es el ángulo de incidencia si en un momento la medida de la sombra es la misma que la medida de la altura del objeto?".

En este caso se apela a analizar que se tiene un triángulo rectángulo isósceles y en ese caso el cociente entre los catetos es 1. Por lo tanto, el ángulo es de 45º. Es así como $tg\ 45° = 1$.

COMENTARIOS FINALES

Hemos querido presentar una entrada posible al trabajo con las razones trigonométricas apelando a la proporcionalidad de segmentos que son lados de triángulos rectángulos. El docente puede continuar con otras actividades que pongan en juego estos conocimientos, permitan ajustar técnicas y profundicen el estudio.

Esta propuesta se enmarca en una concepción de la clase de matemática como un ámbito en el que se despliega actividad matemática, en donde los chicos elaboran conjeturas, las confrontan y ensayan formas de validarlas; donde se los invita a formular preguntas, ensayar respuestas y eventualmente dejar cuestiones pendientes; una clase donde pueden reflexionar sobre las propias producciones y sobre las de otros; y en donde se propone teoría a partir del trabajo producido en un escenario donde la noción a definir ya estuvo puesta en juego.

Lo que un docente propone hacer a sus estudiantes, las preguntas que habilita en el aula, los intercambios que se propician y las intervenciones que realiza van a permitir un tipo de conocimiento producido por nuestros estudiantes. No desconocemos que esto plantea una complejidad del trabajo matemático en la clase y una complejidad del trabajo docente. Aun así, creemos que vale la pena.

BIBLIOGRAFÍA

Balacheff, Nicolas

2000 *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*, traducción de Pedro Gómez, Bogotá, Universidad de los Andes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Boyer, Carl

1999 "La trigonometría y las técnicas de medición griegas", en *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, pp. 211-232.

Duarte, Betina

2010 *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en Matemática. La función exponencial, el razonamiento matemático y la intervención docente en la escuela*, tesis doctoral, Universidad de San Andrés, Escuela de Educación.

Etchemendy, Mercedes y Zilberman, Graciela

2013 "Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros", en Broitman, Claudia (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria. Saberes y conocimientos de niños y docentes*, Buenos Aires, Paidós.

Itzcovich, Horacio *et al.*

2007 *Matemática 5 ES*, La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires-Programa "Textos Escolares para Todos".

Ministerio de Educación (Argentina)

2012 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de la Formación general. Ciclo Orientado Educación Secundaria*, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado?from=150199> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Montiel, Gisela

2005 *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*, tesis de doctorado, IPN-Cicata, México. <https://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11653/1/montiel_2005.pdf> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Napp, Carolina; Novembre, Andrea; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen

2005 *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento N°2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires-Secretaría de Educación. <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Proulx, Jerome

2003 "L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique", en *Bulletin AMQ*, vol. XLIII nº 3, octubre, pp. 13-27.

Quaranta, María Emilia y Wolman, Susana

2003 "Discusiones en la clase de matemática. Qué, para qué y cómo se discute", en Panizza, Mabel (comp.), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós, pp. 189-244.

Sadovsky, Patricia

2005 *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Del Zorzal.

Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen

2000 “Interacciones en la clase de matemática: interferencias no previstas para situaciones previstas”, en *Projeto-Revista de Educaçao*, vol II, nº 3, Porto Alegre, pp. 7-11.

Sadovsky, Patricia y Tarasow, Paola

2013 “Transformar ideas con ideas. El espacio de discusión en la clase de matemática”, en Broitman, Claudia (comp.), Matemáticas *en la escuela primaria. Saberes y conocimientos de niños y docentes*, Buenos Aires, Paidós, pp. 223-236.

Yackel, Erna y Cobb, Paul

1996 “Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics”, en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, nº 4, pp. 458-477.

IMÁGENES

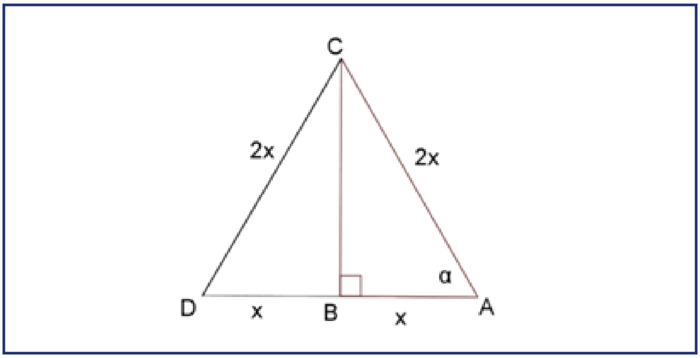
“Tirolesa. Xplor, un lugar lleno de aventura”, reproducida mediante licencia Creative Commons. Fuente: <https://www.flickr.com/photos/dtravellercancun/4482799222/in/photostream/>

ANEXO 1

Si en un triángulo rectángulo ABC, el *cos* $\alpha = 0{,}5$, ¿cuál es la amplitud del ángulo α?

En este caso se puede tomar un triángulo rectángulo en el cual *cos* $\alpha = 0{,}5$. De este modo, si el cateto adyacente al ángulo α lo llamamos x, la hipotenusa será $2x$.

Tomando un triángulo CBD, igual que el anterior, se puede construir el triángulo ACD de modo tal que el segmento BC sea la mediatriz del segmento AD.

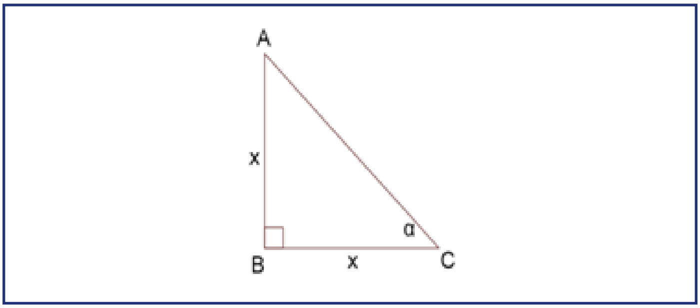


El triángulo ACD es equilátero, porque B es punto medio del segmento AD y los triángulos ABC y CBD son congruentes. Por lo tanto, $\hat{\alpha} = 60°$. Es decir, si en un triángulo rectángulo ABC, el *cos* $\alpha = 0{,}5$, entonces $\hat{\alpha} = 60°$.

ANEXO 2

Si el ángulo $\alpha = 45°$, ¿cómo se puede determinar el coseno de $\hat{\alpha}$ sin utilizar la calculadora?

Si en un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide 45°, podemos afirmar que el otro ángulo también mide 45°. Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces se oponen a esos ángulos iguales dos lados iguales. En consecuencia, tenemos un triángulo isósceles.



Sabemos que el *cos* $\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, es decir *cos* $45° = \frac{x}{\overline{AC}}$. Pero por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

Por lo tanto:

$$\overline{AC}^2 = x^2 + x^2$$

Entonces:

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \times x$$

De este modo, podemos calcular el *cos* 45° como:

$$cos\ 45° = \frac{x}{\sqrt{2} \times x}$$

que es equivalente a:

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando, se obtiene que:

$$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

CAPÍTULO 3

Expresiones polinómicas: producción de fórmulas para contar

Marina Andrés, María Teresa Coronel, Claudia Kerlakian y Carmen Sessa

En la elaboración de esta propuesta se ha considerado el eje "el número y el álgebra" que proponen los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para la Formación General del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, en particular para tercer-cuarto año (Ministerio de Educación, 2012: 15), donde se señala:

> EJE: EN RELACIÓN CON EL NÚMERO Y EL ÁLGEBRA
>
> La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas asociadas al conteo, lo que supone:
>
> - identificar las relaciones multiplicativas
> - generalizar los procedimientos utilizados
> - elaborar las fórmulas vinculadas a dichos procedimientos, si la resolución lo requiere.

Al mismo tiempo, se consideran también otros propósitos que se presentan en el eje "las funciones y el álgebra" de los NAP:

> La interpretación de diferentes escrituras de las fórmulas de las funciones cuadráticas y su transformación mediante las propiedades de las operaciones de números reales (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) si la situación lo requiere (ibíd.: 16).

Esta propuesta se articula en torno a dos actividades, cada una con varios momentos, referidas a la producción de métodos generales para contar colecciones y a las expresiones algebraicas asociadas a esos métodos:

1) La producción de fórmulas cuadráticas para contar elementos en una familia de figuras y el trabajo algebraico sobre la equivalencia de las expresiones.
2) La producción de fórmulas de grado 0, 1, 2 y 3 para contar diferentes subfamilias de elementos que componen un cubo de tamaño variable y una operatoria algebraica provista de sentido por la situación.

Al mismo tiempo, cada grupo de tareas nos permitirá poner de relieve un aspecto transversal del trabajo docente en el aula: las dos propuestas presentan diferentes escenarios para iniciar el trabajo de manera que involucre a los estudiantes en la tarea matemática que se les propone:

- En la primera actividad nos interesa destacar la participación de los estudiantes en la etapa de formulación del problema: a partir de la presentación de tres figuras geométricas se plantea una primera tarea que va a permitir arribar, en el espacio colectivo, a la caracterización de una familia de figuras y a la formulación de un nuevo problema que deberán resolver de manera autónoma. Se llega al enunciado de este nuevo problema después de un trabajo en el aula con plena participación de los alumnos.
- En la segunda actividad nos interesa poner de relieve la necesidad que se plantea en el aula de trabajar con los estudiantes para precisar el significado de un enunciado de la situación dado de forma escrita. Las docentes hacen participar a los estudiantes para lograr claridad en lo que se pide en el problema. Se aseguran con esto buenas condiciones para que todos puedan encarar el trabajo.

Las actividades han sido pensadas en diferentes momentos y todas fueron desarrolladas en nuestras aulas.[1] Presentamos en este documento un breve análisis de las mismas y material de las producciones de los estudiantes[2] que ilustra las frondosas y variadas maneras de pensar y trabajar de los alumnos.

Dar sentido al trabajo algebraico

Ambas actividades refieren al conteo de elementos en familias de objetos geométricos (figuras y cuerpos respectivamente) y a la producción de fórmulas generales para esos cómputos. Probablemente los estudiantes han realizado este tipo de actividades durante el ciclo básico en el contexto de variaciones lineales. Al enfrentar ahora situaciones que requieren de modelos cuadráticos y cúbicos, es posible organizar a partir de ellas un juego algebraico de mayor complejidad. Las expresiones algebraicas que involucran potencias de grado 2 y 3 para la variable aparecen como modelo de cálculos generales y son producidas por los propios estudiantes. Estas actividades permiten hacer presente en el aula la actividad de modelización y potencia del álgebra como lenguaje de lo general. La diversidad de fórmulas que se anticipan hará necesario realizar transformaciones algebraicas con ellas para responder a lo que se pide. Pensamos que en conjunto este tipo de tareas representan una nueva oportunidad para que nuestros estudiantes puedan dotar de sentido a los objetos algebraicos y el tratamiento que sobre ellos se realiza.

1. Las actividades se desarrollaron en las clases de la profesora Marina Andrés, en la Escuela Normal Nº 1 “Presidente Roque Sáenz Peña” de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA); en las clases de la profesora María Teresa Coronel, en el EES N° 20 “EE UU de América” de la localidad de San Martín, Provincia de Buenos Aires; y en las clases de la profesora Claudia Kerlakian, en el colegio Padre Luis María Etcheverry Boneo, de CABA.

2. En una de las actividades incluimos algunos fragmentos de un video de una clase y para otra un fragmento de audio.

PARTE 1: EL CONTEO DE LOS ELEMENTOS EN UNA FAMILIA DE FIGURAS Y LA EQUIVALENCIA DE EXPRESIONES

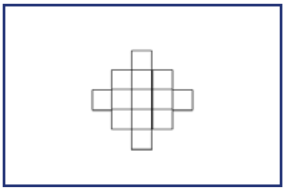
En esta actividad se propone el conteo de ciertos elementos de una figura cuyo "tamaño" varía. Se trata de actividades en las que la escritura x^2 tenga sentido y que al mismo tiempo generen la necesidad de un trabajo algebraico sobre las expresiones producidas. Uno de los objetivos será producir una fórmula que cuente la cantidad de elementos de la figura en función de su tamaño. En este caso, las fórmulas que se producen son cuadráticas. Apoyarse en la figura que aparece en el problema permitirá discutir sobre la equivalencia de las distintas expresiones que representan el conteo. De este modo, algunas reglas clásicas de transformaciones algebraicas (extracción del factor común y la propiedad distributiva, cuadrado de un binomio, etc.) toman sentido en la discusión sobre las equivalencias.

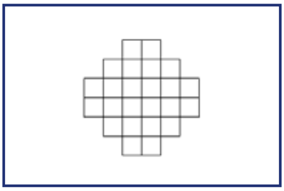
El problema que aquí presentamos integró una propuesta de trabajo sobre funciones cuadrática elaborada por un grupo de docentes y especialistas (incluidas las cuatro autoras de este capítulo) y publicada por la Dirección de Currícula del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires (Illuzzi *et al.*, 2014). En el primer apartado de esa propuesta se presentaba una serie de actividades de conteo de colecciones que derivan en fórmulas cuadráticas.

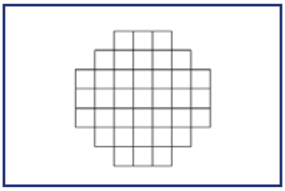
Esta actividad en concreto fue llevada al aula por diferentes docentes y en distintos momentos, lo que permitió recoger abundante información sobre la gestión de la clase y las producciones de los alumnos en escuelas de diferentes características.

Primera etapa: caracterización de una familia de figuras

Se presentan a los estudiantes tres figuras con el objetivo de que identifiquen diferentes características comunes a las tres. De la pluralidad de miradas sobre estas tres figuras se va a definir una familia de la cual estas tres serán miembros.

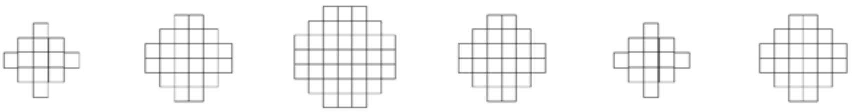






Como en las etapas siguientes, la tarea para los estudiantes es encontrar alguna fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos de una figura de este tipo en función de la cantidad de cuadraditos de la “base”. Para ello, será necesario caracterizar bien esta familia de figuras. Las dos cuestiones que destacamos a continuación nos obligaron a pensar una manera particular de llegar a la caracterización de la familia de figuras en el aula.

- Nos parece importante no alentar la idea errónea de que los siguientes elementos de una secuencia puedan inferirse a partir de tres casos. Estas figuras podrían continuarse, por ejemplo, de la siguiente manera:



- Por otro lado, lo rico de la situación es que hay muchas maneras de “mirar” regularidades en estas figuras. No queríamos describir nosotros la familia para no inducir a los alumnos a una única manera de mirar.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se propone a los estudiantes la siguiente tarea:

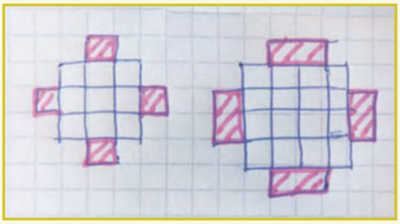
ACTIVIDAD 1

Encontrar en las tres figuras qué cosas cambian y qué no. ¿Qué tienen en común? ¿Qué características se observan en las tres? ¿Pueden caracterizarlas de alguna forma?

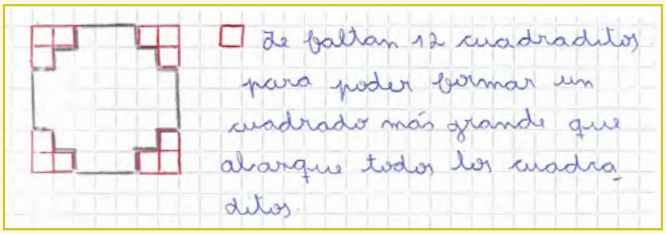
Se hace necesario identificar qué reglas cumplen las tres figuras, para luego establecer que esas mismas reglas son las que deberán cumplir las otras figuras que componen la familia. Dichas reglas incluyen la identificación de elementos variables y constantes.

A continuación, presentamos algunas producciones de los estudiantes que incluyen esquemas para mostrar como caracterizan las figuras.

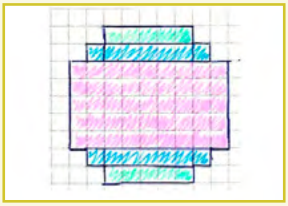
Algunos estudiantes lo vieron como un cuadrado central con cuatro tiras pegadas en los cuatro laterales:



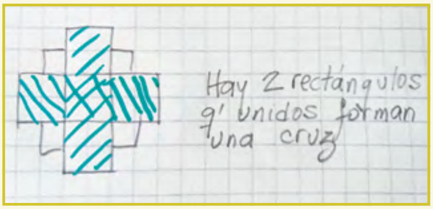
Otros lo vieron como cuadrados a los cuales se les quitan tres cuadraditos en cada vértice:



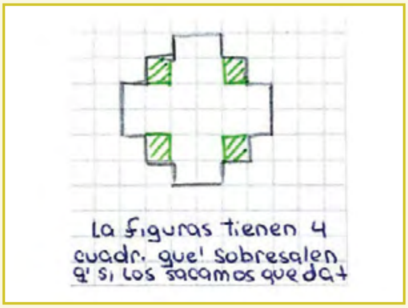
Un grupo observó rectángulos a los que se les agregan dos tiras arriba y abajo:



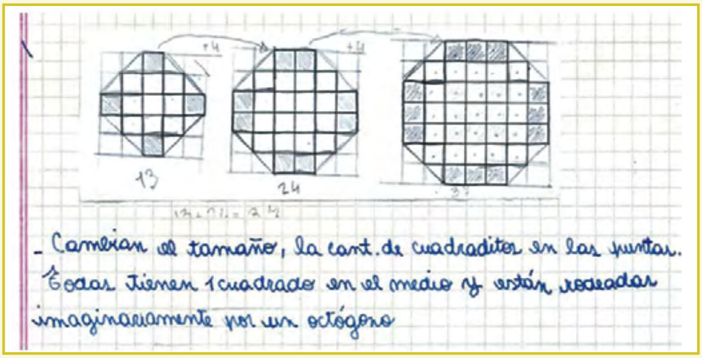
Otros notaron rectángulos iguales superpuestos, uno vertical y otro horizontal, a los cuales se les agregan 4 cuadraditos:



También hubo quienes vieron una cruz a la que se le agregan 4 cuadraditos:



Incluso hubo estudiantes que vieron las figuras contenidas en un octógono:



Esta última caracterización, por demás ingeniosa, no fue luego un buen soporte para contar los cuadraditos que componen cada figura.

La idea es fomentar esta diversidad de miradas en la clase y ponerlas en común, no para unificar un punto de vista sino para habilitarlas a todas como criterio para describirlas.

Al poner en común diversas maneras de mirar las figuras, se establecen características para la definición de la familia de figuras que integran. El espacio colectivo es también propicio para discutir entre todos eventuales caracterizaciones erróneas.

Segunda etapa: conteo de los cuadraditos de las figuras de la familia

Una vez hechas públicas en el aula todas estas descripciones de las tres figuras, se propone contar la cantidad de cuadraditos de una figura de esta familia. Esta nueva tarea es posible porque la familia ha quedado debidamente definida mediante las caracterizaciones que dieron los alumnos.

Hasta este momento se trabajó la regularidad de la forma. Ahora se propone contar los cuadraditos que tienen las figuras de este tipo, pero con mayor cantidad de cuadraditos en la base (es necesario acordar que la base son los cuadraditos en los que se "apoya la figura").

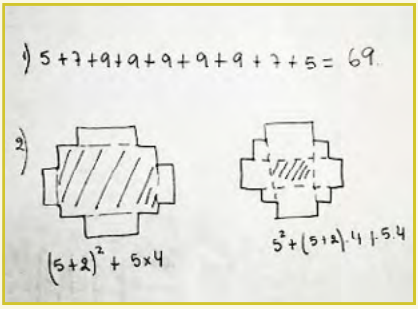
Para ello se comienza con la siguiente pregunta:

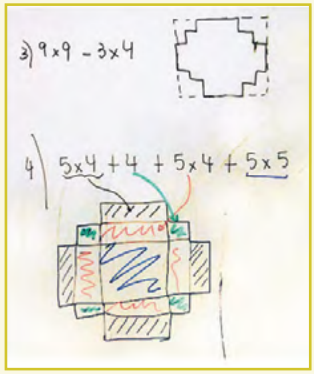
ACTIVIDAD 2

¿Cuál es la cantidad total de cuadraditos cuando en la base hay 5?

El hecho de que no sea la figura siguiente a las tres dadas obliga a poner en juego la relación entre la cantidad de cuadraditos de la base y la forma de cada figura, y ya no las relaciones entre esa figura y la anterior. Por otro lado, trabajar con un número pequeño hace que una estrategia posible sea recurrir al dibujo para contar en el caso de que el alumno lo requiera.

En las aulas se genera un clima que estimula a producir nuevas maneras de mirar las figuras y a contar los cuadraditos. Muchas veces el nuevo conteo resulta menos económico que alguno ya producido, pero los alumnos sienten que una nueva forma es valorada por el docente y sus compañeros. Estas imágenes moestran las producciones de cuatro grupos en un aula:





Notemos que en la producción del grupo 2, el conteo de la derecha es erróneo: con el cálculo (5 + 2) × 4 cuentan dos veces los 4 cuadraditos de las esquinas.

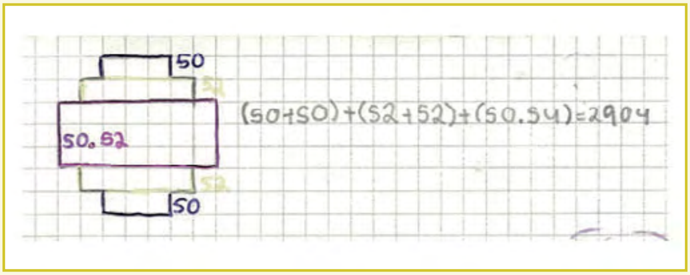
Luego de este conteo se propone:

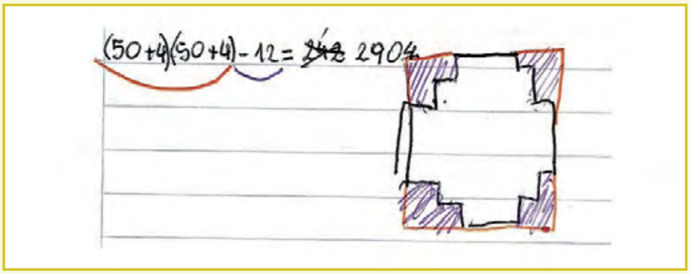
ACTIVIDAD 3

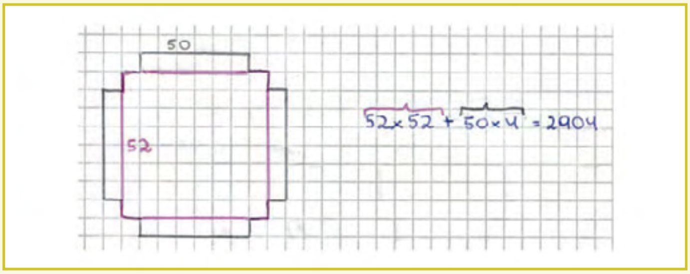
Calcular la cantidad total de cuadraditos cuando la base tiene 50 cuadraditos, detallando los cálculos que hay que realizar.

Al pedir un conteo para 50 cuadraditos en la base, la estrategia de dibujar y contar queda descartada.

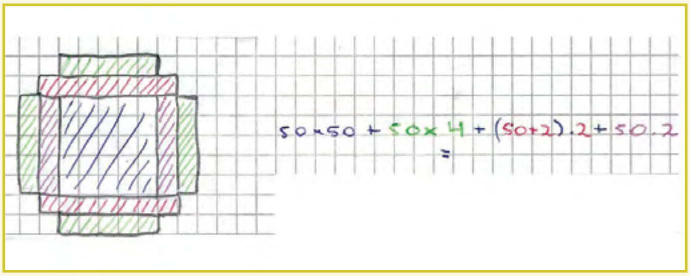
Las diferentes maneras de mirar las figuras dan lugar a distintas maneras de considerar la cantidad de cuadraditos para el caso 50 en la base. A continuación, presentamos algunas. En el caso de la primera solución, la cuenta que escriben es correcta a pesar de que en el esquema se confunden y ponen 50 × 52 en vez de 50 × 54.







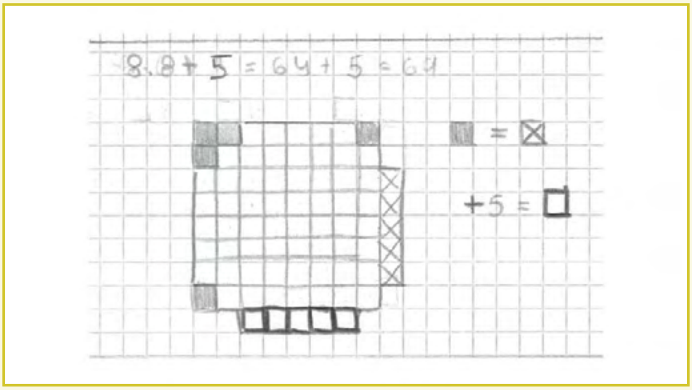
También aparecen nuevas estrategias para contar cuadraditos que no se corresponden con las caracterizaciones iniciales. Por ejemplo, la siguiente:



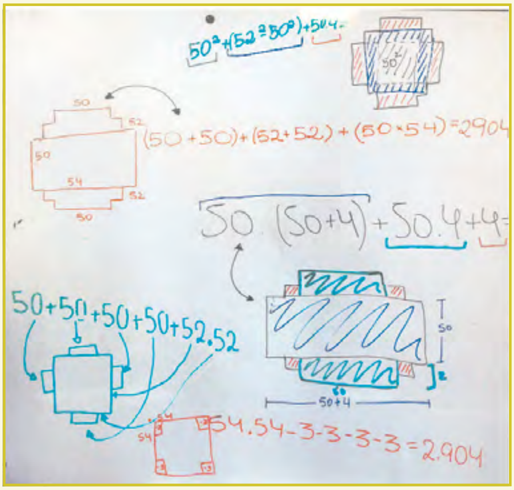
Esta manera de contar tampoco apareció cuando contaron los cuadraditos de la figura de 5 cuadraditos de base, ni corresponde a las caracterizaciones descriptas por los alumnos al comienzo de la tarea.

Por otro lado, algunas de las descripciones que surgieron al principio (por ejemplo, la del octógono) no fueron utilizadas a la hora de contar. Ciertos alumnos eligieron una manera de contar producida por sus compañeros, de la que se apropiaron porque les pareció "más clara y más sencilla".

Del mismo modo, una estrategia que era útil para contar cuando la base era de 5 cuadraditos tuvo que ser abandonada con los cuadraditos de figuras mayores:



En la puesta en común, la interacción con los compañeros permitió a cada estudiante explicar su procedimiento, entender procedimientos de otros y compararlos con el propio. En la discusión colectiva en torno a las distintas maneras de contar, la participación del docente es importante no solo como regulador de las interacciones entre los estudiantes sino también por su rol en la escritura de los cálculos y, eventualmente, en la realización de los esquemas de las figuras. En la última imagen, se puede ver un pizarrón que recoge el trabajo colectivo en un aula:



La cantidad de 50 cuadraditos en la base es tal que el conteo debe realizarse considerando ese número casi como una variable. Es decir, pensando en las operaciones a realizar independientemente del resultado que se obtenga.

La actividad 3, discutida en el espacio colectivo, será un buen soporte para que los estudiantes puedan encarar la siguiente tarea.

ACTIVIDAD 4

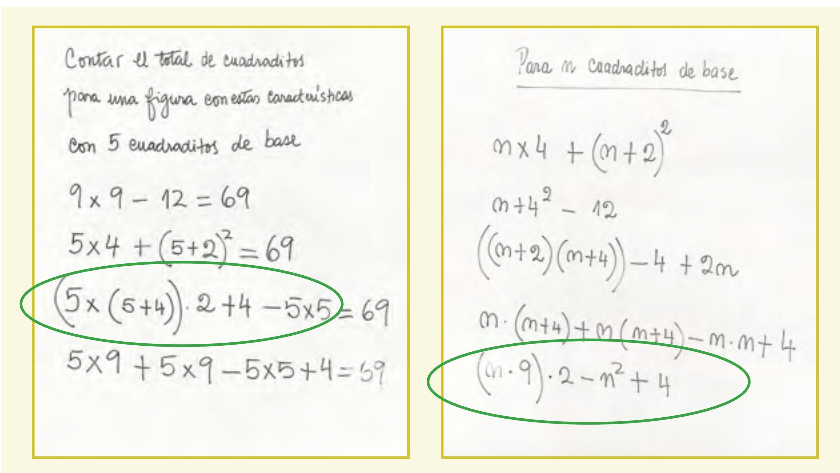
Escribir una fórmula que permita calcular la cantidad total de cuadraditos para una figura de estas características con *n* cuadraditos de base.

Se espera que las distintas maneras de mirar las figuras deriven en diferentes formas de calcular la cantidad de cuadraditos, y que esto abone la producción de fórmulas variadas.

Optamos por proponer nosotros la letra *n* para designar la cantidad de cuadraditos de la base. Si no se propone o se acuerda una letra para todas las fórmulas que se produzcan, podrían aparecer fórmulas escritas en función de variables diferentes y no comparables. Entonces, no sería posible estudiar la equivalencia de estas fórmulas, que es la actividad que se va a proponer a continuación.

La facilidad con la que los alumnos aborden esta tarea dependerá de lo que hayan trabajado en otras oportunidades sobre generalización y construcción de fórmulas.[3] Tengan o no esa experiencia previa, puede ser necesario discutir colectivamente qué es lo que varía y qué permanece constante en las formas de contar cuando se varía la cantidad de cuadraditos de la base. Esta distinción está en el corazón de la actividad de producción de una fórmula general.

Algunos estudiantes generalizan mirando las cuentas que hicieron para 5 y para 50, sin tener en cuenta la situación que se estaba contando; otros buscan la fórmula general a partir de la caracterización de las figuras. También hay quienes van de una a otra posición. En el caso de mirar solo las cuentas (sin analizar qué representa cada número), puede suceder que aparezcan generalizaciones erróneas, como lo muestra el siguiente ejemplo:



Ambos pizarrones recogen producciones de alumnos. En el de la derecha, recuadramos con verde una fórmula que sus autores anuncian como generalización de la cuenta marcada en el pizarrón de la izquierda. La cuenta es correcta, pero

3. La tarea de contar colecciones y producir fórmulas se plantea en los programas de matemática desde el ciclo básico de la escuela secundaria. Si se comienza con estas actividades en el ciclo superior, quizá sea necesario empezar con alguna otra más sencilla para introducir a los estudiantes en este tipo de trabajo antes de la actividad 4. Tanto en el ciclo básico como en el momento de trabajar con fórmulas cuadráticas, estas actividades promueven mucha producción de los estudiantes en el aula.

la fórmula no. Esto recién fue discutido en el aula en la siguiente etapa, cuando los estudiantes tuvieron que probar la equivalencia de las expresiones obtenidas.

Queremos detenernos en la tercera fórmula que aparece en el segundo pizarrón. Su autor explica: "Yo veo un rectángulo de base $(n + 2)$ y altura $(n + 4)$. Con eso estoy agregando 4 cuadraditos: se los resto. Y después le agrego las dos tiras laterales de n cuadraditos cada una". Esta manera de mirar la figura no había salido en la etapa inicial de caracterización. Quizás el desarrollo del problema en el aula fue incentivando a los estudiantes a buscar nuevas maneras de mirar.

En cursos donde los estudiantes no produjeron tantas fórmulas diferentes, recurrimos a la estrategia de presentarles fórmulas que aparecieron en otras clases y proponerles que piensen cómo fueron armadas.

Tercera etapa: estudio de la equivalencia de las fórmulas

La existencia de muchas fórmulas para contar lo mismo permite trabajar en la clase en torno a la equivalencia[4] de estas expresiones. Los estudiantes, apoyados en este contexto, podrán decir que "las fórmulas son equivalentes porque cuentan lo mismo: la cantidad de cuadraditos para una figura con n en la base". El trabajo algebraico sobre las expresiones es otro camino para probar la equivalencia de las fórmulas. La idea es apoyarse en las propiedades de las operaciones para transformar las expresiones algebraicas. Es el juego que proponemos a los alumnos en esta etapa. Más precisamente, planteamos la siguiente tarea:

ACTIVIDAD 5

Para justificar algebraicamente que las fórmulas son equivalentes, transformen cada expresión de modo de lograr la misma escritura final.

4. La noción de equivalencia que se instala en el aula es que dos fórmulas o expresiones con una variable son *equivalentes* si se obtiene el mismo resultado para cualquier valor que tome la variable.

En caso de que se llegue a una misma expresión, el trabajo algebraico permitirá mostrar que las distintas fórmulas van a dar lo mismo al evaluarlas para cualquier valor de n. Este trabajo servirá además para controlar si alguna de las fórmulas producidas es incorrecta.

Puede suceder que algunos alumnos digan que dos fórmulas son equivalentes porque dan lo mismo cuando reemplazan n por algún valor particular. Para ellos es suficiente esta explicación. Vemos necesario abrir en la clase una discusión sobre la relación entre lo particular y lo general. Se podrían plantear los siguientes ejemplos:

- Como $2^4 = 4^2$, entonces $a^b = b^a$.
- Como $2 + 2 = 2 \times 2$, entonces el producto es lo mismo que la suma.

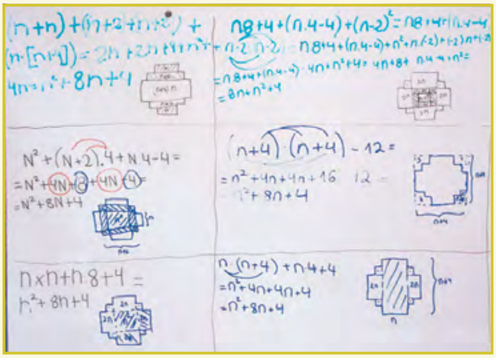
O incluso confrontarlos con la siguiente situación:

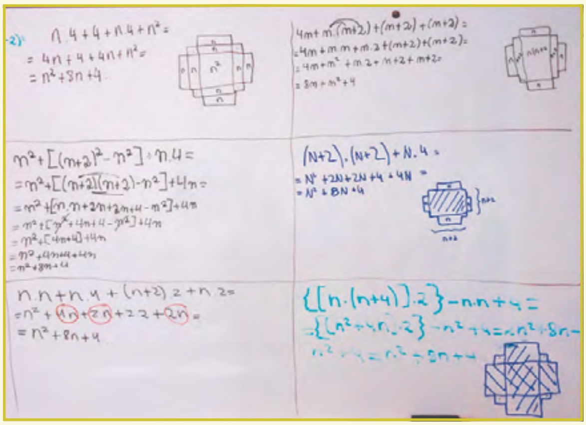
- Si una bolsa está llena de bolillas, y sacamos una que es roja, ¿podemos asegurar que todas serán rojas?

La actividad de generalización es una de las más relevantes en matemática. Pensamos que esta actividad y las que siguen en este documento representan una oportunidad de hacer presente en el aula este tipo de trabajo y discutir con los estudiantes la necesidad de validar con argumentos sólidos la generalización planteada.

A continuación, nos detenemos en lo producido por los distintos grupos de un curso cuando transforman cada expresión, "liberándose" de los paréntesis y agrupando términos:

> En este curso, como se ve en el pizarrón que mostramos a continuación, una de las fórmulas producidas originalmente corresponde con la expresión mínima a la que llegan todos.



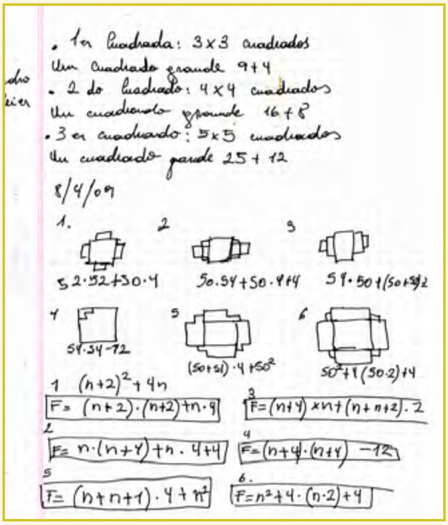


En la mayoría de nuestros cursos esto no ocurrió y, una vez que se llegó a la fórmula $n^2 + 8n + 4$ como expresión común, muchos de los alumnos querían volver a mirar las figuras para ver de qué manera podrían caracterizarlas para que dieran sentido a la fórmula hallada. Si los chicos no lo propusieran, puede ser el docente quien propicie esta búsqueda.

Cuarta etapa: registros del alumno

Con el objetivo de que los alumnos recuperen y organicen las ideas que surgieron en clase, les pedimos a los estudiantes que elaboren un informe acerca de lo trabajado con el problema de las tres figuras. Valoramos esta nueva actividad porque obliga a los estudiantes a reconstruir individualmente producciones que muchas veces fueron grupales y garantizamos que les quede registro de lo trabajado en sus carpetas. Por otro lado, para nosotros, los docentes, representa una buena oportunidad para "evaluar" qué y cómo aprendieron todos los alumnos.

A continuación, se pueden ver registros de las carpetas de alumnos:



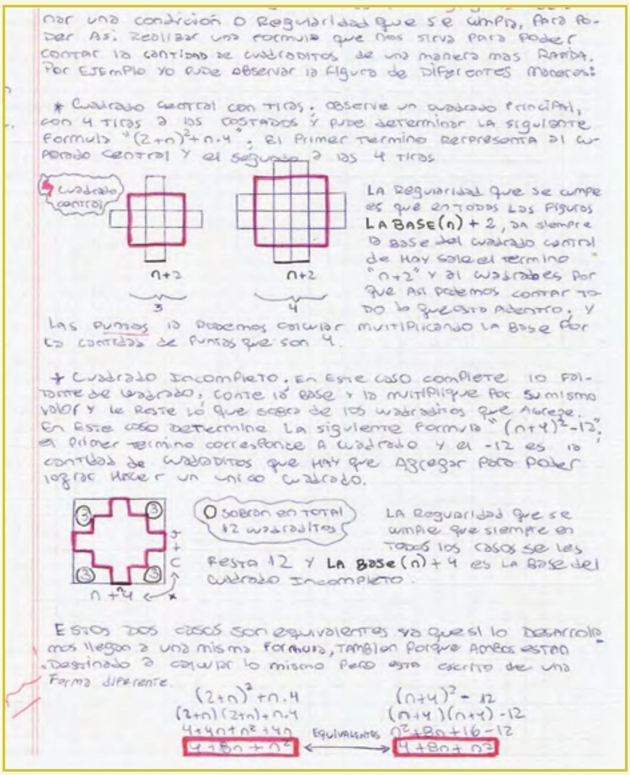
• 1ra Cuadrada: 3x3 cuadrados
Un cuadrado grande 9+4
• 2do Cuadrado: 4x4 cuadrados
Un cuadrado grande 16+8
• 3er cuadrado: 5x5 cuadrados
Un cuadrado grande 25+12

8/4/09

1. $52 \cdot 52 + 50 \cdot 4$
2. $50 \cdot 54 + 50 \cdot 4 + 4$
3. $54 \cdot 50 + (50+5) \cdot 2$
4. $54 \cdot 54 - 12$
5. $(50+51) \cdot 4 + 50^2$
6. $50^2 + 4(50 \cdot 2) + 4$

1 $(n+2)^2 + 4n$

1. $\boxed{F = (n+2) \cdot (n+2) + n \cdot 4}$
2. $\boxed{F = n \cdot (n+4) + n \cdot 4 + 4}$
3. $\boxed{F = (n+4) \times n + (n+n+2) \cdot 2}$
4. $\boxed{F = (n+4) \cdot (n+4) - 12}$
5. $\boxed{F = (n+n+1) \cdot 4 + n^2}$
6. $\boxed{F = n^2 + 4 \cdot (n \cdot 2) + 4}$



nar una condición o Regularidad que se cumpla, para poder así realizar una formula que nos sirva para poder contar la cantidad de cuadraditos de una manera mas Rapida. Por ejemplo yo pude observar la figura de diferentes maneras:

* Cuadrado central con tiras. Observe un cuadrado principal, con 4 tiras a los costados y pude determinar la siguiente formula "$(2+n)^2 + n \cdot 4$". El primer termino representa al cuadrado central y el segundo a las 4 tiras

Cuadrado central

$\underbrace{n+2}_{3}$ $\underbrace{n+2}_{4}$

La Reguiaridad que se cumple es que en todas las figuras La Base(n) + 2, da siempre la base del cuadrado central de hay sale el termino "n+2" y al cuadrados por que asi podemos contar todo lo que esta adentro, y las puntas la podemos calcular multiplicando la Base por la cantidad de puntas que son 4.

+ Cuadrado Incompleto. En este caso complete lo faltante de cuadrado, conte la base y la multiplique por su mismo valor y le reste lo que sobra de los cuadraditos que agrege. En este caso determine la siguiente formula "$(n+4)^2 - 12$", el primer termino corresponde a cuadrado y el -12 es la cantidad de cuadraditos que hay que agregar para poder lograr hacer un unico cuadrado.

3 3 3 3

$n+4$

O sobran en total 12 cuadraditos

La Reguiaridad que se cumple que siempre en todos los casos se les resta 12 y La Base (n) + 4 es La Base del cuadrado Incompleto.

Estos dos casos son equivalentes ya que si lo Desarrollamos llegan a una misma formula, tambien porque ambos estan destinado a calcular lo mismo pero esta escrito de una forma diferente.

$(2+n)^2 + n \cdot 4$ | $(n+4)^2 - 12$
$(2+n)(2+n) + n \cdot 4$ | $(n+4)(n+4) - 12$
$4 + 4n + n^2 + 4n$ | $n^2 + 8n + 16 - 12$

$\boxed{4 + 8n + n^2} \xleftrightarrow{\text{Equivalentes}} \boxed{4 + 8n + n^2}$

PARTE 2: EL LENGUAJE ALGÉBRICO PARA EXPRESAR UNA MANERA DE CONTAR Y UNA OPERATORIA ALGEBRAICA PROVISTA DE SENTIDO POR LA SITUACIÓN

A continuación, presentaremos un problema que plantea la necesidad de contar elementos en una familia de cuerpos. Como en la actividad anterior, se trata de elaborar (para algunos ejemplos) estrategias de conteo que puedan extenderse a cualquier miembro de la familia.

En este caso no hay imprecisión en la presentación de la familia de cuerpos: se trata de cubos compuestos por cubitos iguales y más pequeños. El cubo se encuentra pintado por fuera.

Las primeras tareas consistirán en contar la cantidad de cubitos con distinta cantidad de caras pintadas. Una diferencia importante con la actividad anterior es que ahora no son visibles todos los elementos que hay que contar.

El conteo de las distintas subfamilias de elementos permitirá plantear operaciones con polinomios, un trabajo algebraico necesario para la formación de los estudiantes que, de este modo, tiene una finalidad para ellos.

Primera etapa: presentación del problema del cubo para los estudiantes

ACTIVIDAD 1

Tienen un cubo grande, formado por 64 cubos pequeños iguales entre sí, y ese cubo grande tiene sus 6 caras pintadas de azul.

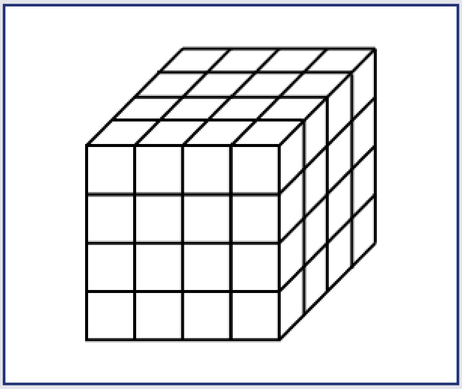
a) ¿Cuántos cubitos hay con tres caras pintadas?

b) ¿Con dos caras pintadas?

c) ¿Con una cara?

d) ¿Y sin caras pintadas?

En cada caso, expliquen la estrategia que utilizaron para contarlos.



En el aula se discuten las distintas estrategias producidas por los alumnos para responder a cada una de las preguntas. Posteriormente se proponen dos nuevas tareas:

ACTIVIDAD 2

Respondan a las preguntas de la actividad 1, pero para un cubo con 7 cubitos en cada arista.

ACTIVIDAD 3

Si ahora el cubo tiene *n* cubitos de arista, escriban fórmulas que permitan calcular los siguientes casos:

a) ¿Cuántos cubitos hay con tres caras pintadas?

b) ¿Con dos caras pintadas?

c) ¿Con una cara pintada?

d) ¿Sin caras pintadas?

Anticipamos que para responder a lo que se pide en la actividad 1, los chicos van a desplegar estrategias de conteo y eventualmente podrá haber algunas erróneas. La puesta en común será el espacio propicio para socializarlas y ubicar a cada estudiante en el lugar de evaluar y analizar las de otros, al mismo tiempo que explican las propias.

La idea de esta actividad es que los alumnos inicialmente cuenten la cantidad de cubitos para un cubo con 4 cubitos de arista. Luego, durante una puesta en común verán que hay distintas maneras de contar, discutirán posibles errores y, eventualmente, algunos podrán apropiarse de las estrategias de otros.

En la actividad 2 se piden diferentes conteos para un cubo con 7 cubitos en la arista, dando un paso hacia la generalización: tendrán que decidir cómo se modifican los números que aparecieron para el caso de 4 cubitos de arista. Se espera que los estudiantes puedan apoyarse en los procedimientos o en las estrategias empleadas por ellos mismos u otros compañeros

En nuestras experiencias, comenzamos la actividad conversando con los estudiantes sobre por qué en el primer enunciado dice 64 cubitos. “¿De dónde salen los 64?”, preguntamos. Algunas respuestas fueron:

- De “hacer base por altura por profundidad”, o sea de la fórmula del volumen.
- “En la capa de arriba hay 4 por 4 cubitos, y como en el cubo hay 4 capas, en total hay 16 por 4 cubitos.”
- “Para obtener el total de cubitos, había que hacer 16 por 6, porque el cubo tiene 6 caras.”

La primera respuesta podría ser una aplicación mecánica de una fórmula. Y en la última, los autores parecen confundir los cuadraditos de la superficie del cubo con todos los cubitos que lo conforman. Ante esto, fue necesario discutir que si consideramos 16 cubitos –por ejemplo, todos los que están adelante en la misma cara del cubo grande–, estos forman una sección del cubo, a la cual convenimos llamar “rodaja”, “rebanada”, “bloque” o “capa” (nombres que los mismos alumnos fueron proponiendo para hacer notar que los cubitos forman una parte y no una cara del cubo grande). Esta manera de mirar fue sostenida por los autores de la segunda producción, dando un argumento sólido para validar su conteo, y permitió también desestimar la tercera propuesta.

También vimos necesario conversar sobre cuáles son los cubitos con tres caras pintadas, con dos caras pintadas, con una cara pintada y sin caras pintadas. Es importante que los estudiantes identifiquen al menos un cubito de cada tipo para poder contarlos. Algunos, por ejemplo, se sorprenden con la pregunta que dice “cubitos sin caras pintadas”, porque no habían advertido que existían cubitos de este tipo. En este sentido, la pregunta que plantea el docente (“¿De dónde salen los 64 cubitos?”) hace que los alumnos busquen una manera de mirar el cubo por dentro para explicar que tiene 64 cubitos.

Creemos necesario discutir estas cuestiones con los alumnos y que queden claras para todos antes de que comiencen a trabajar. A continuación, compartimos un link a un video donde un grupo de estudiantes, organizados por el docente, colaboran para aclarar el significado de lo que pide el problema.

Trabajar en torno al enunciado

La experiencia en las aulas nos muestra que muchas veces los alumnos no trabajan porque no saben qué es lo que tienen que hacer. Desde nuestro punto de vista, trabajar con los alumnos en torno al enunciado de una actividad es una parte importante de nuestra gestión de clase. Muchas veces no se resuelve “volviendo a leer el enunciado”. Es necesario introducir nuevas preguntas para garantizar que los alumnos estén en condiciones de encarar de manera autónoma –individual o grupalmente– el trabajo con el problema. Del mismo modo, otras veces es preciso darles aliento y convencerlos de que tienen herramientas para afrontar la situación planteada. También es nuestra responsabilidad hacer del aula un espacio amigable para que nuestros estudiantes construyan una imagen de sí mismos como personas que “pueden” en la clase de matemática.

Segunda etapa: conteo de los cubitos

Una vez clarificada la tarea, los alumnos abordaron el trabajo en grupos de cuatro o cinco. Para el cubo de 4 cubitos de arista, comenzaron por el ítem a), que preguntaba por los cubitos con tres caras pintadas. En este caso, no aparecieron distintas formas de contar. Todos coincidieron en que eran 8 y que corresponden con las esquinas.

Al abordar el ítem b), respecto a los cubos con dos caras pintadas, sí aparecen distintas formas de mirar al cubo y de expresarlo. Por ejemplo:

- “$(2 \times 4) \times 6 \div 2$. En cada cara se consideran 2 por 4 cubitos, y se multiplica por la cantidad de caras. Como estoy contando repetidos, porque los cubitos de cada arista pertenecen a dos caras, divido por 2.”

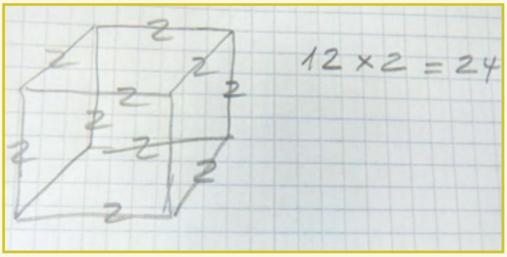
Algunos estudiantes habían contado $(2 \times 4) \times 6$ cubitos y fue necesaria una observación de compañeros o del docente para que advirtieran que estaban contando dos veces los cubitos de cada arista.

- “2×4, la cara de adelante, más 2×4 la cara de atrás, más 2×4 los que faltan de las caras de arriba y de abajo.”

Otro alumno que llega a la misma cuenta ($2 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 4$) aclara que él “lo gira al cubo”, acompañándose con gestos con las manos: “Yo cuento primero los cubitos que están en todas las aristas horizontales y paralelas”, señala, mientras gira imaginariamente el cubo en el sentido de norte a sur para ir viendo todas estas aristas. “Luego lo giro así”, en sentido de este a oeste, “y cuento los cubitos que están en las aristas verticales y paralelas. Y por último giro así y cuento los cubitos de las aristas restantes”.

- “12×2, 2 cubitos por arista, por 12 aristas.”

Luego, mostró la cuenta con el siguiente dibujo:



También surgen estrategias por parte de algunos alumnos que son poco eficaces a la hora de emplearlas para cubos con más cubitos de arista. Tal el caso de una alumna que va contando los cubitos de las aristas cara por cara y hace la siguiente cuenta: 8 + 6 + 4 + 4 + 2, entendiendo que en cada cara nueva que cuenta, ya hay cubitos contados. En la puesta en común, ella misma abandona esa estrategia y se apropia de otra, expresando que se da cuenta que la forma de contar de su compañero es más simple y conviene más.

Cuando abordan el ítem c), en torno a los cubitos con una sola cara pintada, surgen las siguientes propuestas.

- "4 × 6. Cantidad de caras y cuatro cubitos por cara."
- "(16 – (4 × 4 – 4)) × 6. Al total de cubitos que están en una misma cara del cubo, se le restan los del borde, y se multiplica por la cantidad de caras del cubo."

Finalmente, los alumnos aportaron las siguientes respuestas para el ítem d), que pregunta por los cubitos sin ninguna cara pintada:

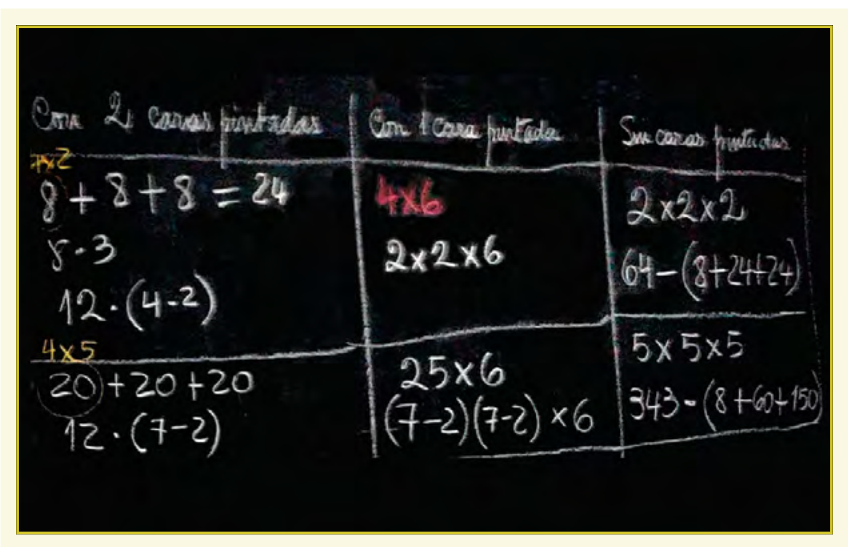
- "2 × 2 × 2. Los que quedan adentro son los que no tienen caras pintadas y para contarlos debemos sacar las capas exteriores del cubo, hay que pelar el cubo, y queda esto."
- "64 – (8 + 24 + 24). Al total de cubitos, que son 64, le resto los que tenían por lo menos una cara pintada."

Se suelen armar discusiones interesantes cuando cuentan estos cubitos. Es muy común que algunos digan que son 8 y otros que son 4. Las discusiones entre ellos suelen ser efectivas: los que dicen que son 4 enseguida se dan cuenta de su error porque todo lo que contaron hasta acá no suma 64. Sin embargo les cuesta visualizar los 8 cubitos sin pintar.

A continuación, se pasa a trabajar con el cubo de 7 cubitos de arista. Ya los chicos no tienen el dibujo, pero el docente puede llevar uno para que lo consulten en caso de que lo necesiten.

Cuando se trabaja con este cubo algunos chicos suelen abandonar las estrategias menos económicas que ellos utilizaron para el cubo con 4 cubitos de arista. Así, adoptan formas de contar más eficaces halladas por los compañeros. En el caso de los cubitos sin pintar, algunos siguen considerando el total de cubitos, 7^3, menos los cubitos que tienen al menos una cara pintada.

Como se ve en la siguiente imagen, en la puesta en común escribimos en el pizarrón las cuentas que hicieron los chicos para arribar a los resultados, conservando la traza de las operaciones. De esa forma se puede apreciar qué es lo que cambia y qué no cambia cuando se pasa del caso 4 a 7, lo cual será útil a la hora de generalizar.

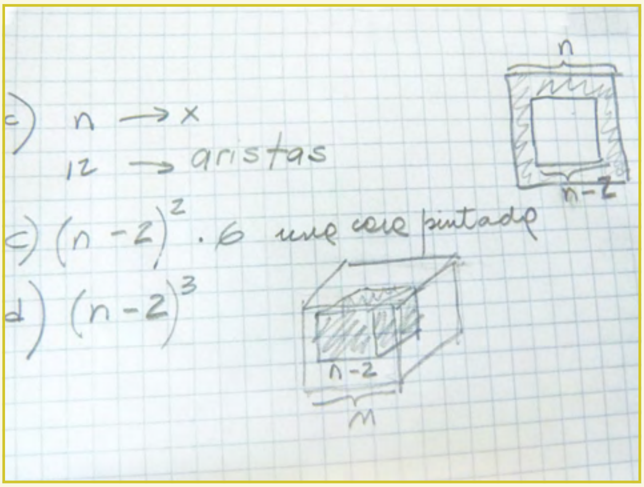


Tercera etapa: el proceso de generalización y la producción de fórmulas

La actividad 3 refiere a la producción de fórmulas generales para contar los cubitos de cada tipo en cubos de *n* cubitos de arista. En algunas de las aulas, esta generalización había comenzado a circular con las primeras tareas en torno a cubos de 4 cubitos de arista. De algún modo los estudiantes anticiparon lo que vendría después en el problema, seguramente por sus experiencias anteriores en la clase de matemática. Pero no fue así en todas las aulas. En un curso los estudiantes no habían tenido experiencias con la producción de fórmulas para contar colecciones y algunos no alcanzaban a comprender la tarea: preguntaban si debían asignarle un valor a *n*, poniendo en evidencia que ellos entienden que *n* representa a un número particular. Se trataba de un curso de los últimos años y los estudiantes habían tenido pocas oportunidades de ser ellos los productores de una fórmula para modelizar una situación –en el contexto funcional o geométrico–, para generalizar una propiedad aritmética o, incluso, para designar el término general de una sucesión. Fue sorprendente para el docente y necesitó intervenir, por ejemplo, para habilitar que la letra *n* en la fórmula representa una variable y que en esta situación los valores que puede tomar *n* son todos los números naturales mayores que 1 (las fórmulas, por lo tanto, deben servir para contar lo pedido cuando se evalúa *n* en cualquiera de esos valores). También creyó necesario aclararle a sus estudiantes que no buscaran números como respuesta, sino fórmulas expresadas en función de una variable *n*.

Sabemos que el proceso de generalización –y la expresión de ese conteo en una fórmula en la que intervenga la variable *n*– suele ofrecer dificultad a los estudiantes en sus primeros encuentros con este tipo de actividad. Pero las condiciones de producción y discusión que esto suele generar en el aula hacen que valga la pena el esfuerzo inicial que requiere.

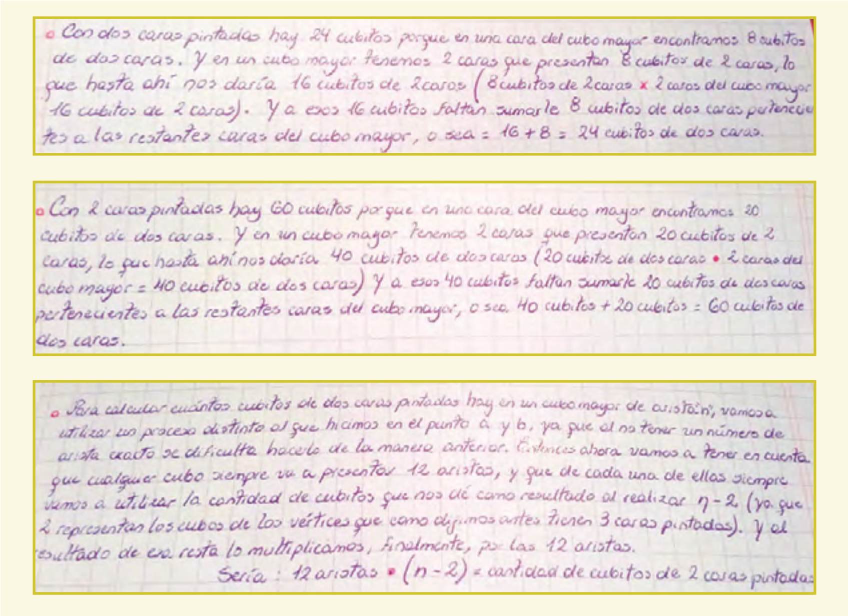
Nuestros alumnos encararon la tarea de producción de fórmulas de diferentes maneras. Algunos se apoyaron en esquemas y otros en los casos ya conocidos de cubos con 4 y 7 cubitos de arista. En la siguiente imagen, por ejemplo, se puede ver el esquema que hicieron dos alumnas para organizar el conteo.



Para contar los cubitos con una sola cara pintada algunos estudiantes consideraron primero una cara y restaron de n^2 la cantidad de cubitos del borde, mientras que otros, para computar los de una cara, se apoyaron en el esquema de estas dos alumnas y computaron los cuadraditos de un cuadrado de $(n - 2)$ cuadraditos de lado.

Lo mismo ocurre para los cubitos sin caras pintadas. Algunos alumnos intentan restar al total aquellos que están en las caras extremas. No obstante, escribir una fórmula que cuente de este modo suele desalentarlos y buscan una expresión para la cantidad de cubitos en la arista del "cubo interior". El esquema de las dos alumnas es un buen apoyo para esta estrategia.

Otro grupo, cuya producción se puede ver a continuación, expresó su forma de contar los cubitos de dos caras pintadas, que es la misma para los dos casos particulares de cubos con 4 cubitos de arista y cubos con 7 de arista. Ahora bien, esa manera de contar les resulta muy compleja cuando se trata de un cubo con n cubitos en la arista y para generalizar les pareció mejor cambiar la forma de contar por otra que les resultara más simple.



- Con dos caras pintadas hay 24 cubitos porque en una cara del cubo mayor encontramos 8 cubitos de dos caras. Y en un cubo mayor tenemos 2 caras que presentan 8 cubitos de 2 caras, lo que hasta ahí nos daría 16 cubitos de 2caras (8 cubitos de 2caras x 2 caras del cubo mayor 16 cubitos de 2 caras). Y a esos 16 cubitos faltan sumarle 8 cubitos de dos caras pertenecientes a las restantes caras del cubo mayor, o sea = 16 + 8 = 24 cubitos de dos caras.

- Con 2 caras pintadas hay 60 cubitos porque en una cara del cubo mayor encontramos 20 cubitos de dos caras. Y en un cubo mayor tenemos 2 caras que presentan 20 cubitos de 2 caras, lo que hasta ahí nos daría 40 cubitos de dos caras (20 cubitos de dos caras • 2 caras del cubo mayor = 40 cubitos de dos caras) Y a esos 40 cubitos faltan sumarle 20 cubitos de dos caras pertenecientes a las restantes caras del cubo mayor, o sea 40 cubitos + 20 cubitos = 60 cubitos de dos caras.

- Para calcular cuántos cubitos de dos caras pintadas hay en un cubo mayor de arista "n", vamos a utilizar un proceso distinto al que hicimos en el punto a y b, ya que al no tener un número de arista exacto se dificulta hacerlo de la manera anterior. Entonces ahora vamos a tener en cuenta que cualquier cubo siempre va a presentar 12 aristas, y que de cada una de ellas siempre vamos a utilizar la cantidad de cubitos que nos dé como resultado al realizar n - 2 (ya que 2 representan los cubos de los vértices que como dijimos antes tienen 3 caras pintadas). Y el resultado de esa resta lo multiplicamos, finalmente, por las 12 aristas.
  Sería : 12 aristas • (n - 2) = cantidad de cubitos de 2 caras pintadas

Mirando en conjunto las producciones, para un cubo de n cubitos de arista aparecen, entre otras, las siguientes fórmulas.

Con tres caras pintadas:

- 8 (algunos chicos dicen que 8 no es una fórmula)

Con dos caras pintadas:

- $12\ (n - 2)$
- $((n - 2) \times 4 \times 6) \div 2$
- $(n - 2) \times 4 \times 3$

Con una cara pintada:

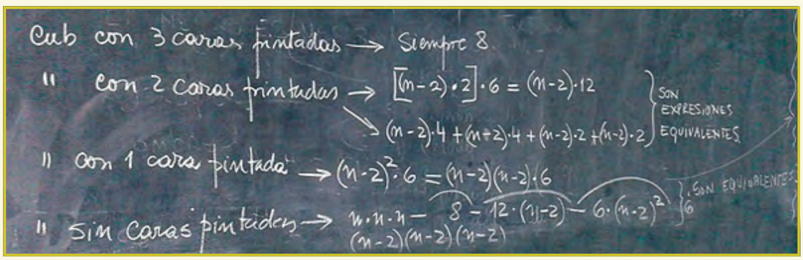
- $6 \times (n - 2)^2$
- $(n^2 - (n \times 4 - 4)) \times 6$ u otra expresión donde $n \times 4 - 4$ se reemplace por una expresión equivalente que provino de contar la cantidad de cuadraditos en el borde de cada cara.

Sin caras pintadas:

- $(n - 2)^3$

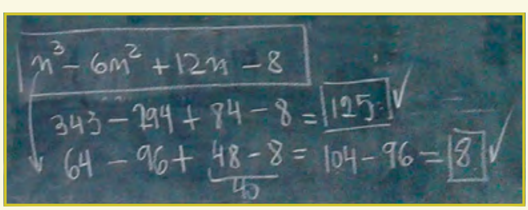
Cuarta etapa: el trabajo algebraico sobre las expresiones

Una vez discutidas las respuestas obtenidas para la actividad 3, trabajamos con los chicos la equivalencia de las diferentes fórmulas producidas en cada ítem. Si bien ellos saben por el contexto que son equivalentes porque cuentan lo mismo para todo valor de *n*, igual se ven entusiasmados por probar cómo esas expresiones diferentes se pueden transformar en una misma escritura, validando lo que ya sabíamos pero algebraicamente.

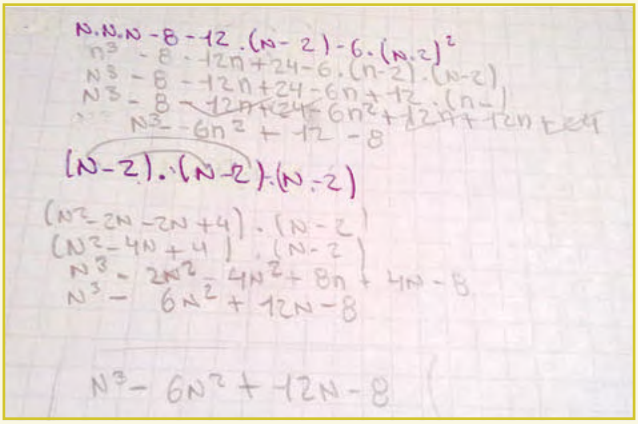


La imagen de arriba muestra cómo quedó el pizarrón de uno de los cursos, donde todavía queda pendiente la equivalencia entre las dos fórmulas que cuentan los cubitos sin caras pintadas.

Una vez que llegan a la misma escritura, mediante transformaciones algebraicas de dos expresiones equivalentes, muchos estudiantes tratan de recontextualizar esa nueva expresión a la cual arribaron, intentando analizar de qué manera contar los cubitos para darle sentido a esa nueva escritura. Otros directamente proponen reemplazar la *n* por 4 y por 7 y dicen que “tiene que dar lo mismo que nos dio antes” (ver la imagen de abajo). Así, los chicos intentan verificar si la expresión a la que llegaron es la correcta.



En uno de los cursos hubo alumnos que en lugar de obtener la fórmula $(n-2)^3$ para el cálculo de la cantidad de cubitos sin pintar obtuvieron esta otra fórmula: $n^3 - (8 + 12\,(n-2) + 6\,(n-2)^2)$. Se les pidió verificar si ambas fórmulas son equivalentes. Los estudiantes realizan tantas transformaciones para lograr el objetivo que, cuando llegan, dicen: “Me sorprendo de mí mismo”.



En la imagen de arriba se ve la producción de un alumno que intenta demostrar que la dos fórmulas que cuentan los cubitos sin pintar son equivalentes. Notemos que si bien en los pasos intermedios de la primera expresión omite escribir algún paréntesis, parece tenerlo en cuenta implícitamente porque realiza bien las operaciones.

A propósito de la actividad 3, estuvieron presentes en el aula asuntos relativos a la producción algebraica y su discusión colectiva que queremos destacar. Así mismo, la actividad 1 que trabajamos en la primera parte de este capítulo también permite un abordaje de estas cuestiones.

La producción algebraica y su discusión colectiva

Desde nuestra posición, resaltamos algunos asuntos importantes que deben ser retomados y profundizados en distintos contenidos del diseño curricular de la escuela secundaria:

- La producción de un modelo algebraico para un procedimiento general en el que se calculan los elementos de una determinada colección (en nuestro problema, esto corresponde al momento de trabajo autónomo de los estudiantes)
- La lectura de la información de una fórmula y su interpretación en un contexto para decidir si puede ser modelo de la situación (en nuestro problema, esto ocurre tanto cuando cada estudiante tiene que analizar la producción de otro para decidir si es una fórmula válida como cuando arriba a una nueva fórmula como producto de una transformación)
- La comprensión de la noción de fórmula o expresión equivalente (algunos estudiantes quizás solo tengan que recuperar esta noción)
- Las transformaciones algebraicas instaladas en el aula como paso necesario –e incluso como desafío– para demostrar que dos fórmulas son equivalentes.

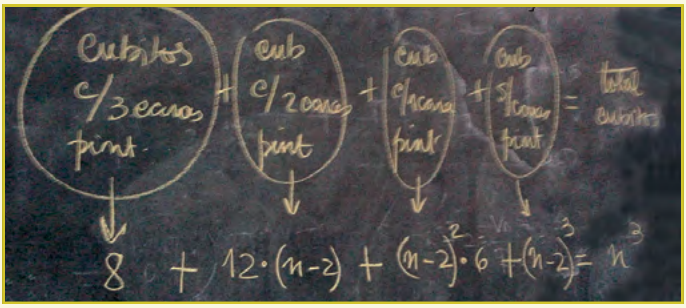
Para continuar con la actividad del cubo pintado, les preguntamos a los chicos oralmente cómo sería la fórmula para expresar la totalidad de cubitos del cubo cuando hay n cubitos de arista. Rápidamente contestaron que la expresión es n^3. Teniendo en cuenta todas las fórmulas producidas, y como cierre de esta parte, les propusimos la actividad 4.

ACTIVIDAD 4

Prueben que sumando las distintas fórmulas que obtuvieron (para tres, dos, una y ninguna cara pintada) se obtiene n^3.

Para los casos particulares de 4 y 7 cubitos de arista, los chicos habían sumado los diferentes resultados esperando encontrar 4^3 y 7^3 respectivamente como modo de comprobar que habían calculado correctamente. Como se ve en el pizarrón que aparece a continuación, en el caso general habría que probar que:

$$8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3$$



En los cursos donde trabajamos este problema, varios de los chicos se mostraron entusiastas ante esta consigna. Aunque trabajosa para muchos, se manifestaron interesados por ver que la suma de todas esas expresiones da n^3 ("es imposible que me dé n^3"), pudiéndose apreciar rostros de asombro y alegría cuando vislumbraban que en el primer miembro se iban cancelando los términos opuestos, quedando solamente n^3. Valoramos mucho el clima que se generó en torno a las operaciones con polinomios, una tarea que suele ser dura para los estudiantes.

Este tipo de tarea otorga sentido a las expresiones algebraicas y a las operaciones con ellas, al tiempo que permite volver a tratar la noción de expresiones equivalentes. Pensamos que no hubiese resultado de la misma manera si les hubiésemos pedido operar con polinomios por fuera de un contexto que les diera sentido.

PALABRAS FINALES

En este capítulo propusimos actividades que apuntan a que los chicos cuenten elementos de conjuntos con diferentes características. Este contar tiene por objetivo no solo la actividad misma, en cuanto a que los chicos deberán organizarse para ello, sino también dotar de sentido al trabajo algebraico posterior: hacer presente en el aula la actividad de modelización y la potencia del álgebra como lenguaje y como herramienta.

Hemos presentado modalidades diferentes para el inicio del trabajo en el aula, pero todas comparten la intención didáctica de involucrar a nuestros estudiantes en la tarea matemática a la cual se los convoca. Suponemos que nuestros colegas lectores tendrán otros ejemplos de escenarios diseñados por ellos con el mismo propósito.

Por último, asumiendo el objetivo de entrar en diálogo con las ideas de nuestros alumnos como algo compartido, pensamos que al presentar aquí sus producciones se ofrece la posibilidad de detenerse a estudiarlas con un tiempo que las demandas del aula no nos permiten tener en nuestra tarea diaria. Esperamos que este documento pueda servir como insumo para pensar la clase y seguir trabajando para la formación de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, Abraham

1994 “Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics”, en *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, nº 3, Vancouver, FLM Publishing, pp. 24-35.

Arcavi, Abraham; Drijvers, Paul y Stacey, Kaye

2017 *The Learning and Teaching of Algebra*: Ideas, Insights and Activities, Nueva York, Routledge.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

2002 *Actualización de programas de nivel medio. Programa de Matemática. Primer año*, Buenos Aires, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección de Currícula. <https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf1/m1.pdf> [consulta: 16 de febrero de 2022]

Illuzzi, Alejandra *et al.*

2014 *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado*, Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos

Aires, Buenos Aires. <https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/matematica-cuadratica.pdf> [consulta: 28 de diciembre de 2021]

Mason, John

1996 "Expressing Generality and Roots of Algebra", en Bednardz, Nadine; Kieran, Carolyn y Lee, Lesley (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Boston-Londres-Dordrecht, Kluwer Academia Publishers, pp. 65-86.

Ministerio de Educación (Argentina)

2012 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de la Formación general. Ciclo Orientado Educación Secundaria*, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado?from=150199> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Sessa, Carmen

2005 *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, Buenos Aires, Del Zorzal.

CAPÍTULO 4

Probabilidad condicional y medidas centrales: construcción de datos para la toma de decisiones

Carolina Benito, Betina Duarte y Patricia Duarte Lezcano

Los Núcleos de Aprendizaje Prioritario (NAP) señalan el interés que tienen para la formación secundaria dos áreas de la matemática: las probabilidades y la estadística. En el texto dedicado al ciclo orientado, se sostiene la importancia de ofrecer a los estudiantes situaciones de enseñanza que promuevan en ellos la necesidad de dar "justificación de decisiones al abordar situaciones de certeza o de incertidumbre, recurriendo a nociones matemáticas adecuadas" (Ministerio de Educación, 2012: 14). Las decisiones en contexto de incertidumbre son, sin lugar a dudas, un escenario casi cotidiano para cualquiera de nosotros.

El mismo documento propone, para el área de probabilidades, un despliegue de aspectos a desarrollar a lo largo de los años de este ciclo. Para esta propuesta hemos elegido los siguientes:

- La determinación de la probabilidad de sucesos en contextos variados apelando a fórmulas para el conteo de los casos favorables y los casos posibles, si es conveniente. [...]
- El análisis de fenómenos que involucren la elaboración de fórmulas para calcular probabilidades condicionadas, totales y de pruebas repetidas, teniendo en cuenta las características de los sucesos que intervienen. [...]
- La evaluación de la probabilidad de un suceso para la toma de decisiones al analizar el funcionamiento de situaciones extra matemáticas (ibíd.: 17, 19, 21).

En cuanto al área de estadística, destacamos esta propuesta de los NAP:

> La identificación e interpretación de la o las medidas de posición (media aritmética, mediana, moda y cuartiles) que mejor describan la situación en estudio (ibíd.: 17).

La probabilidad condicional es un concepto fundamental de la probabilidad, ya que permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre distintos sucesos a medida que obtenemos nueva información. A pesar de su importancia, resulta ser uno de los conceptos más difíciles de comprender dentro de la probabilidad y comúnmente se la confunde con la probabilidad simple y la probabilidad conjunta.

Presentamos una secuencia de problemas que posibilita al estudiante ir construyendo progresivamente la idea de probabilidad condicional distinguiéndola de las probabilidades simple y conjunta. Los problemas y sus resoluciones serán el marco propicio para presentar su definición.

Para el abordaje de este tema, no será preciso recurrir a las fórmulas de conteo para permutaciones, combinaciones o variaciones. El objetivo no está centrado en desarrollar los métodos de conteo para definir los casos posibles o los casos favorables, sino en afianzar las nociones de probabilidad, identificando distintos espacios muestrales.

A partir del análisis de tablas los alumnos podrán clarificar muchas relaciones bivariadas que les permitan un cálculo más simple de distintas probabilidades. Las tablas permiten tener toda la información a la vista, dominar su estructura incluso permite completar alguna información que no está disponible de entrada.

Además, el manejo y la lectura de las tablas de contingencia para el cálculo de probabilidades condicionales permitirán que los estudiantes tengan un primer acercamiento al teorema de Bayes, un resultado central de la teoría de probabilidades cuya aplicación permite abordar una familia de problemas interesantes para este nivel de enseñanza.

Se propone de este modo abordar el estudio de algunas nociones centrales de la teoría de la probabilidad y, más aún, construir teoría en la clase de matemática. Por eso, las actividades están pensadas para ser entregadas a los alumnos y disponer de un primer momento de trabajo grupal. Esta será la ocasión en la que los alumnos pondrán en juego sus conocimientos. En cada problema imaginamos continuar esta fase de trabajo con otra parte colectiva donde toda la clase comparta estrategias de resolución y se discuta la validez de los procedimientos. También hemos diseñado momentos de síntesis, propicios para la presentación de las ideas matemáticas con mayor formalidad. Estos momentos serán comandados por el docente, quien apoyado en las ideas que desarrollaron sus alumnos podrá ponerlas en diálogo con las ideas formales de la matemática.

La segunda parte de esta propuesta se dedica a las medidas de posición, la media artimética, la mediana, la moda y los cuartiles como valores que permiten describir distintos aspectos de un conjunto de datos. Su interpretación según la situación en estudio permite analizar su insuficiencia para caracterizar la situación en estudio.

Las medidas de dispersión, que permiten avanzar en el conocimiento de la situación, forman parte de los NAP pero no se abordan en esta propuesta. Sin embargo podrán ser incorporadas al estudio sumando nuevas preguntas a los problemas planteados.

PARTE 1: LA ORGANIZACIÓN DE DATOS PARA LA TOMA DE DECISIONES Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

¿Qué espacios muestrales corresponden a diferentes probabilidades?

En esta primera parte se propone un acercamiento a la probabilidad condicional. La intención de estas actividades es afianzar las nociones de probabilidad, identificando distintos espacios muestrales. Para poder responder a las preguntas planteadas, no se espera que los estudiantes recurran a las fórmulas de probabilidad condicional. Por el contrario, la idea es introducir las nociones de probabilidad condicional a partir de la resolución y discusión de estas actividades.

Para determinar las probabilidades es importante que los estudiantes tengan presente la definición de probabilidad de Laplace. La intención de la primera actividad es acercar a los alumnos a la lectura de tablas de contingencia, retomar la definición de probabilidad de Laplace y, a partir de la misma, responder a las preguntas planteadas tras considerar, en cada caso, los subtotales y totales que sean necesarios.

ACTIVIDAD 1

En un hospital de la zona se ha investigado el poder curativo de un tratamiento en base a una droga nueva que llamaremos tratamiento A. Para decidir si este tratamiento supera el tratamiento anterior, que llamaremos tratamiento B, se administran ambos tratamientos pero en diferentes grupos de pacientes. Los resultados se exponen en la tabla que figura a continuación:

	Tratamiento A	**Tratamiento B**		
Curados	104	112		→ Subtotal de curados
No curados	416	168		→ Subtotal de no curados
				→ Total de pacientes
	↓ Subtotal de tratados con A	↓ Subtotal de tratados con B		

a) Completen la tabla con los datos que faltan.

b) Con esta información vamos a realizar un experimento que consiste en elegir al azar un paciente de todo este conjunto de pacientes. Calculen las siguientes probabilidades:

· El paciente elegido está curado.

· El paciente utilizó el tratamiento A y está curado.

c) Suponiendo, esta vez, que el paciente se eligió al azar de una lista de pacientes tratados con el tratamiento A, ¿cuál es la probabilidad de que el paciente se haya curado?

d) Sabiendo que el paciente se eligió al azar de una lista de curados ¿cuál es la probabilidad de que le hayan administrado el tratamiento A?

e) Si vos estuvieras enfermo, ¿qué tratamiento elegirías?

Para la gestión de este problema se sugiere un momento de trabajo grupal en el cual el docente recorra los diferentes grupos de trabajo para cerciorarse de que los totales y subtotales sean correctos, dado que el resto de la actividad se centrará en estos valores. Se espera que los estudiantes no tengan mayores dificultades para resolver el ítem a), dado que está especificado qué categoría corresponde a cada casillero indicando el subtotal. Teniendo en cuenta que este puede ser el primer acercamiento de los alumnos a una tabla de contingencia, la intención de incluir dichas categorías en los casilleros incompletos es que los estudiantes puedan analizar que además de la lectura por casillero se puede hacer una lectura por fila o columna considerando esos subtotales.

En el ítem b), la primera cuestión que puede surgir es el significado de la expresión "se eligió al azar". En esta instancia, el docente podrá ofrecer como idea alternativa que lo que se busca es que todas las personas tengan la misma chance de ser elegidas y que a esto se lo denomina "equiprobabilidad". Por ejemplo: para elegir al azar a un paciente, se le puede asignar un número a cada uno y anotarlo en un papel, luego poner todos los números en una bolsa y realizar un sorteo. También se pueden elegir números al azar utilizando programas de computación que generan números aleatorios o listas de números aleatorios.[1]

1. Otra forma posible de elegir un paciente al azar es ordenar el grupo de personas por su DNI, pero no en forma creciente ni decreciente sino escribiendo el número de DNI "de atrás hacia adelante". Entonces, si el DNI es 80.752.124, se escribe el número 42.125.708. Luego, se ordenan en una lista todos los números de menor a mayor (o de mayor a menor) y se elige una posición cualquiera dentro de esta lista. Por ejemplo, la persona que quedó ubicada en el puesto 23 de la misma.

Esperamos que para determinar la probabilidad de que el paciente elegido esté curado, los alumnos recuerden la definición de probabilidad de Laplace y calculen:

$$P(\textit{probabilidad de paciente curado}) = \frac{\text{cantidad de pacientes curados}}{\text{total de pacientes}} = \frac{216}{800} = 0{,}27$$

La probabilidad de que el paciente elegido esté curado es de 0,27. Sin embargo, es posible que en lugar de tomar el subtotal de curados sobre el total de pacientes, los alumnos consideren los curados en cada uno de los dos tratamientos A y B. Es decir, que calculen la probabilidad de que esté curado pero considerando por un lado los pacientes que hicieron el tratamiento A y por otro los que hicieron el tratamiento B.

$$P(\textit{curados sabiendo que hizo tratamiento } A) = \frac{104}{520}$$
$$P(\textit{curados sabiendo que hizo tratamiento } B) = \frac{112}{280}$$

Estos subtotales serían luego sumados para obtener:

$$\frac{104}{520} + \frac{112}{280} = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$$

En este caso el docente puede intervenir preguntando ¿cuál es entonces la probabilidad de que un paciente no esté curado? Siguiendo el método propuesto por estos alumnos, sería:

$$\frac{416}{520} + \frac{168}{280} = 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}4$$

Frente a este valor, y reforzando la idea (apoyada en la definición de Laplace) de que la probabilidad no puede superar el valor 1, será necesario reconsiderar los cálculos realizados. Creemos que en un primer problema como este, los alumnos pondrán en juego formas diversas de calcular la probabilidad, algunas correctas y otras no, producto de la diversidad de la información que tienen ante sí. En cualquier caso, serán productivas las intervenciones del docente que pongan luz sobre las lógicas que están siendo utilizadas y así permitirles a los alumnos avanzar en la comprensión de la organización de la información que porta la tabla.

Otra resolución similar a la anterior, pero en este caso correcta, es que consideren por un lado los curados y tratados con A, y por otro lado los curados y tratados con B, sobre el total de pacientes. De manera implícita, los alumnos estarían utilizando el teorema de la probabilidad total.

En este caso, los cálculos serían:

$$P(curado) = P(curado\ y\ tratado\ con\ A) + P(curado\ y\ tratado\ con\ B) =$$
$$\frac{104}{800} + \frac{112}{800} = \frac{216}{800} = 0{,}27$$

Para determinar la probabilidad de que el paciente elegido haya utilizado el tratamiento A y esté curado, los estudiantes tendrán que utilizar la información de la tabla que toma a los dos sucesos en forma conjunta. Así, usar el tratamiento A y estar curado se ubica en la intersección entre la fila curados y la columna del tratamiento A. Sin embargo, se pueden presentar dificultades al establecer sobre qué total se están considerando estas 104 personas. En ese caso, se podrá recordar qué significado tiene en la definición de Laplace el conjunto de casos posibles.

Dentro del grupo de estrategias erróneas, señalamos una: es posible que algún alumno calcule dos probabilidades simples y luego las sume o bien las multiplique como una manera de relacionarlas.

$$P(curado\ y\ tratado\ con\ A) = P(tratado\ con\ A) + P(curado) =$$
$$\frac{520}{800} + \frac{216}{800} = \frac{736}{800} = 0{,}92$$

Como ya mencionamos antes, es posible utilizar las estrategias propuestas en casos donde se haga evidente la no adecuación de la misma, por ejemplo:

$$P(curado\ y\ tratado\ con\ A) = P(tratado\ con\ A) + P(no\ curado) =$$
$$\frac{520}{800} + \frac{584}{800} = \frac{1104}{800} = 1{,}38$$

El docente puede discutir con los estudiantes, a partir del ítem b), qué es menos probable: que el paciente elegido al azar cumpla con dos características o que cumpla una sola. En otras palabras, y en términos dirigidos a los docentes, mostrar que la probabilidad conjunta es siempre menor a la probabilidad simple.

El ítem c) pregunta por la probabilidad de que un paciente elegido al azar del listado de pacientes tratados con A se haya curado. Lo primero que se debe advertir es que, en este caso, el paciente no es elegido entre los 800 pacientes que realizaron alguno de los tratamientos, sino entre los 520 que recibieron el tratamiento A. En términos más teóricos, por el momento fuera del alcance de los alumnos, en este caso se reduce el espacio muestral del total de los pacientes al total de los pacientes que realizaron el tratamiento A.

Si bien lo que se plantea en este ítem es calcular la probabilidad condicional $P\left(\frac{curado}{realizó\ el\ tratamiento\ A}\right)$, no se espera en esta instancia que el docente presente la definición de dicha probabilidad sino que se promueva el análisis de los valores en la tabla propuesta y el uso de la fórmula de Laplace para poder responder a la pregunta planteada.

Así se obtendrá:

$$P(curados\ sabiendo\ que\ hizo\ el\ tratamiento\ A) = \frac{104}{520}$$

Finalmente, en el ítem d) se propone una situación inversa a la anterior (“Sabiendo que el paciente se eligió al azar de una lista de curados, ¿cuál es la probabilidad de que le hayan administrado el tratamiento A?”). El objetivo es comenzar a discutir las probabilidades traspuestas y analizar que, en general, $P(A/C)$ es distinto a $P(C/A)$.

Como en la situación anterior, aquí se reduce el espacio muestral. El paciente es elegido entre los pacientes que se curaron (son 216) y lo que se analiza es la probabilidad de que haya realizado el tratamiento A. De los 216 curados, 104 realizaron el tratamiento A, por lo tanto:

$$P(haya\ realizado\ el\ tratamiento\ A\ sabiendo\ que\ está\ curado) = \frac{104}{216} = 0{,}4815$$

Una vez discutidas todas las estrategias propuestas en los ítems b), c) y d) se espera que los alumnos comparen y comiencen a establecer diferencias entre la probabilidad simple, la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. En estos casos, tendrán que analizar que si elegimos un paciente al azar no es lo mismo la probabilidad de que realice el tratamiento A y esté curado que la probabilidad de que, sabiendo que ha realizado el tratamiento A, el paciente esté curado. Es decir, no es lo mismo la probabilidad de que dos sucesos ocurran al mismo tiempo que la probabilidad de que, sabiendo que ha ocurrido uno de ellos, se dé el otro. Se trata sin duda de un primer acercamiento a la probabilidad condicional.

Antes de considerar la pregunta e) se puede discutir entre todos cuál será el criterio para elegir un tratamiento, suponiendo que uno elige el tratamiento más efectivo. Luego, en función del criterio que hayan decidido, se puede analizar si es posible responder a la pregunta con los datos del problema.

La intención de este ítem es que los alumnos analicen los resultados que se dan para el tratamiento B y los comparen con los del tratamiento A. En esta instancia no se espera que surjan respuestas en términos de probabilidad sino que se relacionen las proporciones de curados dentro de cada tratamiento por separado. Sería apropiado indagar las razones por las cuales eligen un tratamiento y analizar que la eficacia del mismo se determina en relación a sus resultados y no al total de pacientes.

En la siguiente actividad se vuelve sobre las ideas trabajadas en el primer problema pero en este caso los datos no estarán organizados en una tabla sino que serán dados en el enunciado. De este modo se espera que la construcción de la tabla surja como una estrategia para organizar la información y resolver la actividad.

ACTIVIDAD 2

Llegaron al mercado unos nuevos caramelos que vienen en bolsas. Los caramelos son de dos colores: rojos o azules. Además, algunos son dulces mientras que otros son superácidos. En cada bolsa se pueden saborear

136 rojos entre dulces (85) y superácidos (51). Los azules también vienen en esas variedades: dulces (34) y superácidos (34).

Si Fede se compró un paquete y extrae un caramelo sin mirar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un caramelo rojo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un superácido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea rojo y superácido?

d) Al extraer el caramelo, Fede ve que salió rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que sea superácido?

e) ¿Qué es más factible, encontrar un caramelo superácido entre los rojos o entre los azules?

Este problema comparte con el anterior que cada elemento (aquí los caramelos, en el anterior los pacientes) tiene dos características: un caramelo puede tener por un lado un determinado color y, por el otro, un determinado sabor. Es posible que los estudiantes identifiquen estas características y, a partir de lo trabajado anteriormente, organicen la información en un cuadro de doble entrada como el siguiente:

	Rojos	Azules	
Dulces	85	34	119
Superácidos	51	34	85
	136	68	204

Otros estudiantes pueden realizar un diagrama de árbol, aunque no los conozcan así, y algunos quizás calculen las probabilidades pedidas utilizando los datos de manera desorganizada. Se ha elegido presentar los datos desprovistos de la tabla para que su ausencia haga más evidente su poder organizativo.

Como se analizó en la actividad anterior, se puede volver sobre esta idea: la probabilidad de un suceso que reúne más de una característica es menor que la probabilidad de un suceso con un sola de esas características. Por ejemplo, la probabilidad de que un caramelo elegido al azar sea rojo y superácido es menor a la probabilidad de que el caramelo sea solo rojo. De este modo, y a partir de las preguntas que se plantean en el problema, se estará proponiendo comparar probabilidades usualmente conocidas como simples y conjuntas. No es necesario entrar en este vocabulario para formular dichas ideas.

En la actividad 3 se presentan los datos en formato de porcentajes y frecuencias absolutas. Si bien los mismos se vuelven a presentar en una tabla de contingencia, en esta oportunidad se ha elegido dar como información los subtotales correspondientes a las filas de la misma. Esto implica que la forma de completar la tabla será distinta a la que se abordó en la actividad 1.

ACTIVIDAD 3

Se realizó una encuesta en una ciudad metropolitana para conocer el comportamiento de los consumidores de artículos tecnológicos. Una de las preguntas formuladas fue: "¿Disfruta usted comprando artículos tecnológicos?". Entre los resultados obtenidos se determinó que el 80% de los hombres encuestados disfrutan comprar, mientras que el 30% de las mujeres encuestadas no lo disfrutan.

a) Completen la tabla con las cantidades correspondientes:

	Disfruta comprando Tecnología	No disfruta comprando tecnología	
Hombres			410
Mujeres			390
....			

b) De todas las personas encuestadas se elige una persona al azar, se la llama por teléfono y resulta que contesta una mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que disfrute de comprar tecnología?

c) Alberto es vendedor de artículos tecnológicos (especializados para la mujer) y gracias a un amigo pudo acceder a todos los números de teléfono (celulares) de las personas encuestadas que aseguraron disfrutar de la tecnología. Si llama a uno de esos números elegidos al azar ¿qué probabilidad tiene de que lo atienda una mujer?

Una de las intenciones de este problema es presentar a los alumnos una situación cuyos datos están dados con porcentajes. Se espera que los estudiantes puedan calcular las cantidades absolutas a partir de los porcentajes dados y luego respondan las preguntas.

Otra de las intenciones es profundizar las diferencias entre las probabilidades condicionales traspuestas. Es decir, poner en evidencia que la probabilidad de elegir a una persona que disfrute de comprar tecnología dado que es mujer es distinta a la probabilidad de elegir una mujer sabiendo que disfruta de comprar tecnología. Es decir:

$$P(T/M) \neq P(M/T)$$

Elaborar teoría con los estudiantes: primera vuelta sobre probabilidad condicional

En un momento de síntesis de las tres actividades iniciales, las ideas que se han puesto en juego generan buenas condiciones para formalizar las distintas nociones utilizadas. Tras recordar o revisitar la definición de la probabilidad simple y de la probabilidad conjunta, se podría construir una primera noción de probabilidad condicional.

En los problemas trabajados hasta este momento se pidió calcular la probabilidad de algunos resultados simples: por ejemplo, elegir una persona que esté curada (actividad 1) o un caramelo rojo (actividad 2). A estas probabilidades se las conoce como probabilidades simples.

El docente podrá comunicar que, dado un experimento aleatorio, se define la *probabilidad simple* como la probabilidad de que suceda un suceso simple entre la cantidad total de posibles resultados y se denota con $P(A)$, siendo A el suceso simple en cuestión.

$$P(A) = \frac{\text{resultados que cumplen con el suceso A}}{\text{resultados posibles del experimento}}$$

Además, se calcularon probabilidades de resultados que requerían que se cumplieran dos características simultáneamente. Por ejemplo, en la actividad 2, la probabilidad de que un caramelo elegido al azar resulte rojo y superácido:

$$P(\textit{rojo y superácido}) = \frac{\text{nº de caramelos rojos y superácidos}}{\text{nº de caramelos en la bolsa}}$$

Este tipo de probabilidad es conocida como probabilidad conjunta. Más formalmente, se define la *probabilidad conjunta* como la probabilidad de que sucedan simultáneamente dos eventos determinados entre la cantidad total de posibles resultados. Siendo A y B dos eventos cualesquiera, la probabilidad de que los eventos A y B sucedan al mismo tiempo se expresa con la notación $P(A \text{ y } B)$.

$$P(A \text{ y } B) = \frac{\text{resultados que cumplen simultáneamente con el suceso A y B}}{\text{resultados posibles del experimento}}$$

No es la intención de este documento que los alumnos profundicen sobre las distintas formas de calcular una probabilidad conjunta (es decir que no se trata de abordar específicamente a la regla de la multiplicación ni la definición de sucesos independientes). Luego de presentar la probabilidad simple y conjunta, el docente podrá, apoyado en los ejemplos trabajados, distinguir aquellos casos en los que las probabilidades se calcularon teniendo en cuenta otro universal. En esos casos se conocía un dato de antemano y esto reducía el total de resultados posibles. Por ejemplo, en la actividad 2, Fede extrajo un caramelo y vio que era rojo. Entonces, para saber la probabilidad de que además sea superácido (sabiendo que es rojo) se toma como total a todos los caramelos rojos.

$$P(\textit{superácido sabiendo que es rojo}) = \frac{\text{caramelos rojos y superácidos}}{\text{total de caramelos rojos}}$$

En la actividad 3, cuando Alberto llama por teléfono a una persona que disfruta de comprar tecnología y hay que calcular la probabilidad de que sea mujer, se busca esa mujer del total de personas que disfrutan comprar tecnología, no del total de encuestados. Estas probabilidades se conocen como probabilidades condicionales y aquel dato que se da de antemano (por ejemplo saber que el caramelo era rojo) se conoce como la condición. Para avanzar en la conceptualización, el docente podrá preguntar cuál es la condición en los problemas ya trabajados.

Primera idea a compartir en la clase: la *probabilidad condicional* es la probabilidad de que ocurra un suceso A, sabiendo que también sucede otro suceso B. Esta probabilidad condicional se escribe $P(A/B)$, siendo B el suceso condición, y se lee “la probabilidad de A dado B”.

$$P(A/B) = \frac{\text{resultados que cumplen simultáneamente con el suceso A y B}}{\text{resultados que cumplen B}}$$

El docente podrá ahora tomar algunos ejemplos sencillos para “corroborar” esta definición dentro de los experimentos desarrollados.

En la siguiente actividad no se presenta una tabla de contingencia y la información se brinda únicamente con porcentajes.

ACTIVIDAD 4

La Asociación del Fútbol Argentino convoca a mujeres futbolistas para integrarse a la selección argentina, equipo representativo del país en las competiciones oficiales de fútbol femenino. La convocatoria se dirige a todos los clubes deportivos del país, que podrán llevar a una sola representante.

En el club Sol de Mayo, el 80% de los socios son hombres, el 92% de los socios juega al fútbol y el 78 % de los socios son hombres que juegan al fútbol.

Todas las mujeres del club son excelentes jugadoras, por lo cual el director técnico decide elegir una jugadora al azar.

a) Se selecciona una persona al azar de la base de datos del club, donde están todos los datos de los socios. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una mujer que juegue al fútbol?
b) Si en el club se arma un listado de socios separado por sexo y se selecciona una socia al azar de la lista de las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de elegir una que juegue al fútbol?

En este caso se espera que el uso de una tabla de contingencia sea una estrategia propuesta por los estudiantes dado que su utilización será un recurso necesario para poder organizar y analizar la información, y así luego calcular las probabilidades pedidas. Por otra parte, queremos advertir que para esta actividad los alumnos disponen de una idea de probabilidad condicional que no incluye todavía el cálculo de cada una de las probabilidades de la definición formal. Se espera que los estudiantes, aun sin disponer de la fórmula mencionada, puedan calcular las probabilidades pedidas utilizando las ideas que circularon en la clase.

Vale destacar que en este problema ninguno de los datos necesarios para responder a las preguntas se explicitan en el enunciado, pero pueden encontrarse si se diseña una tabla apropiada. Por ello, el problema hace muy necesario el armado de la tabla.

A continuación, se sugieren dos fases de trabajo en el aula para la actividad.

Primera fase: probabilidad conjunta

Al comenzar la producción grupal, es posible que algunos alumnos consideren que la actividad no se puede realizar porque no tienen las cantidades necesarias. En tal caso, el docente podrá sugerir que inventen un total y que a partir del mismo intenten responder las preguntas.

Luego, se propondrá a los alumnos abordar colectivamente la resolución del ítem a). Esta será la ocasión de analizar qué valores son admisibles para la tabla. Algunos alumnos habrán completado una tabla con porcentajes mientras que otros habrán utilizado distintos valores absolutos.

Si se considera un total de 100 socios, entonces todos los porcentajes se pueden pensar como valores absolutos y el problema resulta semejante al de la actividad 3.

$$P(\textit{que sea mujer y juegue al fútbol}) = \frac{14}{100} = 0{,}14$$

	Hombres	Mujeres	
Fútbol	78	14	92
No fútbol	2	6	8
	80	20	100

Del mismo modo, otros alumnos podrán pensar en 1000 socios, en 500 socios. Es importante que surjan distintos totales para poder discutir colectivamente que no importa el total de socios, ya que cada valor de la tabla siempre representa el mismo porcentaje para cada total elegido. En caso de que no surjan, el docente puede preguntar: "¿Cuál es el total de socios?"; "¿Pueden ser 1000 socios?"; "¿Y 500 socios?"; "En estos casos, ¿cómo se completaría la tabla?".

	Hombres	Mujeres	
Fútbol	780	140	920
No fútbol	20	60	80
	800	200	1000

	Hombres	Mujeres	
Fútbol	390	70	460
No fútbol	10	30	40
	400	100	500

Si bien los totales y subtotales son distintos, al calcular la probabilidad pedida llegarán al mismo resultado.

$$P(\textit{que sea mujer y juegue al fútbol}) = \frac{14}{100} = \frac{140}{1000} = \frac{70}{500} = 0{,}14$$

Este es un momento propicio para que el docente cuestione por qué todos los cálculos dan igual. De este modo podrá analizarse que 14 representa el 14% de 100, 140 representa el 14% de 1000 y 70 el 14% de 500. Por otra parte, cada casillero de las distintas tablas representa un determinado porcentaje del total: 78 es el 78% de 100, 780 es el 78% de 1000 y 390 el 78% de 500; también se observa que 92 es el 92% de 100, 920 el 92% de 1000 y 460 el 92% de 500, etc.

La intención es, por lo tanto, presentar la tabla de porcentajes como representante de todas las posibles tablas. Al completar la tabla con porcentajes, se podrá analizar el significado de cada porcentaje y el sentido de las sumas de porcentajes en forma vertical y horizontal.

	Hombres	Mujeres	
Fútbol	78%	14%	92%
No fútbol	2%	6%	8%
	80%	20%	100%

En conclusión, la probabilidad de elegir un socio que sea mujer y que juegue al fútbol se puede calcular realizando 14% ÷ 100%, sin necesidad de saber cuáles son los valores absolutos.

Segunda fase: probabilidad condicional

Los alumnos ya tienen disponible la tabla con porcentajes. Igualmente, para calcular la probabilidad condicional los alumnos también podrían utilizar sus tablas con sus cifras inventadas: entonces responderían que la probabilidad de elegir una mujer futbolista, de una lista de socias, es $\frac{14}{20}$ o $\frac{140}{200}$ o $\frac{70}{100} = 0{,}7$.

En este momento, el docente podrá preguntar si ese cálculo se podría responder utilizando la nueva tabla de porcentajes. Utilizando la misma lógica que con sus tablas, los estudiantes podrán responder

$$P(\textit{que juegue al fútbol dado que es mujer}) = \frac{\text{\% de mujeres futbolistas}}{\text{\% de mujeres}} = \frac{14\%}{20\%} = 0{,}7$$

Entonces, se podrá concluir otra vez con los alumnos que la probabilidad se puede calcular incluso si los datos están dados en porcentajes.

Elaborar teoría con los estudiantes: una vuelta de tuerca a la probabilidad condicional

Para presentar la definición formal del nuevo cálculo de probabilidad condicional, el docente podrá comenzar recapitulando los modos en los que fue calculada. Así notarán que en las actividades 1, 2 y 3 trabajaron con valores absolutos, pero en la actividad 4 concluyeron que se puede pensar en probabilidades a partir de porcentajes. Por ejemplo, la probabilidad de elegir una futbolista dentro de la lista de mujeres, se puede pensar como:

$$P(\textit{que juegue al fútbol dado que es mujer}) = \frac{14\%}{20\%} = 0{,}7$$

Aquí, el 14% es el porcentaje de socias mujeres que juegan al futbol y 20% es el porcentaje de socias mujeres. También es posible pensar el 14% como $\frac{14}{100} = 0{,}14$ y al 20% como $\frac{20}{100} = 0{,}2$. Al retomar la actividad 4, se podrá verificar que 0,14 es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea una mujer y que juegue al fútbol. Además 0,20 es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer.

$$P(mujer) = \frac{\%\text{ de mujeres}}{\%\text{ total de socios}} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Entonces, la probabilidad de que una socia elegida al azar del total de mujeres sea futbolista se puede escribir como:

$$P(que\ juegue\ al\ fútbol\ dado\ que\ es\ mujer) = \frac{14\%}{20\%} = \frac{P(mujeres\ futbolistas)}{P(mujer)}$$

De modo general:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

donde B no es imposible.

Se espera que el siguiente problema pueda ser resuelto por los estudiantes utilizando la definición de probabilidad condicional, sin la necesidad de convertir porcentajes en frecuencias absolutas.

ACTIVIDAD 5

Los repositores de supermercado deben asegurarse de reponer los artículos faltantes y reemplazar todos los productos que estén vencidos. Pero en el supermercado Súper Vencido no siempre lo hacen. En el sector de lácteos de este supermercado se encuentran a la venta yogures de las marcas A, B y C, todos mezclados. El 50% de los yogures son de la marca A, el 30% son de la marca B y el resto de la marca C.

El 7,5% de los yogures son de la marca A y están vencidos, el 2,5% de los yogures son de la marca B y están vencidos, mientras que un 5% de los yogures son de la marca C y están vencidos.

Fede es un chico muy confiado y compra productos sin mirar la fecha de vencimiento. Un día, Fede compra un yogur de este supermercado y, como no tiene preferencias por ninguna marca, elige uno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté vencido?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté vencido y sea de la marca A?
c) Sabiendo que Fede eligió un yogur vencido, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?
d) ¿Qué es más probable, que le toque un yogurt vencido sabiendo que es de la marca A, sabiendo que es de la marca B o sabiendo que es de la C?

Si los alumnos construyen una la tabla como recurso para ordenar la información que se encuentra en el enunciado, se encontrarán con una tabla distinta a la que vienen utilizando, pues esta tendrá 3 columnas (o filas) en lugar de 2. La intención de la actividad es que los estudiantes adviertan que las tablas podrían armarse con varias filas y columnas.

Los ítems a) y b) se pueden resolver con la información presente en el enunciado: la probabilidad de que el yogur esté vencido es 7,5% + 2,5% + 5% = 15% = 0,15, mientras que la probabilidad de que esté vencido y sea de la marca A es 7,5% = 0,075

Si algún estudiante intenta armar una tabla con valores absolutos, sobre una base de 100 yogures se encontrará con valores sin sentido, como por ejemplo 7,5 yogures vencidos de la marca A. Por otra parte, para responder al ítem c), solo necesita los datos ya calculados en a) y b).

$P(\textit{el yogur es de la marca A sabiendo que está vencido}) = P(\textit{marca A sabiendo que está vencido}) = P(\frac{A}{vencido}) = \frac{0{,}075}{0{,}15} = 0{,}5$

Para el ítem c), se espera que los alumnos retomen la idea de que un mayor porcentaje de yogures vencidos de una marca determinada no implica una mayor probabilidad de encontrar un yogur vencido dentro de esa marca. Por ejemplo, el 7,5% de los yogures son de la marca A y están vencidos, y el 5% son de la marca C y están vencidos. Pero dentro de los de la marca A, el 15% están vencidos, y dentro de la marca C, el 25% están vencidos. Por lo tanto, es más probable encontrar un yogur vencido en la marca C que en la marca A.

Para finalizar este conjunto de problemas sobre la probabilidad condicional, presentamos una actividad que tiene como intención presentar a los alumnos un primer acercamiento al teorema de Bayes.

ACTIVIDAD 6

La fábrica de gaseosas Fantus posee tres plantas embotelladoras distribuidas en distintas zonas de la Argentina: Buenos Aires, Formosa y Mendoza. Cada planta tiene diversas capacidades. La planta Buenos Aires embotella el 60% de la producción total, la planta Formosa el 30% de la producción total y en Mendoza se embotella el resto.

El historial de datos de cada planta indica que el 10% de los envases de la planta de Buenos Aires son defectuosos,[2] el 30% de las botellas de la planta de Formosa son defectuosas y el 40% de lo embotellado en la planta de Mendoza resulta defectuoso.

Un día la empresa recibe una demanda a consecuencia de la muerte causada a una persona que ingirió una botella de gaseosa que contenía restos de un agente tóxico empleado en el lavado del envase retornable.

Los dueños de la fábrica quieren averiguar, sabiendo que la botella efectivamente era defectuosa, ¿cuál planta tiene mayor probabilidad de ser culpable de poner en el mercado la botella defectuosa?

La intención de esta actividad es que los alumnos desarrollen una comprensión intuitiva del teorema de Bayes y puedan resolver problemas donde tradicionalmente se utiliza la fórmula del teorema de Bayes, pero sin recurrir a ella. Se espera que los estudiantes construyan una tabla de doble entrada para una cantidad hipotética de botellas en las cuales los porcentajes ajusten exactamente y, a partir de lo que saben de probabilidad condicional, puedan resolver el problema.

	Planta Buenos Aires	Planta Formosa	Planta Mendoza	
Defectuosa	6	9	4	19
No defectuosa	54	21	6	81
	60	30	10	100

2. Defecto de fabricación: se refiere a cuando un producto concreto, al ser utilizado o consumido, se desvía del diseño previsto para dicho producto. Por tanto, entre la realidad del producto y el diseño previsto para ese producto hay una discrepancia que normalmente se produce por un fallo de fabricación.

Los estudiantes pueden leer directamente en esta tabla que, entre las botellas defectuosas, 6 de 19 son embotelladas por la planta Buenos Aires, 9 de 19 por la planta Formosa y 4 de 19 por la planta Mendoza. Es decir que la planta Buenos Aires tiene $\frac{6}{19} = 0{,}31$ probabilidades de haber producido la botella defectuosa, mientras que la planta Formosa tiene $\frac{9}{19} = 0{,}47$ probabilidades de ser la culpable. A diferencia de lo que se podría creer en un principio, la planta Mendoza es la que menos probabilidades tiene de producir la botella defectuosa: $\frac{4}{19} = 0{,}21$. Esto se debe a que embotella solo el 10% (un porcentaje muy pequeño) de la producción total.

Aunque no lo expliciten, al realizar este razonamiento los estudiantes utilizan el teorema de Bayes, uno de los resultados más importantes de la probabilidad condicional. Esto ha sido posible gracias a las actividades planteadas para un análisis de las tablas de doble entrada. Queda a cargo de la enseñanza proponer un avance sobre estas ideas en otro momento de la formación de los estudiantes.

PARTE 2: CONSTRUCCIÓN DE DATOS PARA LA TOMA DE DECISIONES Y MEDIDAS CENTRALES

¿Qué dicen del conjunto de datos la media, la mediana y la moda?

Las siguientes actividades tienen como objetivo trabajar con la media, mediana, moda y cuartiles. Estas medidas se definirán e interpretarán en el contexto de diferentes situaciones. Se comenzará retomando el concepto de promedio (un cálculo que los estudiantes ya conocen), que será abordado en diferentes contextos y distribuciones de datos para analizar si siempre resulta una buena medida resumen del conjunto de datos. Posteriormente, se definirán los conceptos de moda y mediana en el mismo contexto, y se realizará una comparación entre dichos valores. A lo largo del desarrollo de la propuesta se intentará analizar si es suficiente utilizar una única medida de tendencia central para describir un conjunto de datos. Finalmente, se propondrá la utilización de los cuartiles con el fin de dar mayor precisión sobre la ubicación de los datos. No se avanzará, por el momento, sobre las medidas de dispersión.

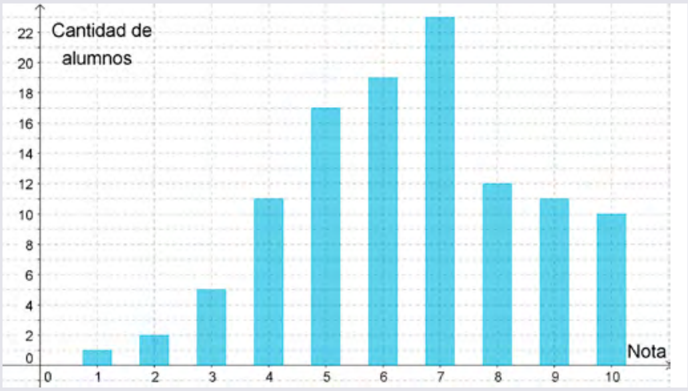
En la primera actividad de esta segunda parte, se propone un trabajo con notas y promedios de notas, teniendo en cuenta que los estudiantes ya conocen el cálculo del promedio.

ACTIVIDAD 1

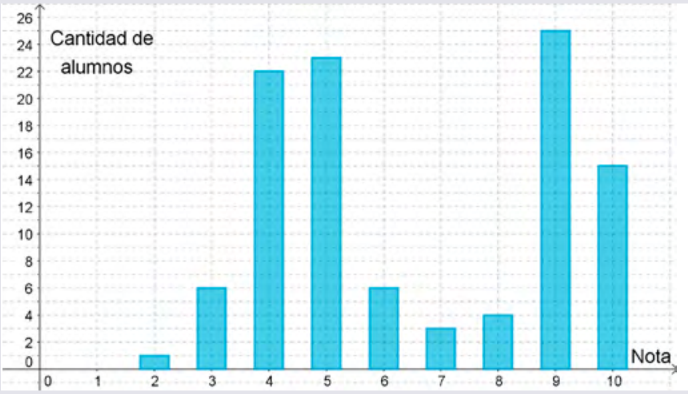
Una ONG desarrolla un proyecto de capacitación laboral y pasantías pagas destinado a estudiantes del último año del secundario. Si bien la convocatoria es masiva y se inscriben muchísimos jóvenes, la cantidad de vacantes es limitada. Por este motivo se toma un examen de conocimientos generales. A continuación se presentan los resultados de cuatro escuelas que participan del proyecto.

Escuela A	
Nota	Cantidad de alumnos
0	0
1	1
2	2
3	5
4	11
5	17
6	19
7	23
8	12
9	11
10	10
Total	**111**

Escuela B	
Nota	Cantidad de alumnos
0	0
1	0
2	1
3	6
4	22
5	23
6	6
7	3
8	4
9	25
10	15
Total	**105**



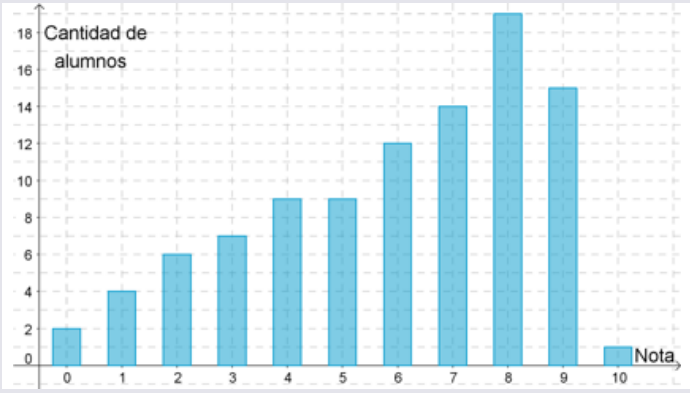
Escuela A



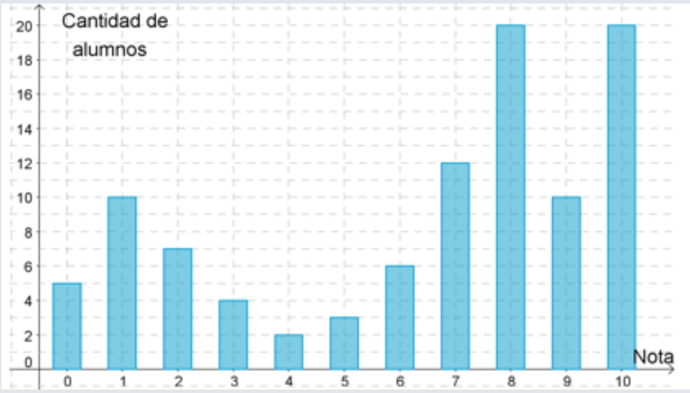
Escuela B

Escuela C	
Nota	Cantidad de alumnos
0	2
1	4
2	6
3	7
4	9
5	9
6	12
7	14
8	19
9	15
10	1
Total	**98**

Escuela D	
Nota	Cantidad de alumnos
0	5
1	10
2	7
3	4
4	2
5	3
6	6
7	12
8	20
9	10
10	20
Total	**99**



Escuela C



Escuela D

Con la intención de analizar el rendimiento de cada escuela, les pedimos que calculen:

a) ¿Cuál es el promedio de las notas? ¿Cuántos alumnos obtienen esa nota?

b) ¿Cuál es la nota que más se repite? ¿Cuántos alumnos obtienen dicha nota?

En vista de los resultados obtenidos, los promotores de la ONG están evaluando cuál es el criterio que tomarán para elegir los chicos que participarán en las pasantías. La intención de los organizadores es que todas las escuelas tengan una oportunidad similar de incorporar al programa a sus alumnos. De este modo se propone que la cantidad de vacantes para cada escuela se ajuste a la cantidad de alumnos de cada institución. Por el momento están evaluando dos posibilidades:

- Criterio mediana: consiste en ordenar las calificaciones de todos los estudiantes de menor a mayor y tomar la nota central, es decir una nota que separa al total de los alumnos en dos grupos con igual cantidad de personas. Si la cantidad de alumnos es par, se otorgarán las vacantes correspondientes a la mitad de los estudiantes con mejor calificación. En cambio, si la cantidad de alumnos es impar, se otorgará la cantidad de vacantes correspondiente al valor entero siguiente a la mitad (por ejemplo, si son 111 estudiantes, se asignarán vacantes a las 56 mejores calificaciones). Interesa señalar que podría darse el caso de que haya muchos alumnos cuya nota coincida con la nota central. En ese caso, las vacantes de la nota central serán otorgadas por sorteo hasta completar el cupo.
- Criterio media: consiste en seleccionar los estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual a la media de las notas de su escuela.

c) ¿Cuántos alumnos serían seleccionados en cada una de las escuelas según cada criterio?
d) En cada caso, ¿a partir de qué nota fueron seleccionados?
e) ¿Cuál de los dos criterios te parece más adecuado para funcionar de acuerdo a los objetivos de la ONG? ¿Por qué?

Se ha elegido presentar los datos a partir de tablas de frecuencia y gráficos de barra, con el fin de recordar este modo de presentar la información. El objetivo de este primer problema es revisar el concepto de promedio e incorporar el término media. Por otra parte, se pretende analizar y definir la moda y la mediana.

La actividad se plantea en dos partes: un primer momento corresponde a la resolución de los ítems a) y b), recordando el significado del promedio y definiendo la moda; un segundo momento, en el que se resuelven los ítems c), d) y e), donde se define la mediana y se compara con el promedio.

Para comenzar a analizar la forma en la que se presentan los datos, el docente puede proponer una lectura colectiva del problema y formular algunas preguntas en forma oral para el total de la clase. A modo de ejemplo, sugerimos: “¿Cuántos alumnos fueron evaluados en cada escuela?”; “¿Cuántos alumnos se sacaron un 10?”; “¿Cuál es la escuela que tuvo más alumnos con un 1?”; “¿Cuántos alumnos obtuvieron esa nota?”.

Posteriormente, se puede proponer el trabajo en pequeños grupos para resolver los ítems a) y b). Los datos que aportan las tablas precedentes permiten llegar a los siguientes resultados:

Escuela	Total de estudiantes	Promedio	Moda	Mediana
A	111	6,48	7	7
B	105	6,54	9	6
C	98	5,95	8	6,5
D	99	6,35	8 y 10	8

Para responder a la pregunta a), los alumnos tendrán que determinar el promedio de las notas de cada escuela. Será oportuno acordar la cantidad de decimales a los que se va a redondear el resultado.

Una dificultad que puede aparecer para determinar el promedio es que no se considere la cantidad de alumnos que obtuvieron como calificación un 0. En este caso, los estudiantes quizás se pregunten: “¿Cómo es posible que la calificación sea 0?”. Se puede sugerir que esta nota corresponde a algún estudiante que no quiso realizar el examen o que estuvo ausente. Al preguntar cuántos alumnos obtuvieron “esa nota”, se espera que los estudiantes puedan analizar que el promedio no necesariamente es un valor de la distribución.

Para responder a la pregunta del ítem b), sobre la nota que más se repite, los estudiantes podrán analizar la tabla de frecuencias y buscar el número mayor en la columna con la cantidad de alumnos. Otra posibilidad es que visualicen en el gráfico de barras qué nota le corresponde a la barra de mayor altura.

Luego de la puesta en común de esta primera parte de la actividad, el docente podrá recordar y/o definir la moda como “el valor que más se repite en una distribución". A continuación, podría preguntar: "¿Qué pasa entonces en la escuela D, donde hay dos valores que tienen la mayor frecuencia?". En ese caso, se podrá especificar que se trata de una situación bimodal.

Otra cuestión para analizar en esta instancia es que el promedio no siempre coincide con un valor de la variable (en este caso, las notas), mientras que la moda siempre coincidirá con algún valor de la variable porque es el valor con mayor frecuencia absoluta.

En la segunda parte de la actividad, se pretende que los estudiantes comparen los criterios de selección.

Escuela	Cantidad de alumnos según criterio Mediana	Mediana	Cantidad de alumnos según criterio Media	Media
Escuela A	56	7	56	6,48
Escuela B	53	6	47	6,54
Escuela C	49	6,5	61	5,95
Escuela D	50	8	62	6,35

La pregunta del ítem c) apunta a que los alumnos determinen cuántos alumnos serán seleccionados de acuerdo a cada criterio. En la pregunta d), los estudiantes tendrán que identificar cuál es la nota de corte. Si se utiliza el criterio mediana, la mitad de los alumnos con mayor puntaje obtienen ciertas notas, pero la nota mínima no es la misma en todos los casos. Esto dependerá de la distribución de las calificaciones en cada una de las escuelas. Se han preparado los datos para que no se precise la situación de sorteo, de modo que tenga sentido para el problema realizar el corte en ese valor. Evitamos así un desvío de la discusión que no queremos dar en este momento.

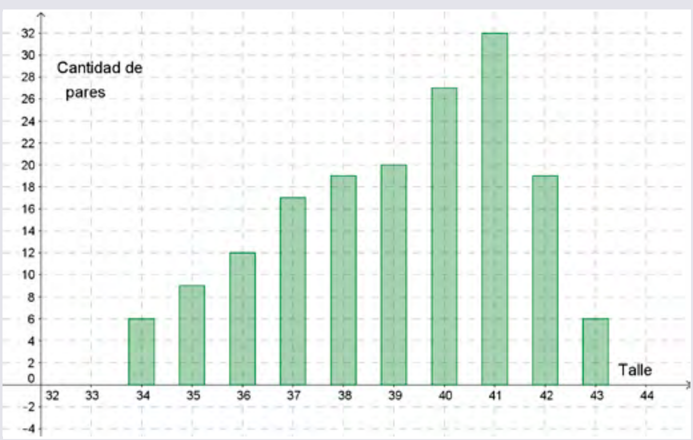
Con los valores elegidos para esta situación, se puede analizar que la mediana siempre divide a los datos en dos partes con igual número de elementos y, en cambio, el promedio no necesariamente es un valor que se encuentra en el centro de los datos (no en el sentido de la mediana). En este caso, el docente quizás trabaje con los alumnos en torno a cómo inciden el valor de la mediana y el valor del promedio en el número de alumnos que son elegidos. Se trata de comprender que, más allá del valor puntual que asuma la mediana, ese criterio siempre permitirá que la mitad de los alumnos queden elegidos. En cambio, cuando se utiliza el criterio del promedio, es menos evidente de qué forma ese valor afecta al número de alumnos seleccionados.

Algunos estudiantes podrían suponer que una escuela con promedio alto cuenta con muchos alumnos con notas altas y, por lo tanto, la cantidad de alumnos seleccionados por la ONG también será un número grande. Esto puede ser una buena ocasión para discutir cuán sensible es el promedio a valores extremos.

Luego de la puesta en común, se puede definir la mediana y retomar las definiciones de media y moda, para compararlas. En la siguiente actividad, se seguirá trabajando con la media, mediana y moda para datos discretos. En este caso, se presentarán los datos en gráficos y tablas, pero por separado. Se propone estudiar, para distintas situaciones, si alcanza con analizar y presentar una sola de las medidas centrales como resumen de los datos.

ACTIVIDAD 2

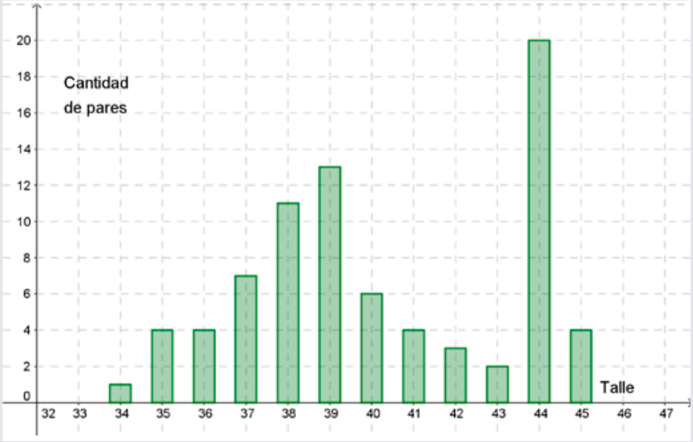
El encargado de compras de una zapatería recibe el resumen de ventas del mes pasado correspondiente a tres sucursales. A continuación, te presentamos la información:



Sucursal Parque

Talle	Cantidad de pares
34	20
35	33
36	44
37	38
38	25
39	13
40	4
41	3
42	0
43	0
44	0
45	0

Sucursal Centro



Sucursal Polideportivo

a) ¿Qué talles son los más solicitados en cada sucursal?

b) ¿Cuál es el talle promedio de las ventas en cada sucursal? ¿Consideran que ese talle es representativo de todos los zapatos vendidos en el mes (es decir, que es el talle que mejor describe las ventas de esa sucursal)?

c) Utilicen la localización de las medidas media, mediana y moda para analizar las respuestas que dieron en el ítem b).

Los resultados para esta actividad son:

	Media	Mediana	Moda
Sucursal Centro	39,5	39,5	41
Sucursal Parque	36,47	36	36
Sucursal Polideportivo	40,23	39	44

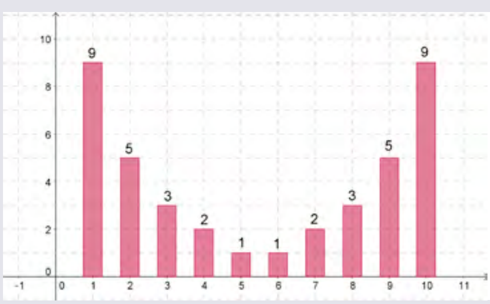
Lo que se intenta discutir con este problema, es si el promedio es siempre un valor representativo de los datos. Es decir, si la mayoría de los talles vendidos se agrupan alrededor de dicho valor o si en algunos casos es necesario analizar este valor junto a otra medida de posición central.

Con la pregunta del ítem c) se trata de discutir con los alumnos cuál es el aporte de la consideración de las tres medidas en forma conjunta. De este análisis pueden surgen las siguientes cuestiones: "Si el promedio es representativo, *¿qué sucede con las otras medidas de posición central?*"; "Si no es representativo, *¿qué sucede con las otras medidas de posición central?*"; "¿Cómo quedan ubicadas con respecto al promedio las otras medidas de posición central?"; *"¿Con qué criterio se toma en cuenta un valor resumen para decidir en el caso de que el promedio no sea representativo?"*.

En la próxima actividad se propone el análisis de los datos a partir de gráficos de barras.

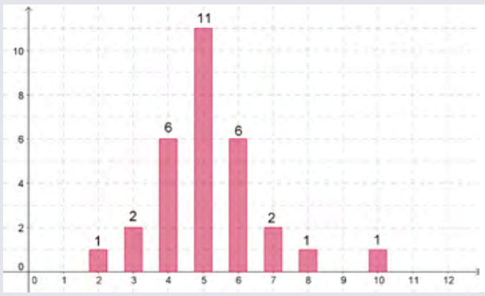
ACTIVIDAD 3

En los siguientes gráficos, se representan las notas de cuatro cursos. Identifiquen la media, la mediana y la moda. Realicen un análisis del conjunto de datos a partir de los valores determinados.

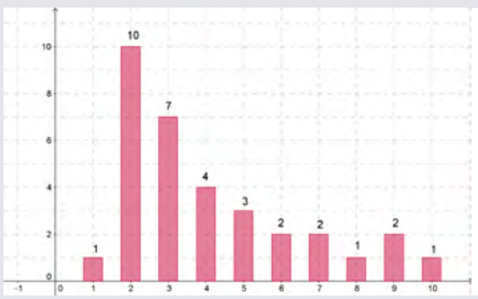


Curso A

Curso B



Curso C



Curso D

Si bien los estudiantes podrán confeccionar la tabla de frecuencias correspondiente a cada gráfico, aquí no forma parte de la información que se provee. Los resultados, en cada caso, son:

Curso	Datos	Media	Mediana	Moda
A	40	5,5	5,5	1 y 10
B	40	5,5	5,5	5 y 6
C	30	5,17	5	5
D	33	4,09	3	2

En los dos primeros gráficos se puede analizar la simetría y de qué modo influye esto en la obtención de la media y la mediana. Estos dos casos permiten discutir la representatividad de los valores centrales y la coincidencia de la media y la mediana. "¿Si el gráfico es simétrico siempre coincidirán estos valores?", podría preguntar el docente, instando a los estudiantes a considerar ejemplos para llegar a una respuesta. También cabe analizar que en estos casos, si bien los valores centrales coinciden, las distribuciones de los datos son diferentes.

El gráfico del curso C también es prácticamente simétrico. En este sentido, permite analizar nuevamente de qué modo influyen los datos en los valores centrales. Aquí la mediana es 5 y los valores se ubican prácticamente de forma simétrica alrededor de ese valor. Sin embargo, la media es 5,17. Cabe preguntarse por qué el valor de la media es un poco mayor que el de la mediana. En este caso, ¿cuál es el dato que ha influido? ¿Qué sucede con la media si quitamos ese valor?

El gráfico del curso D no es simétrico y se puede analizar de qué modo ha influido la moda en el promedio.

Finalmente, para cerrar estas tres actividades donde se ha trabajado media, mediana y moda, se puede proponer un verdadero o falso.

ACTIVIDAD 4

Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, aportando argumentos a favor o en contra en cada caso.

a) Si tomamos las notas de un grupo de alumnos y más de la mitad de las notas son superiores a 7, entonces podemos afirmar que la media es también superior a 7.

b) Si tomamos las notas de un grupo de alumnos y más de la mitad de las notas son superiores a 7, entonces podemos afirmar que la mediana es también superior a 7.

c) Si se toma el número medio de calzado de un grupo de socios de un club y resulta que la media es un poco mayor que la mediana, entonces el grupo está formado por pocos adultos y muchos niños.

d) Si se toma el número medio de calzado de un grupo de socios de un club y resulta que la media es apenas menor que la mediana, entonces el grupo está formado por pocos adultos y muchos niños.
e) Si en un curso la nota más alta fue un 8, es posible que el promedio de ese curso dé como resultado 9.

En esta oportunidad, se reinvierten los conocimientos elaborados en las actividades 1, 2 y 3. Lo que se espera del análisis de estos enunciados es que los alumnos, apoyados en los ejemplos que ya trabajaron, traten de imaginar dónde pueden estar localizados los datos a partir de conocer ciertas ubicaciones relativas de la media y la mediana. Este ejercicio impone el uso adecuado de estas medidas-resumen y, por eso, nos parece una actividad muy valiosa.

La idea es analizar con los chicos que si bien el promedio y la mediana son medidas de tendencia central, y se utilizan como resumen de los datos, teniendo solo estos valores contamos con poca información del conjunto de datos. Por tal motivo, también se analizan junto con estas medidas de posición central otras medidas como los cuartiles o la dispersión.

Por ejemplo, se puede analizar que la media es muy sensible a valores extremos y preguntar: "¿En qué casos la media es una buena medida del centro de la distribución?".

Por otra parte, si bien la mediana no es sensible a valores extremos (es robusta), utiliza muy poca información de los datos y representa el centro de la distribución en un sentido claro. "Deja, a lo sumo, el 50 por ciento de datos por encima de ese valor y el 50 por ciento por debajo", se puede concluir. Si bien la moda es el dato que se repite más veces, en ocasiones también es un valor atípico.

La última actividad tiene como objetivo definir los cuartiles y analizar un conjunto de datos a partir de 5 valores: el valor mínimo, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el valor máximo.

ACTIVIDAD 5

Los trabajadores de una empresa están reclamando un aumento de sueldo. Los directivos no quieren otorgar dicho aumento y argumentan que el sueldo medio de los empleados de la empresa es superior a los $7.000. En la siguiente tabla se muestra el sueldo de cada trabajador de acuerdo al cargo que ocupa en la empresa:

Cargo	Sueldo	Cantidad de empleados
Administrativos	$8.000	5
Gerente	$50.000	1
Telefonistas	$6.000	3
Mantenimiento	$ 5.500	6
Operarios	$ 7.500	14
Subgerente	$42.000	1

a) Analicen si es cierto lo que dicen los directivos.

b) Si tuvieran que defender a los trabajadores, ¿cuál o cuáles de los valores estudiados (media, mediana o moda) les permitirían dar argumentos a favor de la postura de los trabajadores?

c) ¿Es cierto que el 75% de los empleados cobra menos de $8.000?

Aclaramos que, si bien cuando se trabaja con sueldos se trata de una variable continua, en esta oportunidad se ha escogido trabajar con una variable discreta para facilitar la ubicación de los cuartiles (y analizar la información que se puede obtener a partir de estos valores). En los ítems a) y b) se intenta seguir analizando las medidas de tendencia central. En este caso, entre los datos aparecen valores extremos que generan que el promedio sea un valor que no representa a la mayoría de los trabajadores de la empresa.

Se espera que los estudiantes analicen que el promedio, en este caso, no es una buena medida resumen de los datos: los valores extremos hacen que el promedio se ubique por encima de la mediana. En este sentido, al analizar los sueldos de la empresa, deberán utilizar la mediana y la moda como argumento a favor de los trabajadores.

La pregunta del ítem c) se propone con el objetivo de definir los cuartiles. El docente puede proponer que, del mismo modo que la mediana se utiliza como valor central que divide al conjunto de datos, cada uno con el 50% de los mismos, también se utilizan otros valores de posición llamados cuartiles que, en este caso dividen en 4 partes con igual cantidad de elementos.

Para poder determinarlos, primero se deben ordenar los datos de menor a mayor (o construir una tabla de frecuencias acumuladas). En este caso, sería:

Sueldo	Cantidad	Frecuencia acumulada
$5.500	6	6
$6.000	3	9
$7.500	14	23
$8.000	5	28
$42.000	1	29
$50.000	1	30

Para determinar la posición de los cuartiles dentro del conjunto de datos, podemos proceder como en el caso de la mediana pero para cada una de las partes en las que la mediana ha dividido a la muestra. Teniendo en cuenta que los cuartiles dividen en 4 partes iguales al conjunto de datos, observaremos que el 25% de los datos quedan por debajo del primer cuartil, que el 50% queda por debajo del segundo cuartil y que el 75% queda por debajo del tercer cuartil. En este sentido, el segundo cuartil coincide con la mediana.

Si tenemos 30 datos, la posición central se toma como el promedio de los datos del lugar 15 y 16. Esto es $\frac{6000 + 7500}{2} = 6750$. Es decir, la mediana es $6750.

El primer cuartil se obtiene considerando el dato que ocupe el lugar central en la “primera mitad”. Si hay 15 datos en la primera mitad, el primer cuartil corresponde al dato que ocupa el lugar 8, quedando 7 datos por debajo y 7 datos por encima. Entonces, Q_1 = \$6.000. El tercer cuartil corresponde al dato que ocupa el lugar 23. Es decir, Q_3 = \$8.000.

Posteriormente, el docente puede definir los cuartiles y comunicar de qué modo se suelen utilizar estos valores para analizar los datos. Para ello, se toman el mínimo, máximo, primer cuartil, mediana y tercer cuartil. En el problema estos valores serían: \$5.500, \$6.000, \$6.750, \$8.000 y \$50.000

A partir de estas cinco medidas de posición se pueden realizar algunas preguntas más que pongan en juego estos valores, por ejemplo: "¿Cuánto cobra como mínimo un empleado que se encuentra entre el 25% de los empleados que más ganan?"; ¿Cuánto cobra como máximo un empleado que se encuentra entre el 25% de los que menos gana?"; "¿Podemos afirmar que en la empresa más del 50% gana menos de \$8.000?".

Finalmente, el docente puede proponer a los estudiantes retomar las actividades 1 y 2, calcular los cuartiles y, a partir del análisis de los cinco valores de posición, analizar nuevamente los datos.

A MODO DE CIERRE

Las actividades presentadas tienen la intención de ofrecer escenarios donde poder aprovechar los recursos de las tablas bivariadas como una herramienta para abordar la noción de probabilidad condicional. Asimismo, estos problemas con lectura de información han sido un contexto propicio para avanzar en medidas de posición en el ámbito de la estadística que den cuenta de la localización de paquetes de datos. En todo momento se ha privilegiado la producción de los alumnos en contexto como sustento de la presentación y problematización de las nociones matemáticas que permiten su formalización.

Sabemos que esta propuesta de trabajo es demandante en términos del tiempo de clase y del esfuerzo del docente. Tiene momentos donde el conocimiento alcanzado es provisorio y además apuesta a la recuperación de ideas surgidas en otros momentos de la enseñanza que preceden al momento en el que se está sumergido. Sin embargo, estamos plenamente convencidos de la riqueza de este tipo de trabajo en el aula de cara a la producción de ideas y razonamientos matemáticos por parte de los alumnos. Por eso, esperamos que resulte una experiencia generadora de muchos aprendizajes para alumnos y para docentes.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, Carmen; Godino, Juan y Cañizares, María Jesús

1987 *Azar y probabilidad*, en colección *Matemática. Cultura y aprendizaje*, vol. 27, Madrid, Síntesis.

Batanero, Carmen y Serrano, Luis

1995 "La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas", en *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 5: "Probabilidad y Estadística", Barcelona, Grao.

Bressan, Ana y Bressan, Oscar

2008 "Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes. Construyendo paso a paso herramientas y conceptos", Buenos Aires, Novedades Educativas.

Chemello, Graciela; Fernández, Graciela y Gysin, Liliana

2004 "La enseñanza de la probabilidad y la geometría", en *Revista de Educación Matemática*, vol. 19, nº 2, Buenos Aires, Famaf. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/issue/view/992> [consulta: 25 de febrero de 2021]

Foncuberta, Juan

1996 *Probabilidades y estadística*, Buenos Aires, Prociencia-Conicet.

Kelmansky, Diana M.

2009 *Estadística para todos. Estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas*, en colección *Las Ciencias Naturales y la Naturaleza*, Buenos Aires, Ministerio de Educación-Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

Ministerio de Educación (Argentina)

2012 *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de la Formación general. Ciclo Orientado Educación Secundaria*, Buenos Aires, Ministerio de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado?from=150199> [consulta: 24 de noviembre de 2021]

Santaló, Luis A.

1995 "Las probabilidades en la educación secundaria", en García Hoz, Víctor (dir.), *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, en serie *Tratado de Educación Personalizada*, vol. 23, Madrid, Rialp.

Sosa Escudero, Walter

2014 *Qué es (y qué no es) la estadística*, Buenos Aires, Siglo Veintiuno.

Sobre las autoras y los autores

MARINA ANDRÉS es profesora de Matemática recibida en el Instituto de Enseñanza Superior Nº 1, actualmente jubilada. Se desempeñó como profesora de matemática en escuelas secundarias e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Es coautora de documentos y artículos relacionados con la enseñanza de la matemática y de textos escolares.

CAROLINA BENITO es profesora de Matemática e Informática Educativa (Universidad Nacional de Mar del Plata). Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Cuenta con experiencia docente en nivel secundario y superior. Se desempeña como docente en la UNIPE en formación inicial de profesores y en formación docente. Además es docente en la Universidad Nacional Arturo Jauretche (UNAJ) y en la Universidad Nacional de Hurlingham (Unahur). Integra el equipo de matemática de la Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa (Megcba). Actualmente forma parte de un proyecto de investigación en torno a la construcción de teoría en el aula en el campo de los números reales. Es coautora de documentos curriculares y libros de texto.

VALERIA BORSANI es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA). Actualmente coordina el ciclo complementario curricular virtual Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). También se desempeña como profesora de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE) e integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en esa misma universidad. Ha trabajado como formadora de maestres y profesores, y como profesora de matemática en escuelas secundarias y en universidades de la Provincia de Buenos Aires. Es coautora de textos escolares y de diversos documentos y artículos referidos a la enseñanza de la matemática.

MARÍA TERESA CORONEL es profesora de Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente Nº 34 “Profesor Héctor J. Médici”. Enseña en la Escuela de Educación Secundaria Nº 20 “Estados Unidos de América”. Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios.

BETINA DUARTE es licenciada en Matemática (UBA) y doctora en Educación (Universidad de San Andrés). Se desempeña como profesora asociada y directora del departamento de Ciencia y Tecnología de la UNIPE, donde enseña en programas de formación de posgrado para profesores de matemática y en programas de grado dirigido a futuros docentes. Su investigación se centra en la enseñanza de la demostración, la fundamentación y la validación en distintas zonas de la enseñanza de la matemática del nivel secundario, en particular la enseñanza de los números reales.

PATRICIA DUARTE LEZCANO es profesora de Matemática de nivel secundario egresada del Instituto de Formación Docente Nº 41. Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica (UNIPE). Se desempeña como docente en escuelas secundarias del conurbano de Buenos Aires desde el 2010 y en institutos de formación docente desde el 2013. Se especializó específicamente en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Es coautora del libro *Matemática 2/3* (2018). Actualmente cursa la Licenciatura en Ciencias de Datos en la Universidad Guillermo Brown.

CLAUDIA KERLAKIAN es profesora jubilada de Matemática y Cosmografía, licenciada en Educación con orientación en Didáctica de la Matemática y en

Diseño, Coordinación y Evaluación de Proyectos por la Universidad Nacional de Quilmes (UNQ). Se especializó en enseñanza de la matemática para el nivel primario en el Centro de Estudios de Pedagogía Avanzada (CePA) e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Fue docente en el Instituto Etcheverry Boneo, el Instituto Libre de Segunda Enseñanza (ILSE), el Centro Educativo de Nivel Secundario Nº 53, la Escuela de Educación Media DE 10 "Héroes de Malvinas" y en el Profesorado Pedro Poveda, tanto en nivel inicial como en enseñanza primaria. Además, se desempeñó como asesora en el nivel primario en el Colegio Arrayanes.

CECILIA LAMELA es profesora de Educación Media y Superior en Enseñanza de la Matemática (UBA) y magíster en Educación: Pedagogías Críticas y Problemáticas Socioeducativas (UBA). Se desempeña como profesora adjunta en la UNIPE, donde coordina el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Participó en varios proyectos de investigación en enseñanza de la matemática y actualmente forma parte de un proyecto de investigación en torno a la construcción de teoría en el aula en el campo de los números reales. Es coautora de libros de texto y de documentos curriculares.

FEDERICO MACIEJOWSKI es profesor de Educación Superior en Matemática (Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González") y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria por la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Se desempeña como docente en escuelas secundarias de la Provincia de Buenos Aires y en la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Secundaria de la UNIPE.

MARCELA MENICHELLI es profesora en Matemática y Cosmografía y licenciada en Ciencias de la Educación (UNQ). Ha realizado varios trayectos formativos referidos a la enseñanza de la matemática en el nivel secundario y primario en la UNIPE y en la UNLP. Trabajó como profesora de matemática en el nivel secundario y en didáctica de las matemáticas y prácticas de la enseñanza en la formación de maestras/os y profesoras/es. Actualmente se desempeña como docente del Instituto Nacional de Formación Docente (Infod) y como inspectora del nivel superior. Además, trabaja en el equipo de la Subdirección de Formación Docente de la Provincia de Buenos Aires.

CARMEN SESSA se formó inicialmente en Matemática. Desde 1991 se especializó en Didáctica de la Matemática y trabaja en formación e investigación en el área. Es profesora titular en la UNIPE, donde actualmente dirige la carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. También es docente en la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios.

SANDRA TETTAMANTI es profesora de Educación Secundaria en Matemática por la Dirección General de Cultura y Educación (DGCyE) de la Provincia de Buenos Aires (ISFD Nº 17) y bibliotecóloga por la DGCyE (ISFD Nº 8). Cursó la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la UNIPE y ha sido profesora de matemática en escuelas de educación media en el nivel básico y superior, y formadora de maestros en el Profesorado de Educación Primaria. Como bibliotecóloga ha formado colegas dando clases de Tecnología de la Información.

Sobre las compiladoras

MÓNICA AGRASAR es licenciada en Matemática y profesora para la enseñanza primaria. Se ha especializado en enseñanza de la matemática, trabajando como docente formadora de maestros y asesora en currículo, desarrollo curricular y formación docente. Ha dictado numerosos cursos y asesorado a instituciones educativas y organizaciones de distintos países. Participó del desarrollo de programas de alcance nacional referidos a la producción de lineamientos curriculares y procesos de mejora de la enseñanza de la matemática para los diferentes ciclos y niveles de la educación obligatoria. Es autora de publicaciones para alumnos y docentes, así como de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

GRACIELA CHEMELLO es maestra normal nacional, profesora de Matemática, Física y Cosmografía y magíster en Didáctica por la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA. Se ha ocupado de la formación inicial de maestros y profesores en enseñanza de la matemática y ha dictado numerosos cursos y seminarios en instituciones educativas nacionales y de otros países. Integró el equipo de áreas curriculares del Ministerio de Educación la Nación, donde ha participado del desarrollo de programas de alcance nacional referidos a la producción de lineamientos curriculares, documentos de desarrollo curricular y formación de formadores para los diferentes ciclos y niveles de la educación obligatoria. Realizó asesoramiento didáctico a equipos de otros países en la producción de materiales educativos y en formación docente. Es autora de publicaciones para alumnos y docentes, así como de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

unipe editorial universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Entre docentes II. Matemática para el aula de ciclo orientado de secundaria es un trabajo de escritura compartida entre profesores formadores y profesores estudiantes de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE. Este libro recupera el diseño y análisis de propuestas de enseñanza que buscan involucrar a los estudiantes en una actividad de producción y construcción de sentido. Los diferentes capítulos abordan temas de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios: la función cuadrática y la ecuación de segundo grado a través de relaciones entre gráficos y fórmulas; la proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos para explorar relaciones y elaborar conclusiones que se transformarán en teoría; la producción y comparación de fórmulas dando sentido al álgebra como lenguaje de lo general; el estudio de la probabilidad condicional a partir del análisis de tablas de contingencia y la construcción de medidas centrales. Los comentarios didácticos y los registros de lo ocurrido en las aulas abren reflexiones sobre las potencialidades y los límites de algunas decisiones de enseñanza en diálogo con las prácticas cotidianas.

ISBN 978-987-3805-78-3

<<

editorial.unipe.edu.ar