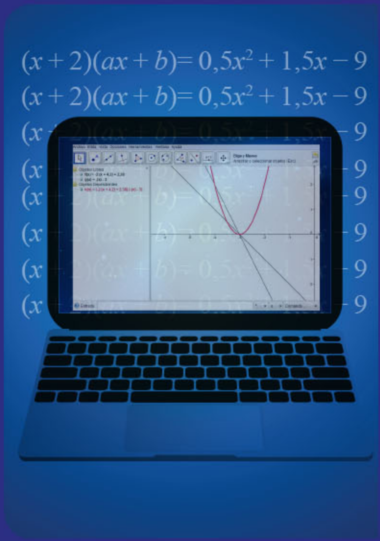


INTRODUCCIÓN AL TRABAJO CON POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINÓMICAS

Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula

unipe: editorial universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas

Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas

Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula

Gema Fioriti y Carmen Sessa
(coords.)

Marina Andrés
Silvia Colacelli
María Teresa Coronel
Enrique Di Rico
Erica Guzmán
Patricia García
Claudia Kerlakian
Cecilia Lamela
Fabiana Marcovich
Rodolfo Murúa
Florencia Ruda Bart
Débora Sanguinetti

unipe: editorial universitaria | HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas: incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula / Carmen Sessa ... [et al.]. 1a ed. . Gonnet : UNIPE:Editorial Universitaria, 2015.
Libro digital, PDF
Archivo Digital: descarga y online

ISBN 9789873805073
1. Formación de Docentes de Secundaria. 2. Matemática. 3. Herramientas Informáticas. I. Sessa, Carmen
CDD 371.1

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
Adrián Cannellotto
Rector

Carlos G. A. Rodríguez
Vicerrector

UNIPE: EDITORIAL UNIVERSITARIA
Directora editorial
María Teresa D'Meza

Equipo editorial
Juan Manuel Bordón, Ángela Gancedo, Diego Herrera, Mariana Liceaga, Julián Mónaco y Diego Rosemberg

Diagramación y diseño de maqueta
Verónica Targize

Camino Centenario nº 2565 - (B1897AVA) Gonnet

Provincia de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Esta edición se publicó en el mes de octubre de 2015.

ISBN: 978-987-3805-07-3

Índice

Nota de los autores

Durante el año 2011, cuando se elaboró la mayor parte de esta propuesta, el Grupo de los lunes lo conformaban Marina Andrés, María Teresa Coronel, Enrique Di Rico, Gema Fioriti, Erica Guzmán, Claudia Kerlakian, Cecilia Lamela, Rodolfo Murúa y Carmen Sessa. Durante el año 2010 también participaron de la elaboración de las primeras actividades Fabiana Marcovich, Patricia García y Silvia Colacelli. Más recientemente, en el año 2012, se incorporaron Débora Sanguinetti y Florencia Ruda Bart, quienes colaboraron en toda la etapa de redacción final.

Agradecemos especialmente a los estudiantes de varias aulas de la Ciudad de Buenos Aires y el conurbano bonaerense que colaboraron en este proyecto.

Introducción

Este material que presentamos es el producto del trabajo conjunto de docentes de escuelas medias y profesores e investigadores de varias universidades:[1] el Grupo de los lunes (el nombre alude al día de reunión) trabaja desde hace varios años pensando la enseñanza de la matemática, diseñando propuestas y analizando su funcionamiento en las propias aulas.[2] En junio de 2010 comenzó a estudiar la problemática de la enseñanza del tema "polinomios". La conformación del grupo fue variando, algunos que estuvieron en los comienzos hoy no participan y se han incorporado nuevos docentes.

A medida que se elaboran las actividades, los docentes del grupo las implementan en sus aulas. La reflexión colectiva en torno a lo sucedido permite ajustar la propuesta inicial. Esas discusiones y conclusiones dieron forma a la propuesta que presentamos en este documento.

Los integrantes del grupo compartimos algunos principios en relación a cómo pensamos el trabajo matemático en el aula. Nuestro propósito es involucrar a los estudiantes de la escuela secundaria en una verdadera actividad de producción de conocimiento. Para ello será necesario proponer problemas desafiantes a los alumnos y crear un ambiente en la clase que los aliente a ensayar, a producir diferentes soluciones y a aportar ideas. Esos ensayos, resoluciones e ideas son la materia prima a partir de la cual el docente organiza las interacciones en la clase: un espacio colectivo de discusión es propicio para estudiar la validez de razonamientos y procedimientos, avanzar en la precisión, plantear nuevos problemas, elaborar y estudiar conjeturas.

LA ENSEÑANZA DE LOS POLINOMIOS

El trabajo en nuestro grupo comenzó con la discusión del tema a enseñar. En general los profesores del grupo estaban muy insatisfechos con la enseñanza que podían organizar en torno a este tema. Nos preguntamos: *¿cuál es el potencial del estudio de esta temática en la escuela, si ponemos en el centro la formación de nuestros estudiantes?* Esta pregunta nos llevó a reflexionar sobre la función de la escuela.

1. Los profesores que participaron trabajan en escuelas públicas o privadas de la Ciudad de Buenos Aires y del Gran Buenos Aires, en la Universidad Pedagógica (UNIPE), la Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM), la Universidad de Buenos Aires (UBA) y la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS).

2. Durante los años 2009 y 2010 el grupo se concentró en el estudio de la enseñanza de la función cuadrática. El resultado de esta tarea se publicó en el siguiente libro: Sessa, Carmen *et al., Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado,* Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2014. Disponible en: <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf> [fecha de consulta: 9 de junio de 2015].

Entonces, aparecieron tensiones entre enseñar "lo que está en el programa" e intentar darle sentido a un trabajo en torno a polinomios en el aula. También nos hicimos otras preguntas que cuestionaban el modo en que suele desplegarse su enseñanza en la escuela: *¿qué diferencia hay entre polinomios y funciones polinómicas? ¿Es posible identificar y diferenciar los objetos "x variable" y "x indeterminada" en la escuela media? ¿Qué se gana y qué se pierde si se prioriza el trabajo con funciones polinómicas? ¿Se podrá abordar el estudio de los polinomios a partir de las fórmulas de estas?*

Las discusiones en torno a estas preguntas –abonadas por lecturas de artículos, documentos y libros de texto– nos hicieron tomar la decisión de estructurar el estudio a partir de las funciones polinómicas. Las fórmulas de estas funciones serían el lugar propicio para trabajar algebraicamente con los polinomios, sin necesidad de definir a estos como objetos formales. Consideramos, por un lado, que esta entrada permitiría encarar con sentido algunas operaciones algebraicas y, por otro, que no explicitar la diferencia entre función polinómica y polinomio no afectaría el trabajo matemático a desarrollar en la escuela media.

A fines de 2009 comenzó en todo el país, y en consonancia con otros países de la región, la distribución de *netbooks* en las escuelas secundarias públicas –una por alumno–, con el objetivo manifiesto de "achicar la brecha tecnológica" entre los distintos sectores de la sociedad. Se enunciaba de manera general que ello iba a contribuir a una mejora de la educación secundaria. Nuestro grupo se vio entonces empujado a pensar en la incorporación de las computadoras al trabajo en el aula y a estudiar en el terreno las innumerables modificaciones que esa incorporación podría producir. En principio esperábamos que los alumnos pudieran acceder a la construcción de relaciones más complejas con el apoyo de la tecnología, pero el grupo encontraba en el recurso más interrogantes que ofertas concretas de mejora en la propuesta didáctica. Las computadoras tenían incorporado el programa GeoGebra y fue esta herramienta la que utilizamos en nuestro diseño.

IDEAS QUE MODELARON NUESTRO DISEÑO

En un artículo de Regine Douady[3] se plantea el estudio de la función que resulta como producto de otras dos, dados estos factores por su gráfico. La tarea estaba pensada para ser resuelta, en un entorno de "lápiz y papel", por alumnos que ya conocían las funciones polinómicas. El objetivo que se perseguía era el estudio del signo de la función producto conociendo el de sus factores. La lectura y discusión de ese artículo en nuestro grupo hizo surgir la idea de "generar" funciones de grado mayor como producto de otras de menor grado y de trabajar fundamentalmente a partir del gráfico de los factores, aprovechando la computadora y el programa GeoGebra para generar los gráficos de las funciones producto.

3. Douady, Regine, "Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)", en Schwank, Inge (ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* vol. 1, Osnabrück, Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, 1999, pp. 113-124.

La idea de trabajar con producto de funciones en la escuela secundaria resultó muy desafiante para los integrantes del Grupo de los lunes y la propuesta que presentamos se aprovecha de ella plenamente. Las posibilidades de manejo de lo gráfico que abrió el uso del programa GeoGebra nos permitió ir diseñando un trayecto de aprendizaje en el cual los estudiantes pudieran apropiarse de las ideas relativas a funciones de mayor grado con un fuerte soporte en sus representaciones gráficas.

Todos los profesores que integran el grupo acordaron con una organización global del recorrido de enseñanza, en el cual los estudiantes aprenderían funciones cuadráticas *después* de funciones lineales y *antes* de abordar el estudio de funciones de grado mayor. Estos acuerdos fueron compartidos plenamente por los colectivos de docentes de las respectivas escuelas en las cuales enseñan los profesores de nuestro grupo. Con esto queremos resaltar que en todos los cursos en los cuales nuestros profesores llevaron adelante la enseñanza del tema "funciones polinómicas", según lo diseñado en esta propuesta, los estudiantes ya habían pasado por el aprendizaje de funciones cuadráticas, parábola y ecuación de segundo grado (quizás con otros profesores que no integraban el grupo).

En la propuesta de enseñanza de funciones cuadráticas que habíamos elaborado anteriormente había una presencia fuerte de lo algebraico (lectura de información de las expresiones y transformación de las expresiones para poder leer) subordinado al estudio de características de las funciones. En esta que presentamos aquí seguimos proponiendo tareas que involucran un trabajo algebraico sobre expresiones polinómicas, a partir de un problema que se plantea para las funciones polinómicas en juego. En particular, después de otras actividades, en nuestro diseño aparece la tarea de hallar una función "factor", conociendo la función que se obtiene como producto y otra función "factor". A veces ambos datos vienen dados en un soporte gráfico. La operación de dividir polinomios surge entonces como respuesta a una necesidad que plantea un problema.

Por último, queremos señalar que esta propuesta que presentamos no pretende ser exhaustiva en relación con toda la enseñanza del tema, sino un recorte que abre la posibilidad de nuevas tareas matemáticas para el aula; muchas de ellas posibles gracias a la presencia de las computadoras.

ACERCA DEL DISEÑO DE LA SECUENCIA

Como ya señalamos, en esta secuencia las funciones polinómicas de un cierto grado se presentarán como producto de otras funciones de grado menor y la representación de estas funciones en el registro de gráficos cartesianos tendrá un papel importante. Estos gráficos cartesianos de las funciones serán, en gran medida, accesibles a los alumnos en la pantalla de la computadora, tanto para producirlos como para modificarlos o *leer* información.

Para todos los problemas que presentamos, la computadora puede ser una herramienta para explorar y validar soluciones, pero algunos de ellos fueron diseñados para ser resueltos necesariamente con el *software* GeoGebra u otro equivalente. Es decir, hay tareas que son propias de los recursos que habilita el programa y no pueden resolverse en un entorno de lápiz y papel.

Nos interesa destacar que para poder llevar adelante esta secuencia en un aula no se necesita mucha experiencia previa de los docentes –ni de los alumnos– con el programa.

En este documento iremos presentando las actividades junto con un análisis de estas. El Grupo de los lunes analiza las distintas actividades a medida que las diseña y muchas veces quedan interrogantes importantes acerca de cómo las resolverán los estudiantes y cuán fértiles podrán ser estas. La puesta en aula de la secuencia por parte de algunos de los profesores y profesoras del grupo retroalimenta la instancia inicial de diseño, dado que los hechos de las clases se vuelven accesibles y es posible estudiarlos teniendo como marco el análisis previo. Incorporamos aquí parte de ese estudio posterior en torno a lo trabajado por los alumnos en los cursos donde enseñan los profesores del grupo.

Nuestra manera de pensar la producción de conocimiento en clase nos lleva a diseñar una secuencia de problemas, de manera que lo trabajado con las actividades anteriores aporte elementos para enfrentar una nueva tarea. Del mismo modo ocurre con los distintos ítems dentro de cada actividad.

Por otro lado, no todo lo que se pretende trabajar con un problema queda atrapado en el enunciado inicial que les damos a los alumnos. Muchas veces nos reservamos preguntas importantes que formulamos a la clase luego de una discusión colectiva sobre uno o varios ítems de cada problema. En este documento intercalamos esas preguntas dentro del análisis.

El esquema general de la propuesta es el siguiente:

- En una primera parte, se trabaja con dos funciones lineales y la función cuadrática que se obtiene como producto de ellas. Los estudiantes ya han estudiado parábola y funciones de segundo grado. La novedad está en presentarla como producto de funciones lineales y también en el hecho de que las funciones factores se presentan frecuentemente en el registro de gráficos cartesianos.
- En una segunda parte, los alumnos “se encuentran” con funciones de grado mayor que 2, a partir del producto de dos funciones de grado menor. Se realiza un estudio sistemático de las funciones cúbicas y otro más general de las funciones de mayor grado.

La secuencia: primera parte

En la primera parte de la secuencia se trata esencialmente de estudiar la función que resulta del producto de dos funciones lineales.

Para los primeros problemas, las funciones lineales están definidas por sus gráficos. En el 1, 2, y 3, el soporte es lápiz y papel. En cambio, la actividad 4 está pensada para trabajar con el *software* dinámico GeoGebra.

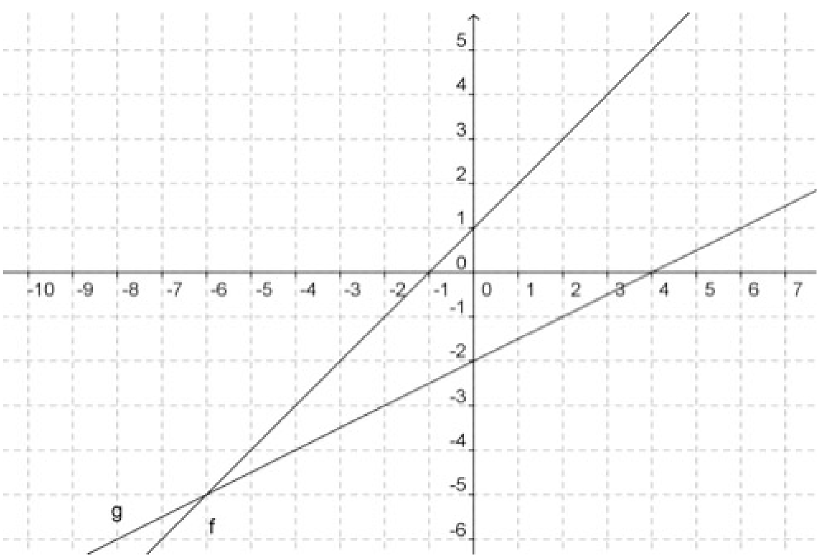
En los siguientes problemas –4 a 6– se pretende explorar y/o anticipar las características que deben poseer las funciones lineales para que su producto cumpla con determinados requisitos: existencia y ubicación de máximo o mínimo, cantidad y tipo de raíces.

El último problema de esta primera parte propone recorrer el camino inverso: se buscan una o dos funciones lineales partiendo de la función cuadrática producto.

PROBLEMA 1

Sean f y g dos funciones lineales, definimos la función h(x) de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A partir de los gráficos de f(x) y de g(x) que se dan a continuación:



a) Calculen el valor de h(x) en cada caso:

i) $h(0)$ =
ii) $h(2)$ =
iii) $h(6)$=
iv) $h(3)$=
v) $h(-2)$=
vi) $h(4)$=
vii) $h(-8)$=
viii) $h(4,5)$=

b) Decidan si $h(x)$ es negativa, positiva o cero:

i) $h(-10)$
ii) $h(-20)$
iii) $h(-1)$
iv) $h(5)$
v) $h(-2,5)$

c) Propongan un gráfico aproximado de $h(x)$.

Comentarios

Suponemos que los estudiantes se enfrentarán por primera vez con una función definida como el producto de otras dos, en ese sentido para ellos puede resultar oscura la definición que se da de $h(x)$. De hecho, en nuestras experiencias algunos estudiantes preguntaron "¿dónde está h?" y buscaban un gráfico, fórmula o tabla que la defina. En el aula explicamos que con la notación "$h(x) = f(x)\cdot g(x)$" queremos decir que "para cada x, $h(x)$ se obtiene multiplicando la imagen de x a través de f por la correspondiente imagen a través de g" y calculamos con los alumnos algunos valores de h.

Los estudiantes seguramente tienen conocimientos relativos a función lineal y puede ser que conozcan la forma factorizada de la función cuadrática; sin embargo, no creemos que identifiquen rápidamente que la función h es cuadrática, al ser producto de dos lineales.

Posibles resoluciones y comentarios sobre experiencias en nuestras aulas

En el caso del ítem a), leyendo valores para f y g del gráfico se pueden calcular fácilmente algunos valores de h. Para otros valores la lectura no es tan inmediata. Por ejemplo: como $f(6)$ no se encuentra en el gráfico dado, los estudiantes tendrían que usar propiedades de la función lineal para calcular ese valor. También podría ser que obtengan la fórmula de la función f para evaluar en 6. De hecho, en nuestras experiencias muchos estudiantes lo hicieron.

Tampoco la lectura tiene tanta precisión si se quiere calcular $h(4,5)$ o $h(3)$.

Otra manera de resolver este ítem podría consistir en hallar la fórmula de h multiplicando las expresiones algebraicas de las dos funciones lineales, es decir, obtener

$$h(x) = (x+1)\cdot\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$$

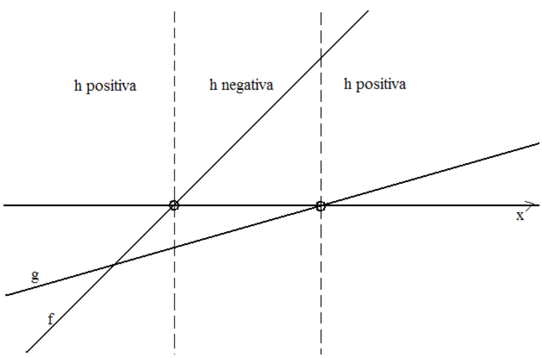
y luego evaluar en cada valor de x sin necesidad de volver a recurrir a los gráficos.

En nuestras experiencias, muchos estudiantes hallaron las fórmulas de f y g, las utilizaron para evaluar ambas funciones en los puntos pedidos y luego efectuaron el producto de los valores de ambas funciones en cada punto para hallar el valor de h. Pero en ningún caso escribieron el producto de las fórmulas como la fórmula de h. Posiblemente porque se restringieron a la explicación dada sobre qué significaba el producto de funciones y la consideraron como el procedimiento para hallar el valor de h.

El objetivo del ítem b) es que los alumnos puedan decidir el signo de $h(x)$ para un x determinado sin calcular su imagen: los signos de f y g pueden saberse mirando el gráfico y de allí deducir el signo de h.

Luego de poner en común las respuestas al ítem b), preguntamos por todos los x para los cuales h es positiva, negativa o cero. Del trabajo con este ítem se espera que los estudiantes también puedan identificar que el cero de f y el cero de g son los ceros de h.

Una posibilidad es organizar la respuesta sobre la representación gráfica:

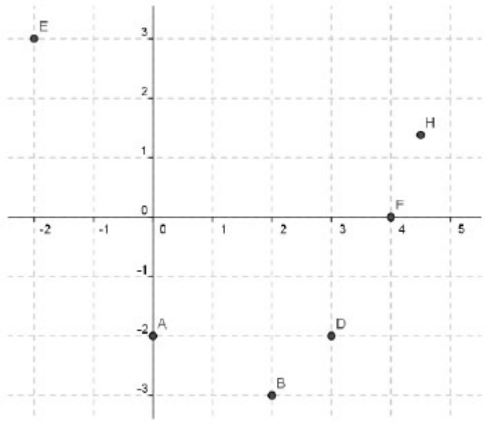


El gráfico de h corta al eje x en los mismos puntos que las rectas; h estará por encima del eje x para los valores de x en los que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo signo, y por debajo del eje x para los valores de x en los que $f(x)$ y $g(x)$ tienen distinto signo.

Describir estos conjuntos comporta una cierta complejidad en la notación, ya que se trata de conjuntos infinitos. Podría ser un momento para introducir alguna notación específica, por ejemplo, la notación de intervalos.◢

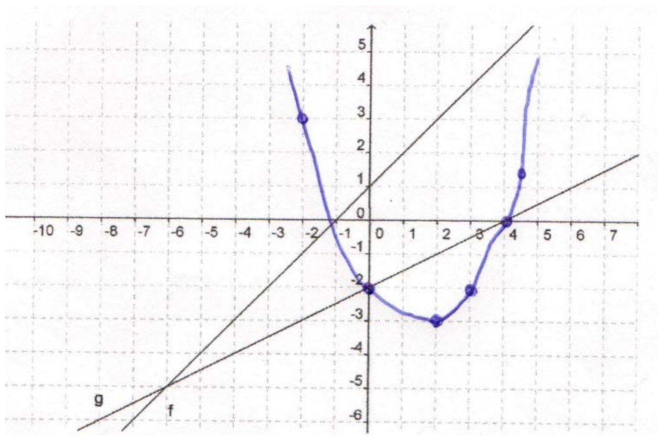
En uno de los cursos donde realizamos la experiencia, algunos estudiantes pensaron, con mayor o menor grado de convencimiento, que el gráfico de h era una parábola. En nuestras discusiones previas habíamos decidido que en este caso íbamos a permanecer "neutrales" y pedir una justificación. Estos estudiantes no pudieron argumentarlo y, por eso, no fue tenido en cuenta "oficialmente". Por otro lado, en ningún curso dudaron de que los ceros de h son los mismos ceros que los de f y g.

Para el ítem c), los estudiantes que no hayan obtenido ninguna fórmula quizás comiencen marcando los puntos obtenidos en el ítem a).



Si algún estudiante quiere marcar la imagen del 6 o del −8 tendrá complicaciones porque son números muy grandes.

En una de nuestras aulas, algunos chicos unieron estos puntos y obtuvieron el siguiente gráfico, considerando como punto mínimo de la curva el menor valor de los valores hallados en el ítem a).

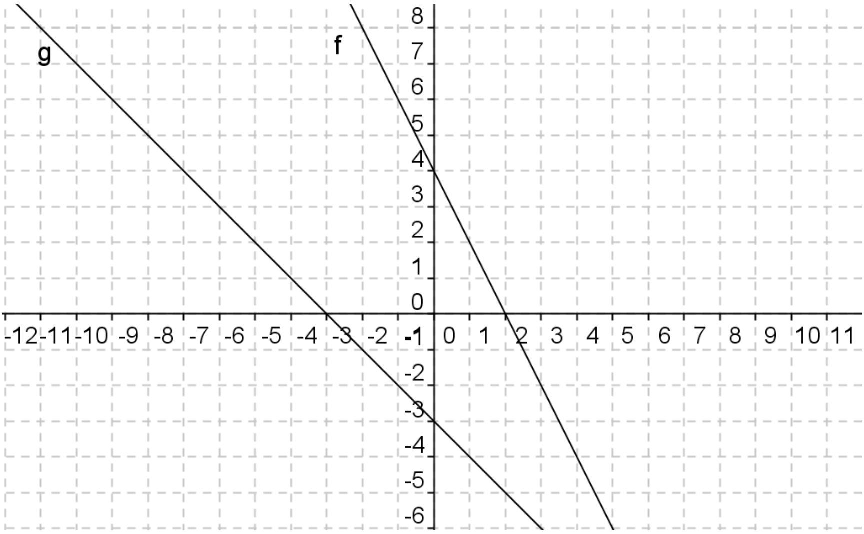


En la puesta en común, los chicos que habían hecho ese gráfico afirmaron que no era una parábola porque no era simétrico. Otro grupo argumentó que como había valores de x que tenían la misma imagen, entonces el gráfico era una parábola; que el punto que los demás habían tomado como vértice no era tal, porque ellos habían calculado la mitad entre los dos ceros ($x = 1{,}5$) y al calcular su imagen les había dado menor que −3. Y que entonces ese punto era el vértice.

La profesora preguntó si siempre que hubiera dos elementos del dominio que tuvieran la misma imagen el gráfico iba a ser una parábola y pidió otro modo de justificar la forma del gráfico. Entre todos se pudo concluir que analizando la fórmula se puede justificar que la función es cuadrática y su gráfico una parábola.

PROBLEMA 2

En el siguiente sistema de coordenadas se dan las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, ambas funciones lineales.



Definimos: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

a) Encuentren por lo menos 3 puntos que pertenezcan al gráfico de h(x). Propongan argumentos para fundamentar la respuesta.
b) Establezcan el conjunto de valores de x para los cuales la función h(x) es positiva, negativa o cero.
c) Tracen un gráfico aproximado de h(x).

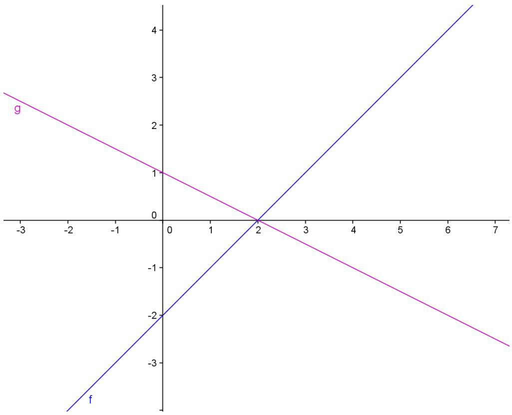
Comentarios

Es un problema para que los estudiantes reinviertan los conocimientos que pusieron en juego en el problema anterior.

En este caso ambas rectas son decrecientes. Se podría preguntar, entonces, si creen que esta diferencia con respecto al problema anterior producirá algún cambio en la parábola y por qué. Esto dará lugar a distintas argumentaciones (desde lo gráfico, lo numérico y lo algebraico).

PROBLEMA 3

En el siguiente sistema de coordenadas se da la representación gráfica de f(x) y de g(x), ambas funciones lineales. Definimos $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.



a) Establezcan el conjunto de valores de x para los cuales la función h(x)es positiva, negativa o cero.
b) Propongan un gráfico aproximado de h(x).

Comentarios

La idea es seguir afianzando lo trabajado en las dos actividades anteriores. Además, analizar qué tipo de parábola se obtiene cuando las dos funciones lineales tienen el mismo cero.◢

Los tres problemas anteriores son introductorios y tienen el objetivo de familiarizar a los estudiantes con un tipo de problemática: *estudiar la función que se obtiene como producto de dos funciones lineales dadas por sus gráficos*. A continuación se presentan dos problemas para trabajar con GeoGebra (cuyos archivos tienen extensión .ggb) y luego se plantea una generalización de la situación estudiada.

PROBLEMA 4

Para trabajar con Geogebra:
Escriban las fórmulas que correspondan a las funciones $f(x)$ y g(x) del problema 2. Usen el software para graficarlas. Introduzcan la función producto h(x) como objeto dependiente. Para ello escriban en "Entrada":

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

a) Hallar, si es posible, una recta paralela al gráfico de f, de manera tal que al "multiplicarla" por g, la parábola "producto" no atraviese al eje de las x. Expliquen sus respuestas.
b) Hallar, si es posible, una recta paralela al gráfico de f, de manera tal que la parábola que se obtiene "multiplicándola" por g no toque ni atraviese el eje de las x. Expliquen sus respuestas.

Comentarios

Dependiendo del trabajo realizado en el problema 2, antes del ítem a) podría confrontarse la gráfica de $h(x)$ producida mediante el *software* con la que produjeron con lápiz y papel. El gráfico realizado por el programa permitiría confirmar o ajustar lo anticipado.

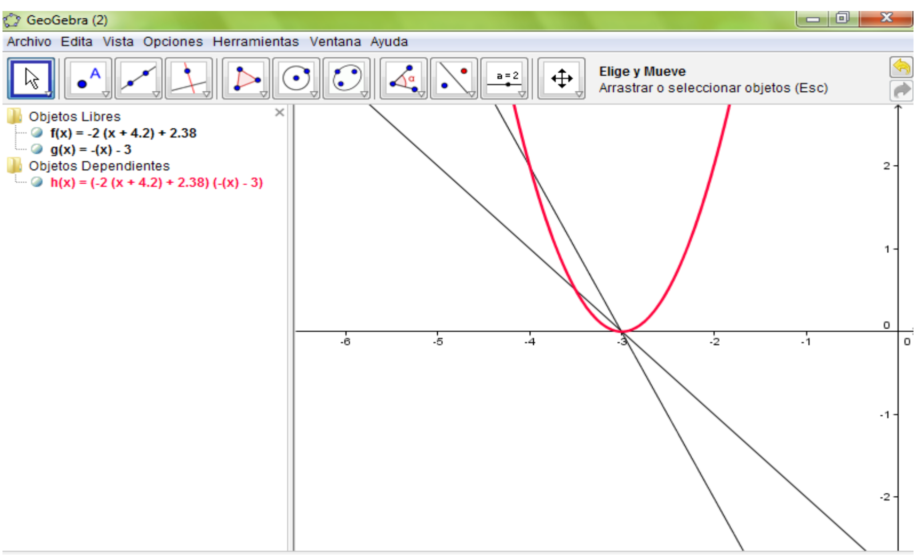
Una vez ingresados los datos y obtenidos los gráficos de f, g y h, el docente propone que muevan las rectas con el puntero. Entre todos se explicita que de este modo se logran siempre rectas paralelas y que la parábola resultante se va modificando de acuerdo a este movimiento de las rectas. Explorado esto, el docente solicita volver a los gráficos y fórmulas originales de f y g y anuncia que para resolver los ítems siguientes hay que dejar fijo el gráfico de g (para "dejar fija la recta" hay que apoyarse en ella y, con el botón derecho, ir a "Propiedades", "Básico", "Objeto fijo"). Recién ahora se trabaja con las consignas.

Estas consignas, como siempre, pueden requerir un trabajo específico con los estudiantes para acordar su significado: por ejemplo, estamos hablando de "multiplicar" rectas cuando en realidad se trata de multiplicar las funciones lineales cuyos gráficos son las rectas; también hay que aclarar qué significan las expresiones "no atraviese" y "no toque ni atraviese al eje de las x".

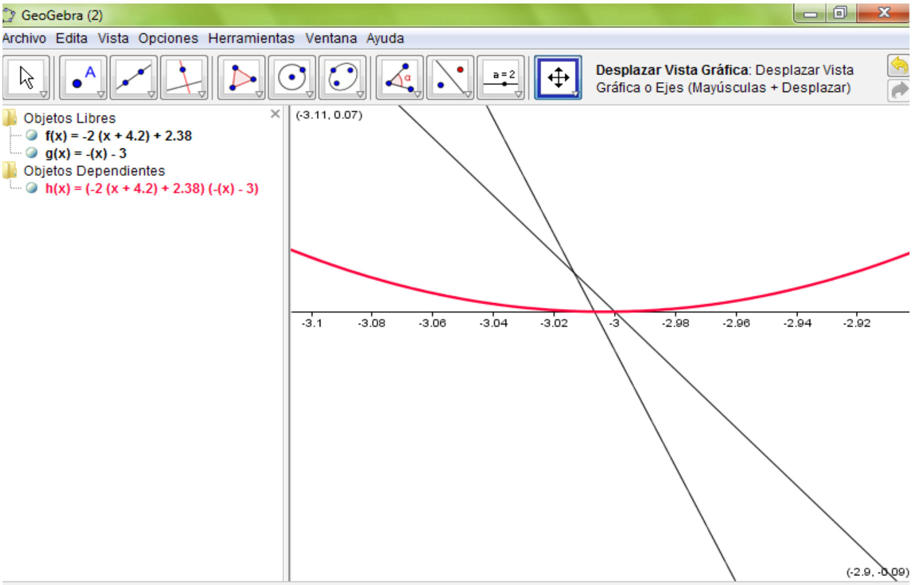
Posibles resoluciones y comentarios sobre experiencias en nuestras aulas

Algunas estrategias que los estudiantes pueden desplegar para resolver el ítem a):

- Podrían "arrastrar" una de las rectas hasta que "se vea" que la parábola no atraviesa el eje x. Por ejemplo, los estudiantes podrían dar como respuesta el gráfico de f de la siguiente pantalla:



Sin embargo, si “nos acercamos” con la herramienta “Zoom de acercamiento” se ve que la respuesta no es satisfactoria:



El *zoom* es una herramienta potente del programa cuyo uso permitiría construir una posición de cautela con respecto a lo que los dibujos en la pantalla muestran. Los alumnos tienen que aprender a aprovecharla para controlar su trabajo. Como toda herramienta del programa, quizás el docente deba presentarla y proponer su uso. La herramienta sirve para invalidar una respuesta pero no para darla por correcta, ya que un nuevo *zoom* podría mostrar otra situación.

Retomando el análisis del ítem a), es necesario que los estudiantes expliciten qué es lo que están buscando: que las dos rectas tengan el mismo cero. Esto no podrá controlarse visualmente en la ventana gráfica debido a lo comentado antes sobre el *zoom*. Sería necesario apelar a otros registros de representación como, por ejemplo, considerar las expresiones algebraicas de los objetos involucrados que va produciendo el programa a medida que movemos la recta.

En la pantalla mostrada más arriba, la fórmula correspondiente a la función a la cual arribaron los chicos por arrastre es

$$f(x) = -2(x+4.2)+2.38,$$

una función que no se anula en $x = -3$, y entonces no cumple con lo requerido en el ítem a).

Un grupo de alumnos de un curso donde se trabajó la secuencia, contestando el ítem a), escribió la siguiente conclusión:

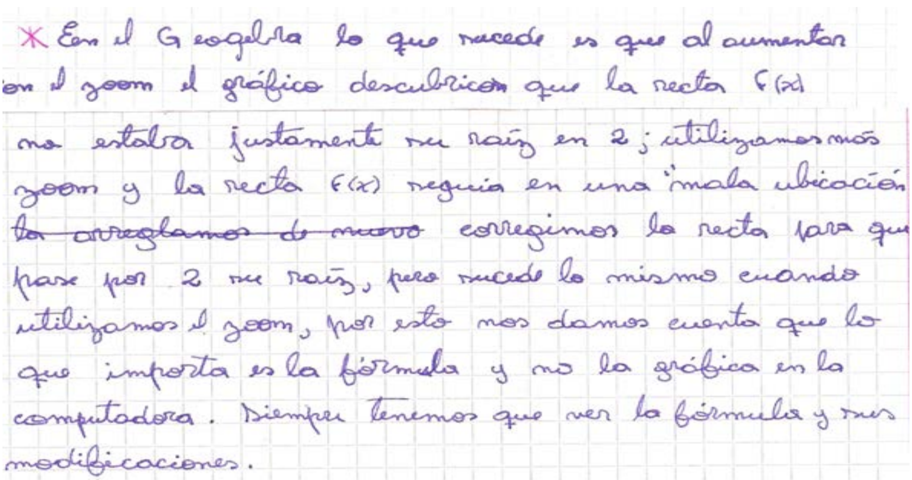
> Después de ingresar ambas rectas y formar la parábola, tuvimos que mover la recta $f(x)$ para ver si era posible que el gráfico $h(x)$ no atravesara el eje x. La única manera de que la parábola no atraviese el eje x es que ambas rectas tengan la misma raíz. Pero cuando movimos la recta $f(x)$ nos dimos cuenta de que el resultado de la fórmu-

la no daba cero, entonces tuvimos que acercar la imagen con el *zoom* para ajustarla. Calculamos $g(-3)$ y vimos que no era cero, entonces con el *zoom* volvimos a ajustar la recta hasta que $g(-3)$ nos diera cero.

Estos alumnos hicieron un uso muy pertinente del *zoom* que provee el programa y de las fórmulas de la ventana algebraica para validar su respuesta.

- Podrían operar sobre la ventana algebraica directamente para garantizar que f se anule en $x=-3$, es decir, ingresar allí una fórmula de una función lineal que se anule en $x=-3$ y que tenga pendiente -2.

En nuestras experiencias los estudiantes comenzaron siempre arrastrando las rectas y, en algunos casos, optaron luego por operar en la ventana algebraica. Mostramos a continuación la explicación que da un grupo.

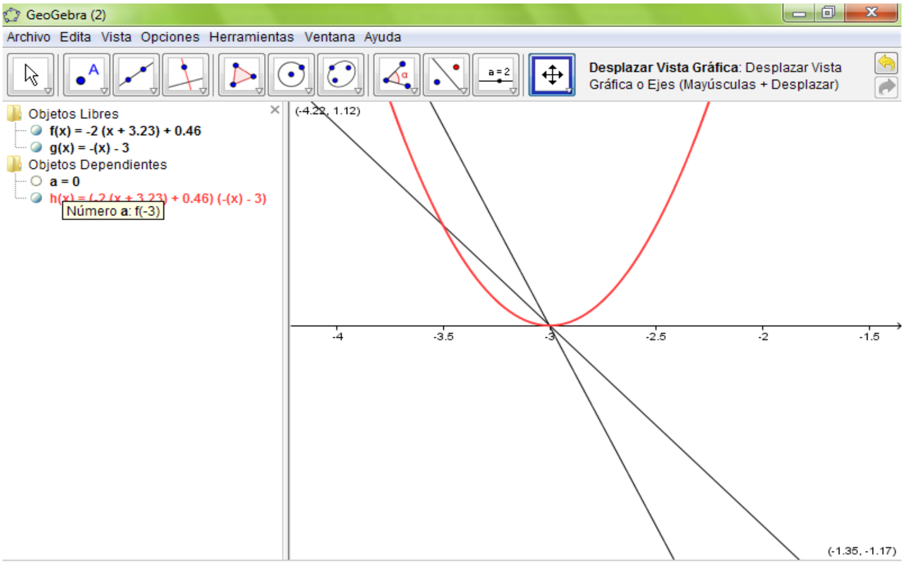

* En el Geogebra lo que sucede es que al aumentar en el zoom el gráfico descubrimos que la recta f(x) no estaba justamente su raíz en 2; utilizamos más zoom y la recta f(x) seguía en una mala ubicación ~~la arreglamos de nuevo~~ corregimos la recta para que pase por 2 su raíz, pero sucede lo mismo cuando utilizamos el zoom, por esto nos damos cuenta que lo que importa es la fórmula y no la gráfica en la computadora. Siempre tenemos que ver la fórmula y sus modificaciones.

Algunas cuestiones relacionadas con el programa que surgieron al trabajar con el problema 4

Al mover la recta “gráfico de f”, la pantalla va mostrando, en la ventana algebraica, fórmulas para f con coeficientes con dos cifras decimales por defecto, aunque el programa internamente trabaja con muchas más. Nosotros podemos pedirle que muestre hasta quince cifras (utilizando los comandos “Opciones”, “Redondeo”, “Cantidad de decimales”). De este modo, cambiando la cantidad de cifras decimales, la pantalla algebraica muestra fórmulas diferentes, y no equivalentes, asociadas al mismo gráfico. La fórmula que aparecía al trabajar con menos decimales visibles se obtiene redondeando los coeficientes de la fórmula que aparece al pedir que muestre más decimales. Representan funciones “cercanas”, pero no son la misma función.

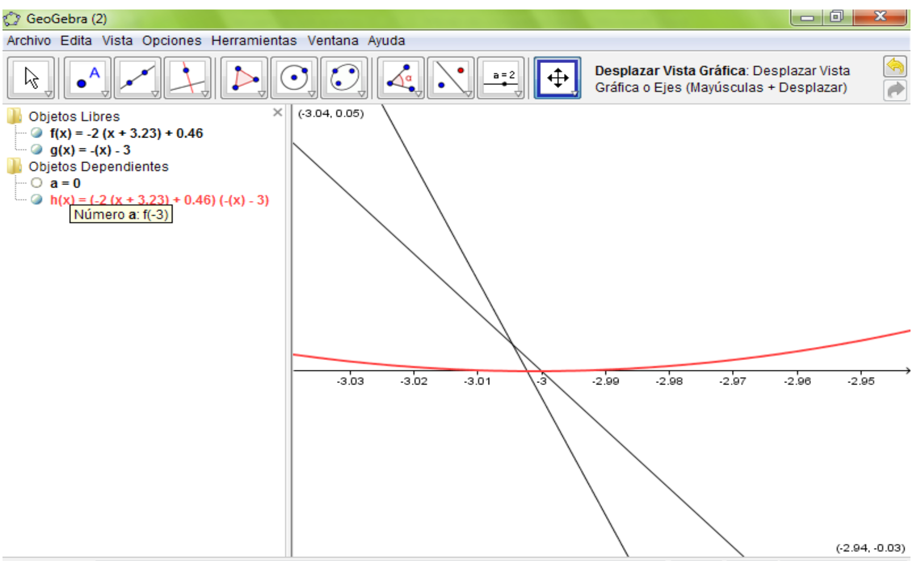
Esta particularidad del programa de trabajar por redondeo en la ventana algebraica dio lugar a ciertos hechos –nuevos para todos– que ocurrieron en el aula.

Por ejemplo, en un curso, al arrastrar la recta del gráfico de f, se llegó a la pantalla siguiente:



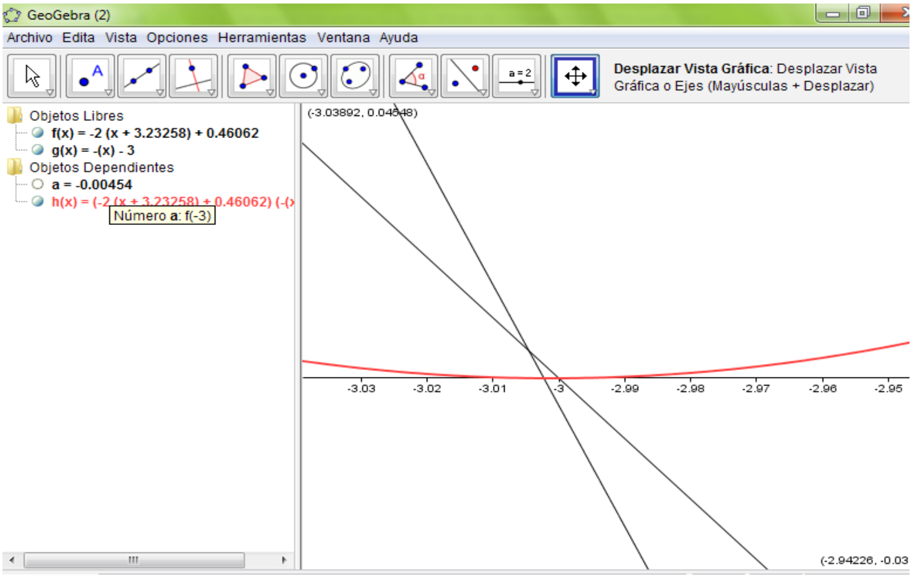
En la ventana algebraica aparece una fórmula para f que se anula si se evalúa en $x = -3$. El estudiante, para cerciorase de esto, pidió al programa la evaluación $f(-3)$ y obtuvo el valor cero.

Efectivamente, la fórmula de f que el programa muestra en la pantalla algebraica corresponde a una recta que es una respuesta al problema. Sin embargo, el estudiante hizo *zoom* sobre el gráfico, para asegurarse de que pasaba por el punto requerido, y obtuvo lo siguiente:



Esta nueva ventana gráfica revela que la recta "gráfico de f" no pasa por $(-3; 0)$, a pesar de que la ventana algebraica, que no se ha modificado por la acción del *zoom*, informa que $f(-3)$ es cero. ¿Qué está pasando?

La clave está en modificar la cantidad de cifras decimales que muestra el GeoGebra; por ejemplo, trabajando con cinco cifras, la pantalla revela otra fórmula para f y en la evaluación en $x = -3$, un número no nulo pero con sus dos primeras cifras nulas (y la tercera menor que 5):



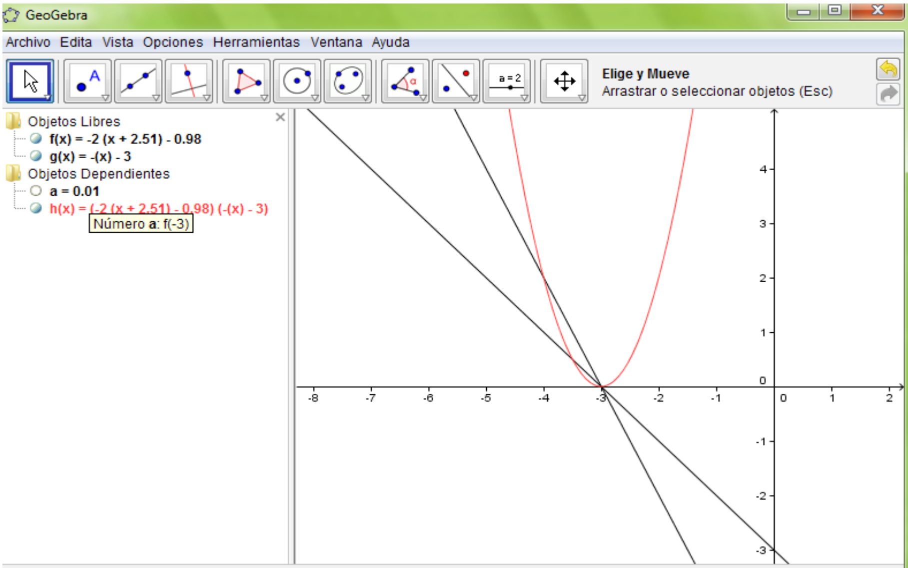
Esto nos lleva a interpretar que la fórmula $-2(x + 3.23) + 0.46$ que mostraba antes el programa no era más que una aproximación de aquella que le asignaba al gráfico, limitada por la cantidad de cifras con la que se estaba trabajando. La nueva fórmula $-2(x + 3.23258) + 0.46062$ es una aproximación más ajustada al gráfico que se muestra después de usar el *zoom*. Esto da una explicación a la incompatibilidad que puede ocurrir entre la información de la ventana algebraica y la gráfica.

Retomando lo ocurrido en el aula, se concluyó que la función

$$f(x) = -2(x + 3.23) + 0.46 = -2x - 6$$

efectivamente se anula en -3 y, por lo tanto, su gráfico responde a lo buscado. Para lograr ese gráfico en la pantalla, hay que ingresar directamente esta fórmula en "Entrada".

Otro fenómeno similar aparece en la pantalla siguiente:



La fórmula que aparece en la ventana algebraica, $f(x) = -2(x + 2.51) - 0.98$, corresponde a una función que verifica $f(-3) = 0$. Sin embargo, al evaluar utilizando el programa, se obtiene $f(-3) = 0.01$. A diferencia del ejemplo anterior, en el cual había una falta de coherencia entre lo que informaban las ventanas, en este caso aparece una incoherencia en la misma ventana algebraica. La explicación nuevamente se encuentra en el hecho de que el programa está mostrando un redondeo a dos decimales de otra fórmula, que es la que utilizó para la evaluación.

Analizando los dos fenómenos anteriores, en nuestro grupo llegamos a la siguiente conclusión: una escritura algebraica producida por el programa, por ejemplo la que se obtiene al mover una recta, y la misma escritura introducida en “Entrada”, podrían ser objetos diferentes. La acción “pedir más cifras decimales al programa” produce efectos diferentes: una escritura se modifica y la otra no.

Retomando el análisis del problema 4

Más allá de las estrategias utilizadas por los estudiantes, la recta buscada es única pero puede presentarse con fórmulas muy diferentes producidas por los chicos o por el programa: un trabajo algebraico al alcance de la clase permitiría arribar a que todas esas fórmulas son equivalentes a $f(x) = -2(x + 3)$. Es una forma de escritura que quizás no resulte familiar a los estudiantes y que prioriza como dato el cero de la función y su pendiente (en vez de la pendiente y la ordenada al origen, como suele hacerse cuando se estudia función lineal).

Con esta escritura para f, la función producto podría expresarse como:

$$h(x) = 2(x + 3)^2.$$

Es una escritura que los estudiantes pueden reconocer como correspondiente a una parábola que se “apoya” en el eje de las x.

Con respecto al ítem b) nos interesa destacar qué aporta de nuevo con respecto al anterior y en qué favorece el uso del *software*. El programa permite visualizar que, al mover una de las rectas, las parábolas no se "despegan" nunca del eje x: todas pasan por el cero de la recta que no se movió. Sería interesante que el docente pregunte por qué ocurre esto. Se trata de instalar en la clase la necesidad de encontrar razones matemáticas para justificar lo que se está viendo en la pantalla.

Se sabe por los problemas anteriores que los ceros de las funciones lineales serán siempre ceros de la función cuadrática producto. Esto permitirá explicar que toda parábola que se construya como producto de rectas, necesariamente, tendrá algún cero.◢

El tipo de trabajo que realizaron los alumnos en la actividad 4 –"arrastrar" una recta y ver dinámicamente los efectos en la parábola producto– no tiene un análogo en el trabajo que realizaban con lápiz y papel. La potencia de la herramienta informática para explorar dinámicamente familias de funciones y gráficos se verá incrementada en el trabajo con polinomios de mayor grado en la segunda parte de la secuencia. Nos interesa, sin embargo, destacar en esta instancia algunos aspectos del trabajo con GeoGebra que habrá que ir contorneando con los alumnos a medida que se incorpore el programa como una herramienta plena para la producción matemática en el aula:

- las limitaciones de la visualización para afirmar que un gráfico cumple con una propiedad (por ejemplo, que pasa por cierto punto): el *zoom* es una opción del trabajo con el programa que puede utilizarse como herramienta de control, pero no sirve para validar que lo construido esté bien hecho, ya que se puede hacer *zoom* "infinitamente". En cambio, sí sirve para invalidar una conjetura.
- los límites de la información algebraica que provee el programa como producto de una acción sobre los gráficos: las fórmulas que muestra pueden modificarse al hacer la opción de trabajar con más cifras decimales.
- los límites de la información numérica, ya que el número que muestra como resultado de cierta acción depende de la cantidad de cifras decimales con las que se esté trabajando. En particular, un resultado "cero" puede revelarse como no nulo al ampliar la cantidad de cifras de trabajo.

Se propone a continuación un problema más abierto para que los alumnos "inventen" funciones invirtiendo las ideas en juego en los cuatro problemas anteriores y teniendo en cuenta condiciones que se dan sobre el punto extremo de la parábola.

PROBLEMA 5

a) Propongan, si es posible, dos funciones lineales cuyo producto sea una función cuadrática que tenga mínimo y otras dos para que la función cuadrática tenga máximo. Si no hay, justifiquen la respuesta.
b) Busquen pares de rectas para que el mínimo de la parábola "producto" esté en el primero, en el segundo, en el tercero y en el cuarto cuadrante. Si no hay, justifiquen la respuesta.
c) Hagan lo mismo con el máximo.

Comentarios

Para el ítem a), los estudiantes podrán explorar con GeoGebra, o considerar las funciones de los problemas anteriores y encontrar dos pares de rectas que cumplan con las condiciones solicitadas.

A continuación pedimos una generalización de lo que buscaron: *¿qué condiciones tienen que cumplir las dos rectas para que la parábola tenga mínimo o máximo? Justifiquen la respuesta.* Si los estudiantes ya han trabajado con el coeficiente principal de la parábola y pueden relacionar su signo con su concavidad, probablemente puedan anticipar cómo tienen que ser las rectas: si las dos pendientes tienen el mismo signo, el producto tiene mínimo; si las pendientes tienen diferentes signos, el producto tiene máximo.

El trabajo en el ítem b) dependerá de hasta dónde se haya llegado en la puesta en común del ítem b) del problema 4. Puede ser que ya se haya discutido que no existe un par de rectas cuyo producto sea una parábola que no corte ni toque al eje x. La tarea de buscar pares de rectas para que el mínimo esté en el primero y en el segundo cuadrante no debería, entonces, presentar mayor dificultad: no se puede, porque en estos casos la parábola no corta al eje x y, por lo tanto, no puede ser expresada como producto de dos rectas. Puede suceder que lo que se discutió en el problema 4 haya quedado asociado únicamente a los datos particulares de *ese* problema. Es momento entonces de concluir ahora que *nunca* se podrán encontrar dos funciones lineales cuyo producto dé una función cuadrática sin ceros, porque esta última "hereda" los ceros de los factores.

En los cursos donde se trabajó la secuencia, algún grupo, en su intento de buscar pares de rectas cuyo producto fuese una parábola que no cortara al eje x, propuso rectas del tipo $y = b$. Se discutió entonces que si una de las rectas, o las dos, es paralela al eje x, su producto no tiene como gráfico una parábola.

En relación con la búsqueda de un mínimo en el tercer o cuarto cuadrante, lo más probable es que los chicos combinen anticipación con ensayo y error, hasta darse cuenta de que si las dos raíces son negativas, el mínimo estará en el tercer cuadrante y, si ambas son positivas, el mínimo estará en el cuarto. Si las raíces tienen distintos signos, la ubicación del vértice dependerá de los valores absolutos de ambas raíces. También habría que considerar qué sucede si una de las raíces es cero. En uno de los cursos, la docente agregó: "¿Cómo deben ser las rectas para que el mínimo esté *sobre* el eje y?".

Las mismas consideraciones valen para el ítem c).◢

El siguiente problema está pensado para discutir colectivamente, a modo de síntesis de lo trabajado hasta el momento.

PROBLEMA 6

a) ¿Es cierto que siempre que "multiplicamos" dos rectas obtenemos una parábola?
b) ¿Cómo obtenemos los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la parábola a partir de los gráficos de las rectas?
c) ¿Es cierto que toda parábola puede ser escrita como el "producto" de dos rectas?

d) ¿Cómo deben ser las rectas para que su "producto" sea una parábola que tenga máximo? ¿Y mínimo?
e) ¿Cómo deben ser las rectas para que su "producto" sea una parábola con un cero doble? ¿Y con dos ceros simples?

Comentarios

Como se dijo anteriormente, estas preguntas sirven como guía para realizar con los estudiantes una síntesis de todo lo trabajado hasta el momento. Creemos necesario, en este punto de la secuencia, poder contar con momentos de anclaje para el trabajo realizado.

Posibles conclusiones

- El "producto" de dos rectas (no horizontales ni verticales)[4] siempre es una parábola. O bien el producto de dos funciones lineales (no constantes) es una función cuadrática.
- No todas las parábolas pueden obtenerse como producto de dos rectas. Las que sí pueden obtenerse son aquellas que atraviesan el eje x o lo tocan.
- La parábola hereda los ceros de las dos rectas factores.
- Si las pendientes de las rectas son del mismo signo, la parábola tiene mínimo, y si tienen diferente signo, tiene máximo.

En la discusión colectiva incluimos nuevas preguntas acerca de los ceros de las parábolas, dando lugar a la siguiente síntesis:

Pueden tener cero, uno o dos ceros.

1. Parábola con dos ceros distintos

Corresponde al producto de dos factores lineales con diferentes ceros.

–En el registro algebraico: mirando la fórmula, la función cuadrática resultante puede escribirse como $h(x) = a\,(x - m) \cdot (x - n)$ con $m \neq n$, donde a resulta de multiplicar las pendientes de las dos rectas.

–En el registro numérico: si le damos valores a x, a un lado y al otro, cerquita de cada cero de la función h, la cuenta nos va a dar con diferentes signos. Una de las rectas cambia de signo y la otra no.

–En el registro gráfico: la parábola atraviesa al eje x en dos lugares; las rectas cortan al eje x en puntos diferentes.

2. Parábola con un cero (raíz doble)

Corresponde al producto de dos factores lineales con el mismo cero.

4. Como las rectas verticales no son gráficos de funciones, no podríamos considerarlas como factor para definir el producto.

–La fórmula puede escribirse como $h(x) = a.(x - m)^2$

–Si le damos valores a x, a un lado y al otro, cerquita del cero de la función, la cuenta nos va a dar con igual signo. Las dos funciones lineales cambian de signo en el mismo valor de x.

–El gráfico de la parábola toca al eje x pero no lo atraviesa, es decir, el vértice está sobre el eje x. Las dos rectas se cortan en un punto del eje x.

3. Parábola sin ceros

–Esta parábola no puede escribirse como producto de dos rectas, es decir, esta función cuadrática no es producto de dos factores lineales.

–El valor de $h(x)$ va a ser siempre positivo o siempre negativo, cualquiera sea el valor de x.

–El gráfico de la parábola no atraviesa ni toca al eje x.

Queremos ahora aprovechar las ideas anteriores para plantear el problema de la búsqueda de factores de una función cuadrática. Es de alguna manera el problema inverso de los anteriores. Las estrategias que desplieguen los alumnos al resolver el problema 7 permitirán encontrar algunos algoritmos para dividir una función cuadrática por una lineal. En la segunda parte de la propuesta se estudiará el problema de la división para funciones de mayor grado. Este recorrido es una alternativa para el tratamiento en el aula de la división de polinomios, sin recurrir al algoritmo tradicional ni a la memorización de la regla de Ruffini.

PROBLEMA 7

a) Se sabe que $h(x) = -8x^2-4x + 24$ es producto de dos funciones lineales $g(x)$ y $f(x)$. ¿Puede ser $g(x) = 2x + 4$? Si les parece que sí, encuentren f. Si les parece que no, justifiquen.
b) Estudiar la misma situación del ítem a) si $h(x) = 0,5x^2+1,5x-9$ y $g(x) = x+2$.
c) Si $h(x) = 2x^2 - 4x - 16$, hallar, si es posible, dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$ tales que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Comentarios

El conocimiento que se pone en juego en este problema, y que debería estar disponible a partir de las actividades resueltas hasta ahora, es que si g es un factor de h, necesariamente el cero de g debe ser un cero de la función cuadrática h.

En el caso del ítem a), como $x = -2$ es un cero de g, los estudiantes deberían comenzar analizando si también es un cero de h. Esto se puede hacer con lápiz y papel o con la computadora: graficando h, evaluándola en $x = -2$ o con el comando “raíz”. También podría ser que busquen f directamente, sin analizar condiciones sobre los ceros de g y de h.

Para encontrar f los chicos podrían:

- buscar qué factor multiplicado por $2x+4$ da $-8x^2-4x+24$, planteando por ejemplo:

$$(2x+4)(ax+b) = -8x^2 - 4x + 24$$

Esto se puede ir resolviendo buscando a, tal que $a*2=-8$ y b tal que $b*4=24$. Y controlando que $2b+4a=-4$. O también, desarrollando el producto de los dos primeros factores para determinar un sistema de tres ecuaciones cuyas soluciones son los valores de a y b buscados.

- hallar la otra raíz de $h(x)$, expresar $h(x)$ en forma factorizada

$$h(x) = -8(x+2)(x-\frac{3}{2})$$

y concluir que el otro factor debe ser

$$-4(x-\frac{3}{2})$$

La primera de las técnicas puede generalizarse a polinomios de mayor grado (ver problemas 13 y 14); en cambio, la segunda no, porque los alumnos no disponen de técnicas de lápiz y papel que permitan el cálculo de las raíces de dichas funciones (y la computadora, en general, las calcula en forma aproximada).

En nuestra experiencia en el aula, con alguna intervención docente, varios grupos comenzaron a buscar los coeficientes a y b de la función f. Otros estudiantes espontáneamente calcularon las raíces de h y ajustaron coeficientes para hallar f.

En la puesta en común de este ítem, es importante que el docente propicie la discusión acerca de la unicidad de la recta solución. Los estudiantes tienen elementos para argumentar en torno a la unicidad.

Si usaron la primera de las técnicas, buscando el factor "$(ax+b)$", saben que a es un número que multiplicado por 2 da -8 y b es un número que multiplicado por 4 da 24. Como existe un único valor de a y un único valor de b que cumplen las condiciones planteadas, la recta también es única porque a es su pendiente y b la ordenada al origen.

En la segunda técnica el razonamiento es análogo pero solamente para la pendiente: la raíz de la recta ya está determinada (se "lee" en la expresión factorizada de la parábola). Luego, la recta es única por la unicidad de la pendiente y la raíz.

Si los estudiantes tuvieran alguna experiencia con el uso de parámetros en GeoGebra, podrían ingresar la expresión "$(2x+4)$ $(ax+b)$", asignando previamente un valor a los parámetros a y b. El gráfico de la función que resulte se podría ir modificando a medida que cambien los valores de los parámetros (esto puede hacerse con deslizadores o desde el teclado). La idea sería ir ajustando los valores de los parámetros para que el gráfico se superponga con el gráfico de $h(x)$. Este tipo de trabajo depende de la visualización, con todos los límites que, como hemos señalado, eso conlleva.

En el ítem b) los alumnos pueden responder que como $h(-2)$ no es cero, no es posible expresar h como el producto de $(x+2)$ por otro factor. También podría ser que factoricen h y verifiquen que $(x+2)$ no es factor. Otra posibilidad es que planteen $(x+2)(ax+b)=0{,}5x^2+1{,}5x-9$ e intenten, sin éxito, hallar a y b.

En las aulas muchos estudiantes planteaban $a=0{,}5$ y $2b=-9$, sin controlar que el término lineal del producto no daba 1,5. Tampoco controlaban que la nueva función hallada aportaba una raíz que no era una raíz de h ni efectuaban el producto de g por la nueva función para verificar si recuperaban h. Estas respuestas erróneas se discutieron en el aula y llevaron a tomar conciencia de que la función $g(x)=x+2$ no podía ser un factor de h, ya que -2 no es una raíz de h.

Para resolver el ítem c) se podrían buscar los ceros de $h(x)$, determinar una recta con cada cero y ajustar los coeficientes para reconstruir el coeficiente principal de h. Es probable que aparezcan distintas respuestas en el aula y es la oportunidad para discutir acerca de la cantidad de soluciones. Puede resultar inesperado para los alumnos que pares de rectas con gráficos muy diferentes den por resultado la misma parábola. También resulta pertinente la discusión sobre las condiciones que tiene que cumplir h para que pueda escribirse como producto de dos funciones lineales.

La secuencia: segunda parte

En esta segunda parte se abordarán problemas con funciones polinómicas de grado mayor o igual a tres. Para los estudiantes, se trata nuevamente de multiplicar funciones para obtener otras, pero lo novedoso es que la función producto aún no es conocida por ellos.

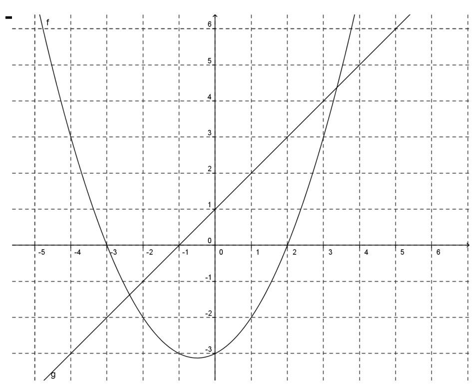
Se estudiarán con mayor detalle las funciones polinómicas de grado tres, mientras que el trabajo con las de mayor grado quedará más abierto.

Al planificar esta parte de la secuencia se nos hizo evidente que el estudio de las raíces traía aparejado prestar atención a la noción de multiplicidad. Ya no se trata solamente de saber *cuántas* raíces hay, como en el caso de la parábola. Nos preguntamos cómo se podría abordar esta noción en la escuela secundaria. ¿Será posible detectar una raíz doble estudiando el signo de la función alrededor de esa raíz? ¿O buscando condiciones sobre los factores parábola y recta? ¿Estas condiciones hay que buscarlas en las fórmulas de ambas, o en el gráfico, o mediante evaluaciones numéricas? En particular nos preguntamos cómo podíamos ayudar a que los estudiantes distinguieran entre una cúbica con un solo cero simple y otra con un cero triple. Al pensarla como producto de una recta por una parábola se tratará de caracterizar cómo deben ser los ceros de ambos factores para distinguir entre estos casos.

Comenzamos esta parte de la secuencia con un problema para resolver con "lápiz y papel", que introduce en el aula por primera vez una función cúbica.

PROBLEMA 8

Para hacer con lápiz y papel sin usar la computadora:
A continuación se dan los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$.



Consideremos la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a) Calcular:
i) h (1) =
ii) h (0) =
iii) h (−3) =
iv) h (−2) =
v) h (3) =
vi) h (−4) =
b) Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:
i) h (6),
ii) h (1,5),
iii) h (−4),
iv) h (0),
v) h (−2,5),
vi) h (−20)
c) Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.
d) Graficar aproximadamente.

Comentarios

Para el ítem a), el trabajo puede apoyarse en lo realizado en el problema 1 con el producto de rectas; sin embargo, en este problema hay una diferencia fundamental: la función producto ya no es una función conocida y no se sabe nada de la forma de su gráfico.

Cuando lo probamos en uno de los cursos, los chicos al principio pensaron (sin leer demasiado la consigna) que, como tenían una parábola y una recta, esa segunda debía ser factor de la primera y tenían que hallar "la otra" recta. Una vez aclarado lo que tenían que hacer, la actividad no les resultó complicada.

Para el ítem b), se espera volver a usar la técnica desplegada en la actividad 1, que consiste en mirar la positividad o negatividad de cada factor y deducir el signo de h sin hacer ninguna cuenta. Lo mismo para el ítem c).

Para el ítem d), seguramente los chicos empezarán por marcar los ceros y los puntos hallados en el ítem a). Los intervalos de positividad y negatividad les permitirá tener idea de por dónde "anda" el gráfico, si por arriba o por abajo del eje x.

Es probable que la mayoría ya esté considerando que la función que obtienen es de grado 3 (con x^3) y que el gráfico es algo que *no* es una parábola. Puede ser una linda discusión para hacer antes de empezar a esbozar el gráfico, porque los chicos no saben cómo será este, pero sí pueden dar razones para argumentar que no es parábola:

- En una parábola a lo sumo hay dos valores que tienen la misma imagen; en cambio, en $h(x)$ encontramos varias ternas que tienen la misma imagen (por ejemplo −3, −1 y 2 son tres ceros de esta función).
- La cantidad de conjuntos de positividad y negatividad no se corresponden con los de una parábola.
- El grado de $h(x)$ es mayor que 2 porque $h(x)$ es el producto de un factor de grado 2 y otro de grado 1.

- También cambian los intervalos de crecimiento: hay un solo intervalo donde la parábola crece y otro donde decrece.

Puede ser que entre los chicos aparezca la inquietud sobre dónde están los extremos locales y qué valores toman (“hasta dónde llega”); pueden suponer que estos están en el punto medio de los ceros, como si fueran parábolas. Esto lleva implícito una idea de simetría. Algo de eso puede apreciarse en la producción de un estudiante que se adjunta más adelante.

Se puede conversar en la clase respecto de que la curva no tiene por qué ser simétrica y que de hecho no lo es, ya que si fuera simétrica, $h(0)$ debería ser igual a $h(1)$ porque $h(-1)=h(2)$.

Está claro que habrá distintos dibujos y no es la idea discutir si están bien o no, sino solamente si son coherentes con lo que se sabe. Se explicita que faltan datos para hacer un gráfico más exacto.

Puede ocurrir que un estudiante quiera trabajar con las fórmulas obtenidas a partir del gráfico, por ejemplo:

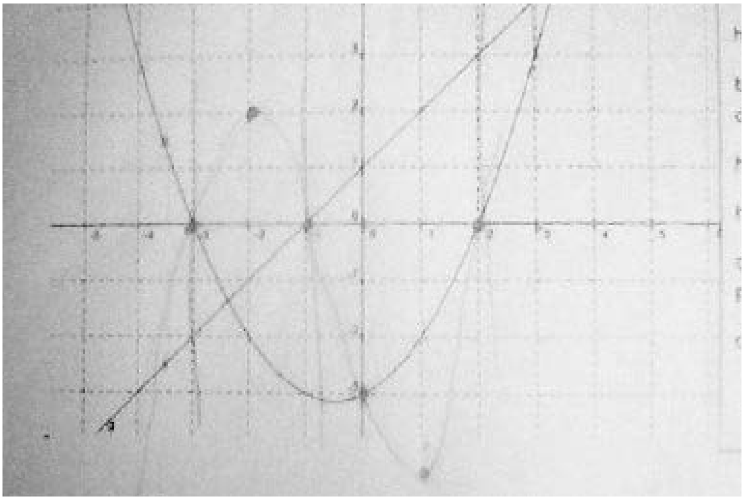
$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x+3)$$

y

$$g(x)=x+1$$

En ese caso podrá resolver los ítems a) y b), pero aún no hay conocimientos como para realizar el gráfico a partir de la fórmula.

Están frente a una función nueva, con un gráfico diferente y cuya fórmula es de grado 3.



La foto es de la curva que hizo un estudiante en uno de los cursos. Notemos que ubicó uno de los extremos en el punto medio de dos ceros (en $x=-2$). En este curso los estudiantes querían un nombre para estas nuevas curvas: una chica propuso llamarlas “tríbolas”.

PROBLEMA 9

Con GeoGebra:
a) Grafiquen la recta y la parábola del problema 8 buscando la fórmula de ambas y grafiquen la función producto h. Guarden este archivo.
b) El enunciado de este ítem es para dar oralmente en la clase una vez concluida la parte a). *En un nuevo archivo vuelvan a graficar* $h(x)$. *¿Pueden expresar h como producto de tres rectas? En caso de ser posible, escriban la fórmula de las tres rectas que encontraron y grafiquen la función producto en la misma ventana para ver si se superpone con el gráfico de h. En caso de no ser posible, justifiquen por qué. Guarden este archivo.*
c) *Abran el archivo que guardaron en a). Dejen fija la parábola y muevan la recta paralelamente a ella misma, de tal manera que el producto h atraviese el eje x una sola vez. Guarden este archivo sin modificar el anterior (ir a "Guardar como").*
d) Abran el archivo que guardaron en a). Dejen la recta fija y cambien la fórmula de la parábola para lograr que h tenga un cero simple y otro doble. Guarden este archivo sin modificar el anterior.

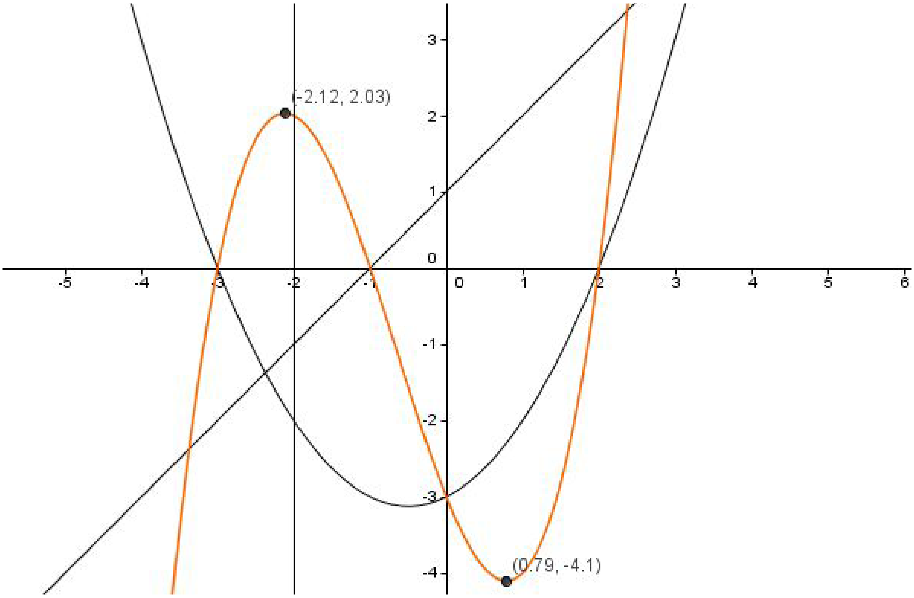
Comentarios

En el aula quizás haya que explicar qué significa "que atraviese al eje una sola vez", aunque en la primera parte ya ha aparecido esta terminología. Tal como indicamos en el caso de las rectas, si se quiere "dejar fija la parábola" hay que apoyarse en ella y, haciendo clic con botón derecho, ir a "Propiedades", "Básico", "Objeto fijo".

El trabajo que se propone es análogo al trabajo del problema 4. El objetivo del ítem a) es analizar algunas características de estos nuevos gráficos. Una forma de hacerlo es comparar el gráfico de h realizado con GeoGebra y el gráfico realizado por los estudiantes en lápiz y papel:

- Con respecto a las características del gráfico de h se puede notar que, a diferencia de la parábola, aquí no hay vértices absolutos sino "locales".
- En la parábola, la ordenada del vértice es máximo o mínimo absoluto y se alcanza cuando x toma el valor promedio de dos valores de x simétricos. Puede ser que los estudiantes piensen que va a ocurrir lo mismo en el caso de las funciones cúbicas y vuelquen esta idea en el gráfico realizado en lápiz y papel. La comparación con el gráfico realizado con GeoGebra permitirá poner en duda este supuesto, si no se discutió en el problema 8.

Si bien a simple vista podría creerse que la abscisa del máximo relativo está ubicada en el punto medio entre las raíces, en el mínimo relativo se puede visualizar que esto no ocurre. ¿Cómo estar seguros si el máximo relativo se alcanza en $x = -2$? ¿Hay simetría del gráfico cerca de ese punto? Como se tienen raíces en $x = -3$ y $x = -1$, para mostrar que no hay simetría en la función h se podría trazar la recta $x = -2$ y ver que no pasa por el punto máximo "relativo". También pueden obtenerse los valores de los extremos con el comando “Extremos”, aunque sabemos que los valores que devuelve la computadora son aproximados.

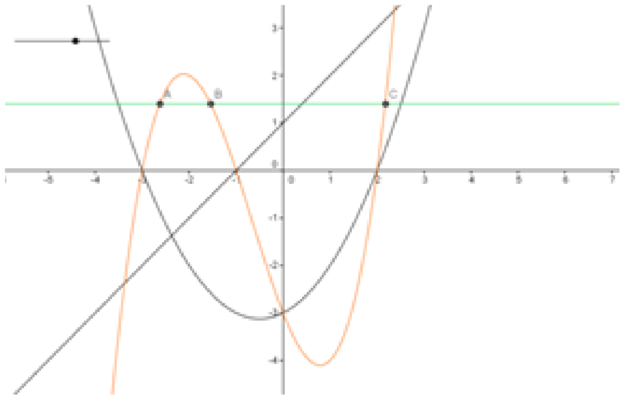


En este problema o en los siguientes puede surgir la pregunta de cómo hallar los extremos. Esta cuestión apareció apenas se trabajó este ítem en uno de los cursos.

En nuestro grupo estuvimos buscando una forma algebraica de hallar los extremos relativos de una función cúbica sin recurrir a la derivada. Buscábamos una forma “canónica” que, como se había hecho con las funciones cuadráticas, nos permitiera leer directamente dónde estaban los extremos. No pudimos encontrarla. ¿Cómo encarar este asunto en el aula? La decisión que tomamos fue habilitar el uso del comando “extremos” de GeoGebra e informar a los estudiantes que se necesita más teoría matemática, en este caso del análisis, para poder encontrar los extremos relativos. Este problema podría retomarse al trabajar con la noción de derivada en los años siguientes.[5]

Para dar una idea de qué es lo que ocurre cuando hay un extremo, otra posibilidad es la siguiente: se grafican la rectas $y=a$, poniendo “a” como parámetro y asignándole un deslizador. Si se pide a GeoGebra que calcule la intersección entre $h(x)$ y esa recta, se ve que para muchos valores de a hay tres puntos de intersección y para muchos otros hay un solo punto. Si se mueve el deslizador de manera que la recta horizontal vaya acercándose a uno de los extremos, se ve cómo dos de los puntos de la intersección convergen en uno solo y finalmente “desaparecen”.

5. De hecho, en uno de los cursos un estudiante pidió que le explicaran derivada porque él quería encontrar los extremos.



En cuanto a la expresión algebraica de h, los estudiantes encontrarán una fórmula para ella en la ventana algebraica, expresada como producto de dos o más factores (algunos pueden haber encontrado una fórmula factorizada de la parábola y otros pueden haber construido su expresión canónica). Se puede pedir a los estudiantes que multipliquen "a mano", para obtener una fórmula desarrollada de h, o usar el comando "Desarrolla" del programa. Se obtendrá así la expresión de un polinomio de grado tres:

$$h(x) = 0,5x^3 + x^2 - 2,5x - 5$$

Para algunos estudiantes podría ser el primer encuentro con una fórmula de tercer grado. Se podrían presentar a las funciones cúbicas como aquellas que tienen como fórmula algebraica una expresión como la anterior, donde aparece x^3 y no aparecen potencias mayores de x.

En el ítem b) se busca que los estudiantes identifiquen que las rectas buscadas no son únicas.

Si se apoyan en las fórmulas de la parábola (factorizada) y en la recta, pueden encontrar otras dos rectas a partir de la parábola. Pero hay muchos pares de rectas que dan como producto la misma parábola. Esto ya se estudió en la primera parte de la secuencia.

Si solo toman en cuenta las raíces de h, pueden proponer una recta por cada raíz. Considerando solamente esa condición, es probable que al graficar el producto de esas tres rectas el gráfico no coincida con el de h. Las raíces de las rectas están determinadas pero las pendientes no. En estas el producto de las tres pendientes debe coincidir con el coeficiente principal de h. Hay infinitas combinaciones para las tres pendientes: dando un valor arbitrario a dos de ellas queda determinada la tercera.

Otra forma de verificar con GeoGebra que el producto de sus tres rectas coincide con la función h es utilizar el comando "Relación entre dos objetos".

Este ítem también podría abrir a la discusión que no hay una sola opción de parábola y recta cuyo producto resulte la función $h(x)$.

Para el ítem c), las estrategias que pueden desplegar los estudiantes son similares a las analizadas en el problema 4, ítem b).

En esta parte del trabajo reaparece la idea de raíz doble. Si se mueve la recta “gráfico de g” para la derecha hasta obtener en la ventana algebraica $g(x)=x-2$, se observa que el gráfico de h no atraviesa el eje x en $x=2$. A pesar de esta justificación visual, nos parece pertinente avanzar en la búsqueda de alguna explicación que se apoye en la relación gráfico-fórmula algebraica. Se trata de desarrollar herramientas de control de lo que muestra la pantalla. Una posible justificación podría ser: tanto para los x mayores que 2 como para los menores que 2 (pero mayores que –3), las dos funciones (lineal y cuadrática) tienen el mismo signo (ambas son positivas a la derecha y ambas son negativas a la izquierda), y eso hace que la función producto $h(x)$ sea positiva a ambos lados, es decir, que no atraviese el eje.

De todos modos advertimos que no es tan preciso “mover” la recta $g(x)=x+1$ hasta alcanzar en la vista algebraica la recta $g(x)=x-2$. Pueden aparecer los fenómenos propios del programa que hemos analizado en el problema 4.

Nos parece interesante trabajar en el aula la noción de cero “doble”, a partir de la fórmula de h que resulta, esto es,

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x+3)$$

Esto permite “leer” que se anula en $x = 2$ pero no cambia de signo. Por ejemplo, reescribiendo

$$\frac{1}{2} \cdot (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x+3) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 \cdot (x+3)$$

se podrá observar que el producto

$$\frac{1}{2}(x-2)^2(x+3)$$

se anula en 2 y en –3 y solo es negativo para los x menores que –3 porque $(x-2)^2$ siempre es positivo. En particular, los valores de h son positivos a la derecha y a la izquierda de $x = 2$, y cerca de ese valor.

También se podría ver a h como el producto de la parábola

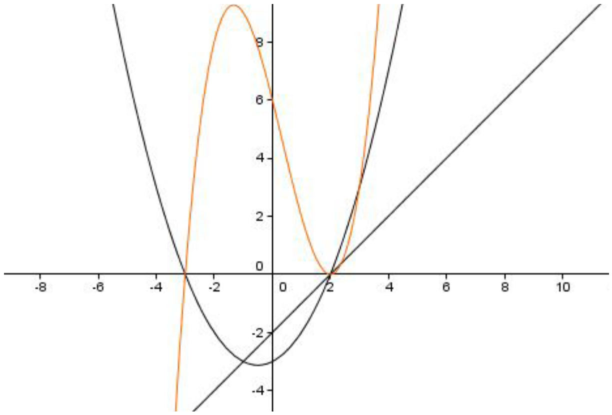
$$j(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$$

y de la recta

$$k(x) = (x+3)$$

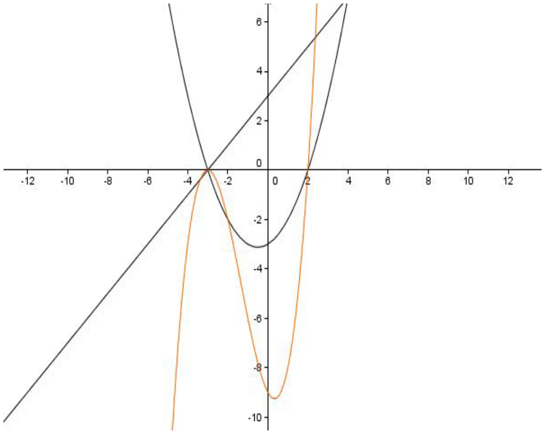
Si se grafican estas dos funciones, se vuelve a obtener h como producto.

El trabajo en este ítem nos permite relacionar varias ideas que rondan la cuestión de “raíz doble”:



- algo del orden de lo algebraico que se “ve” en la fórmula (hay un factor elevado al cuadrado);
- algo que se “ve” en el gráfico (que tiene raíz pero no atraviesa el eje x, “rebota”);
- algo del orden de lo numérico que se “ve” evaluando a ambos lados de la raíz (la función no cambia de signo alrededor de ella).

Si para resolver el ítem c) se arrastrara la recta buscando hacer coincidir su raíz con $x=-3$, la otra raíz de la parábola, se plantearía una discusión similar pero se llegaría a una cúbica distinta.



La pregunta “¿habrá más cúbicas que respondan a este inciso?” será desafiante para los estudiantes después de haber discutido las dos soluciones anteriores.

En el ítem d) se pide ingresar la fórmula de una parábola, dejando fija la de la recta. Se trata nuevamente de poner en juego la relación entre el registro algebraico y el registro gráfico, y la posibilidad de anticipar cómo se modificará el gráfico a partir del cambio de alguna de las fórmulas algebraicas.

Una posibilidad es hacer coincidir, desde la fórmula, alguna de las raíces de la parábola con la raíz de la recta, replicando de este modo el caso analizado en el ítem anterior. Lo que querríamos agregar ahora es que una parábola con un cero doble distinto al de la recta también es solución a este problema. Para este ítem hay infinitas parábolas que son solución de lo pedido.

A partir de lo que se hizo en los problema 8 y 9, aparecieron en el aula funciones cúbicas con tres raíces distintas y otras con solo dos raíces distintas. Todas las cúbicas estudiadas hasta el momento corresponden al producto de una función cuadrática por una lineal.

Es posible construir con los estudiantes una síntesis de lo que se sabe hasta el momento:

Función cúbica				
Tres raíces distintas		**Dos raíces distintas**		
Tres rectas con raíces distintas entre sí.	Una parábola con dos raíces y una recta con la raíz distinta a las de la parábola.	Tres rectas, dos de ellas con la misma raíz.	Una parábola con una raíz doble y una recta con una raíz diferente a la de la parábola	Una parábola con dos raíces y una recta que pase por alguna de las dos raíces de la parábola.

PROBLEMA 10

Consigna para dar oralmente:
Exploren con GeoGebra si puede haber otras posibilidades para las raíces de una cúbica definida como producto de una parábola y una recta, o como producto de tres rectas.

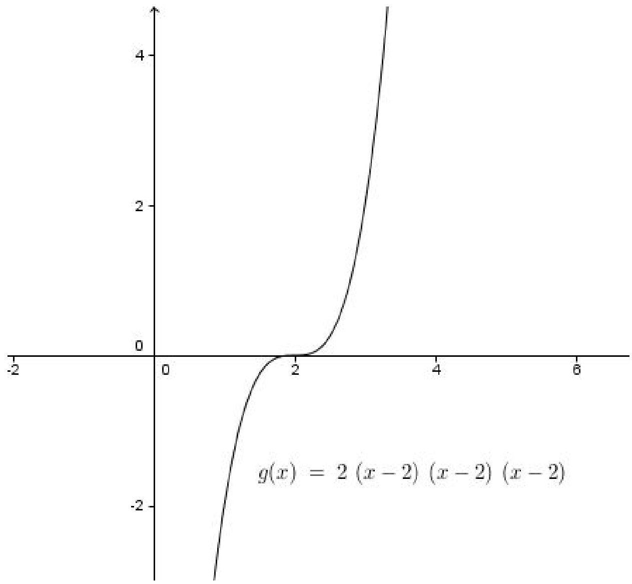
Comentarios

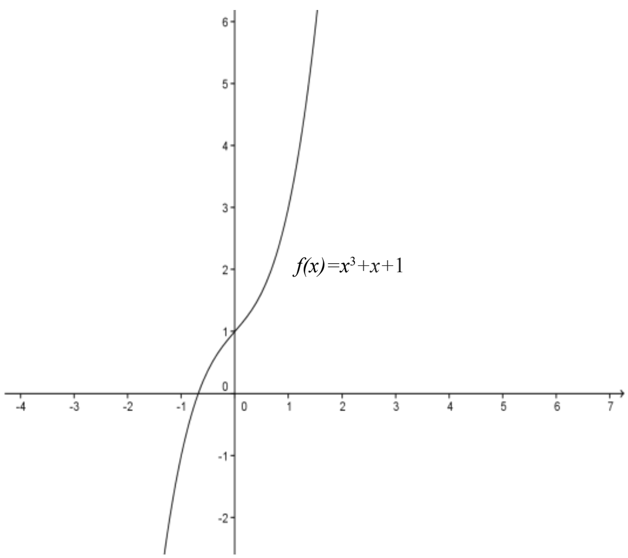
Una estrategia para explorar la situación propuesta puede ser utilizar alguno de los archivos del problema 9 y mover la parábola buscando nuevas posibilidades para las raíces: que se apoye en el eje x sobre el cero de la recta dando lugar a una raíz triple; o moverla de manera que no toque al eje x, dando lugar a una cúbica con una única raíz que además es simple.[6]

Es probable que los estudiantes lleguen solos a ejemplos de cúbicas con raíces triples pero que a nadie se le ocurra la posibilidad de un cero simple solamente. En ese caso podemos preguntarles: *¿Podemos tener una sola raíz simple?*

Un asunto a discutir serían las diferencias a nivel del gráfico de una función cúbica con un solo cero simple y otra con una raíz triple. Hasta aquí distinguíamos entre ceros en los cuales la curva atraviesa al eje x y ceros en los cuales "rebota". Ahora aparece una distinción entre dos maneras de atravesar el eje x.

6. En la búsqueda de la raíz triple podrían aparecer las dificultades analizadas en el problema 4, relativas a la incompatibilidad que puede presentarse entre la vista algebraica y la gráfica.



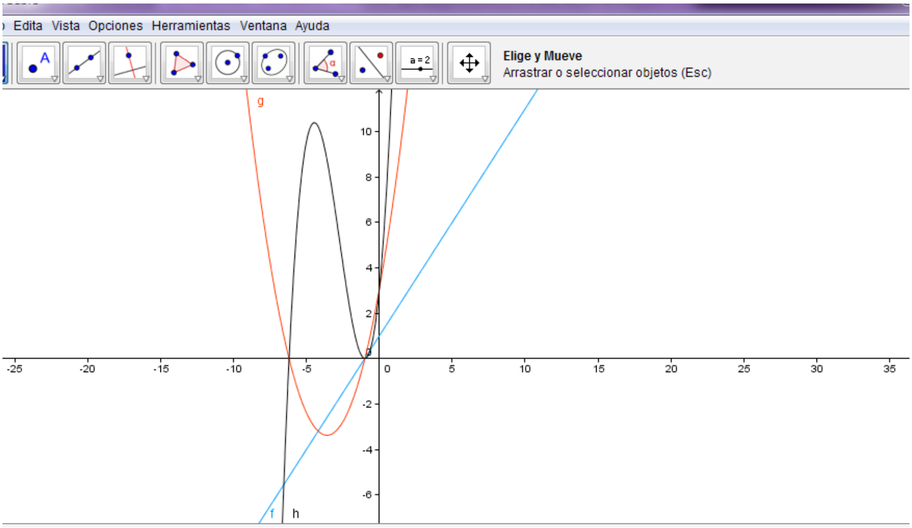


Las explicaciones que puedan dar los estudiantes acerca de las diferencias entre estos dos casos serán necesariamente provisorias y expresadas en un lenguaje informal. Es nuevamente un asunto que podría retomarse al disponer de herramientas de análisis, por ejemplo, la noción de derivada.

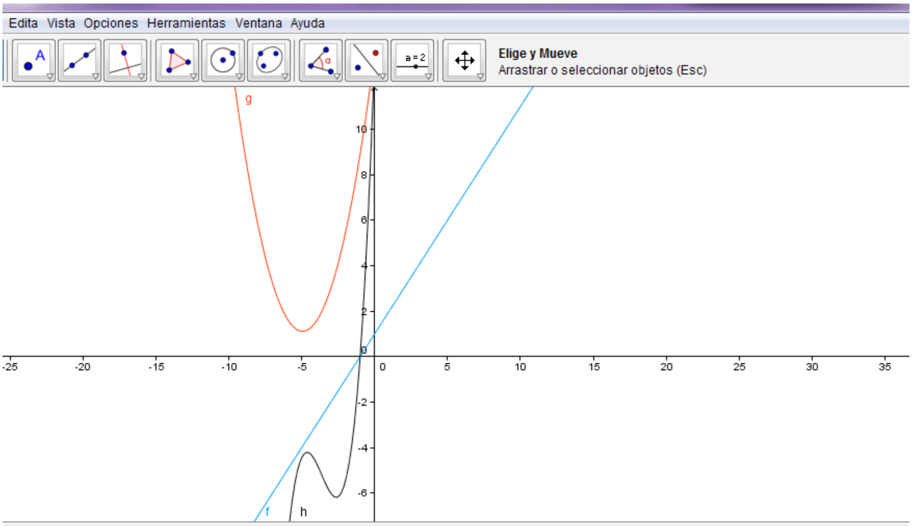
Con todos estos casos se termina el cuadro.

En uno de los cursos la profesora formuló la siguiente pregunta: *¿Qué tipos de raíces se pueden lograr en la función cúbica? Tratar de atrapar todas las posibilidades que existen.* A modo de ilustración, mostramos la producción de una estudiante:

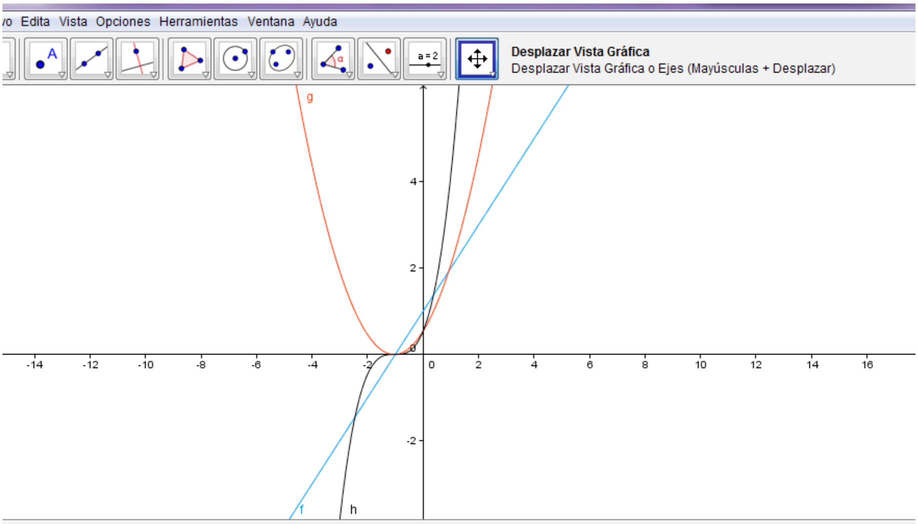
Posibilidad 1:
Si muevo la parábola haciendo coincidir una raíz de sus raíces con la raíz de la recta, en la función cubica tendré una raíz doble y una simple.



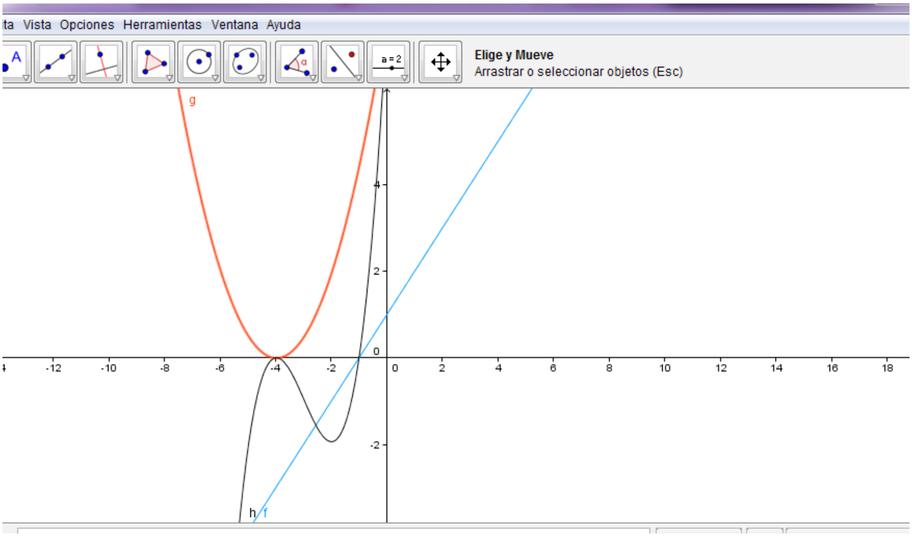
Posibilidad 2:
Si muevo la parábola de manera tal que esta no tenga raíces, tendremos una raíz simple en la cúbica.



Posibilidad 3:
Si muevo la parábola de manera tal que su raíz toque al eje x y no lo atraviese y la hacemos coincidir con la raíz de la recta, tendremos una función cúbica con raíz triple.



Posibilidad 4:
Si muevo la parábola de tal manera que tenga una raíz doble, o sea que no atraviese al eje x, tendremos una cúbica con una raíz doble y una simple.



Es notable la exhaustividad de esta estudiante al presentar la repuesta al problema, que resolvió dejando siempre fija la recta dada en el problema 9. ◢

En los problemas 8, 9 y 10 los estudiantes han estado trabajando con funciones cúbicas que pueden expresarse como el producto de una función cuadrática y una lineal. Nosotros sabemos que de esta manera se obtienen *todas* las funciones cúbicas, pero los estudiantes aún no lo saben. Hasta podría ser que sospechen lo contrario, extendiendo lo estudiado en la primera parte de la secuencia para parábolas (no todas las parábolas resultaron ser producto de dos rectas).

Para llegar a esta discusión en el aula a continuación le proponemos a los estudiantes dos problemas en los cuales se pide producir fórmulas de funciones cúbicas que cumplan ciertas condiciones. En el segundo de estos problemas se pregunta por una función cúbica sin ceros, tarea que llevará a buscar cúbicas que no sean el producto de una lineal por una cuadrática (ya que un factor lineal siempre aportaría un cero). Pensamos que quizás sea necesaria una intervención docente para arribar a una explicación de por qué no va a poder hallarse.

PROBLEMA 11

En cada caso, hallen, si existe, la fórmula de una función cúbica h que verifique lo pedido. Si les parece que no existe expliquen por qué:
a) Las raíces son $-5, -2$ y 4, y h toma valores negativos para x mayores que 4.
b) Las raíces son -3, 2 y 8 y el gráfico de h corta al eje de las "y" en 12.
c) Las raíces son solamente 2 y 7.
d) Las raíces son solamente cero y -1 y $h(1) = 10$.
e) La función que encontraron en cada caso, ¿es la única que cumple esas condiciones? Si creen que sí, justifiquen; y si creen que no, hallen al menos tres fórmulas diferentes.

Comentarios

Para el caso del ítem a), puede ocurrir que los estudiantes piensen en tres funciones lineales que tengan las raíces en los puntos solicitados y anticipen que dos de ellas deben ser crecientes y la tercera decreciente, o propongan tres rectas con pendiente negativa y que sus raíces estén en los puntos solicitados.

O tal vez puede ser que directamente planteen el producto $(x+5)\cdot(x+2)\cdot(x-4)$, sin anticipar los signos de las pendientes, y luego, al ver el gráfico de la función producto con GeoGebra, se den cuenta de que deben multiplicar por un factor negativo para que la gráfica se invierta (este conocimiento ya lo tienen de cuadrática). En este caso utilizan GeoGebra como herramienta de control.

Si piensan la fórmula de la función cúbica como el producto de una función lineal y una cuadrática, puede ser que anticipen que, para que sea negativa en el intervalo $(4,+\infty)$, los factores deben tener distinto signo en ese intervalo. Así, podrían dar cualquier parábola con las ramas hacia abajo y con las raíces en dos de los puntos solicitados, y una recta creciente que pase por el otro punto solicitado, o a la inversa. En este caso hay infinitas cúbicas que verifican las condiciones.

En el ítem b) puede ser que los estudiantes grafiquen con GeoGebra la función cúbica $h(x)=(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-8)$ y vean que corta al eje y en un valor mayor que 12. Para averiguar el valor de la ordenada al origen de h, pueden evaluar en cero cada factor con GeoGebra, ingresando en la barra de entrada $h(0)$, o hallando la intersección entre esta cúbica y el eje de ordenadas. Luego deberían pensar cómo modificar la fórmula para que la ordenada al origen sea 12 en vez de 48, sin cambiar los ceros.

Algunos estudiantes de un curso donde se trabajó esta actividad plantearon erróneamente restar 36 para lograr que la ordenada al origen sea 12, sin notar que esa nueva función ya no tiene las mismas raíces. Otros propusieron dividir por 4 (o multiplicar por $\frac{1}{4}$) la fórmula de más arriba.

Finalmente, otro grupo de chicos comenzó escribiendo $y=k(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-8)$, reemplazaron la x por cero, la y por 12, y despejaron k, porque así lo habían hecho con la función cuadrática. Las distintas estrategias que emplean dan cuenta de que la solución de este ítem es única.

En el caso del ítem c), se espera que los alumnos adviertan que una de las dos raíces debe ser doble, de lo contrario no sería cúbica. Nuevamente hay infinitas soluciones para este ítem.

Suponemos que después de haber resuelto el ítem c), al abordar el ítem d) los estudiantes considerarán a cualquiera de las dos raíces como raíz doble. Podría surgir, entre otras, cualquiera de estas dos funciones cúbicas: $f(x)=k\cdot x^2\cdot(x+1)$ o $g(x)=k\cdot x(x+1)^2$. Luego hay que ajustar el coeficiente principal para lograr el valor pedido de la función para $x=1$. Se repite la situación del ítem b).

En uno de los cursos, la discusión colectiva en torno a este problema derivó en que una estudiante anotara en su carpeta:

> Conclusiones dichas en clase: es raíz doble siempre que alrededor de una raíz, tanto atrás como adelante, el signo sea igual (es decir, los dos positivos o los dos negativos), por eso rebota. Esto ocurre siempre que la multiplicidad sea par; cuando la multiplicidad sea impar, la gráfica atravesará en esa raíz al eje x.

Con un lenguaje coloquial, esta estudiante intenta describir el comportamiento de la función en un entorno de una raíz doble, combinando información del registro gráfico y el numérico, posiblemente en relación con la potencia 2 que muestra el registro algebraico. ◢

Luego del trabajo con este problema, suponemos que los estudiantes estarán en condiciones de asegurar que hay infinitas funciones cúbicas con las mismas raíces, o con los mismos conjuntos de positividad y negatividad, y que, en cambio, hay una única función cúbica que tenga determinadas raíces y además pase por un punto dado.

PROBLEMA 12

Escriban, si existe, una fórmula de alguna función cúbica que verifique las condiciones que se piden en cada caso:

a) que tenga un solo cero y esté en $x = 7$*;*
b) que tenga un cero doble en $x = -5$*;*
c) que tenga ceros en $x = \frac{-1}{5}$, $x = 3$, $x = -3$ *y en* $x = 0$*;*
d) que no tenga ceros.

Comentarios

En el ítem a) los estudiantes pueden proponer tres funciones lineales que tengan las tres la misma raíz en $y = 7$, eventualmente la misma recta tres veces; también puede ocurrir que piensen en una parábola con raíz doble y una recta que pase por esa misma raíz; y la tercera posibilidad es que consideren una parábola que no tenga ceros y una recta cuya raíz esté en $x = 7$. En el primer caso, se dará lugar a una función del tipo $y = m(x-7) \cdot n(x-7) \cdot r(x-7)$. En el segundo caso, se daría lugar a una función que podrá expresarse como $y = k(x-7)^2 \cdot m(x-7)$. Ambas maneras de pensarlo dan lugar a la misma familia de funciones: cúbicas con un cero triple en $x = 7$, que pueden expresarse de la forma $y = k(x-7)^3$. Es una familia de funciones cuyos gráficos podrían estudiarse con GeoGebra utilizando "deslizadores".

Podría ser que todos los estudiantes "fabriquen" funciones cúbicas con ceros triples y, en ese caso, habrá que preguntar sobre otras posibilidades. En el curso donde se discutió este problema varios estudiantes consideraron el producto de una recta por una parábola sin ceros, dando lugar a ceros simples para la cúbica.

En el ítem b) es esperable que los estudiantes "fabriquen" diferentes cúbicas: algunas en las cuales el cero doble provenga de una recta y un cero de la parábola, o a partir de una parábola con cero doble y una función lineal cualquiera que no se anule en $x = -5$.

Para el ítem c), esperamos que los estudiantes puedan poner en juego que una función así "necesitaría", por lo menos, cuatro rectas como factores, y eso daría un grado mayor o igual que 4.

Se llegará a la conclusión de que las funciones cúbicas tienen como máximo tres ceros. Es decir, se pueden obtener, a lo sumo, como el producto de tres rectas. Este hecho abonaría la idea de que la cantidad de raíces reales de una función polinómica puede ser menor o igual al grado del polinomio de la fórmula, idea que se sustenta en el número de rectas que pueden multiplicarse.

El ítem d) plantea una novedad muy grande en relación con todo lo trabajado en la segunda parte de esta secuencia, ya que todas las cúbicas trabajadas hasta este momento se anulaban en al menos un valor. En un curso algunos estudiantes intentaron con rectas provenientes de funciones constantes, buscando cúbicas sin ceros.

Probablemente, a esta altura se necesite una intervención docente que reformule la pregunta: *hasta ahora todas las funciones cúbicas trabajadas se obtuvieron como el producto de una recta por una parábola, o como producto de tres rectas. Sabemos que si existe una recta como factor, siempre existirá al menos un cero. Ahora, ¿habrá alguna función cúbica que no tenga ceros? No debería ser el producto de una recta por una parábola.*

Los alumnos podrían explorar introduciendo una fórmula de grado 3 y haciendo variar los coeficientes de la fórmula (para esta exploración se podrían utilizar deslizadores o parámetros en GeoGebra). Los gráficos obtenidos cortarán siempre el eje de las x.

Estamos suponiendo entonces que esta exploración permitirá arribar a un cierto convencimiento de que no va a haber cúbica sin ceros. Pensamos que es una cuestión que puede ser discutida en el espacio colectivo de la clase, analizando el comportamiento de una función cúbica en el infinito. Buscaremos una justificación para el hecho de que cualquier función cúbica no tiene el mismo signo si x tiende a $+\infty$ que si x tiende a $-\infty$, por lo cual, haciendo un uso implícito de que se trata de una función continua, podremos deducir que la función vale cero al menos una vez, o sea, que siempre corta al eje x en, por lo menos, un punto (si bien esta conclusión es válida porque se trata de una función continua, como hasta ahora son las únicas funciones que conocen los estudiantes, hacer esta aclaración en este momento no tendría mucho sentido para ellos).

Nosotros optamos por estudiar el comportamiento en el infinito con una función cúbica particular, por ejemplo x^3-5x^2+3x-4. Pueden darse argumentos –aunque no sean demostraciones formales– para asegurar que para valores de x "tendiendo a $+\infty$" la función toma valores positivos, mientras que para x "tendiendo a $-\infty$", los valores negativos al cubo serán negativos y la función toda tomará valores negativos. Más precisamente se puede ver que cuando x es muy grande, x veces x^2 es mucho más grande que cinco veces x^2, y entonces toda la función toma valores positivos *y* muy grandes (los otros términos no llegan a afectar este comportamiento). Un análisis similar podría hacerse con una función con coeficiente principal negativo. Estas explicaciones permitirían validar lo que los estudiantes sospecharon en su exploración: que todas las funciones cúbicas se anulan en algún punto.[7]

A partir de ahora, los estudiantes saben que para cualquier función cúbica habrá siempre un valor donde se anule.

PROBLEMA 13

La función $h(x)=4x^3-6x^2-22x+12$ es el producto de dos funciones $g(x)$ y $f(x)$.
a) ¿Puede ser que una de ellas sea $g(x)=2x-1$? Si les parece que sí encuentren f. Si les parece que no, justifiquen.
b) ¿Y si fuera $g(x)=x-1$?
c) Si es posible, escribir $h(x)$ como producto de tres lineales. De no ser posible, expliquen por qué.

Comentarios

Este problema es análogo al problema 7 de la primera parte, con la complejidad añadida de que ahora la función h es de grado tres.

Los estudiantes disponen de estrategias para hallar las raíces de las funciones cuadráticas, pero no de funciones de mayor grado. Esto hace que no puedan recurrir a la segunda técnica mencionada para resolver el problema 7, aunque sí podrían utilizar la primera.

7. Una prueba más rigurosa se presenta en el anexo, al final de este libro.

El conocimiento trabajado en toda la secuencia les permitió afirmar que "si g es un factor de h, necesariamente el cero de la primera función debe serlo de la segunda". Esta propiedad permitiría descartar un posible factor si sus ceros no son ceros de h.

En el ítem a) se podría calcular la raíz de g y evaluar h en ese valor (como dijimos anteriormente, esto se puede realizar con lápiz y papel o con la computadora: por ejemplo graficando h, evaluando o con el comando raíz). Se llegará que ½, que la raíz de la función lineal g, es también raíz de h, lo cual habilita a buscar la función f. Para encontrarla, esperamos que, gracias al trabajo hecho en el problema 7, puedan plantear la siguiente igualdad:

$$4x^3-6x^2-22x+12=(2x-1)\cdot(ax^2+bx+c)$$

Ahora, no todos los coeficientes son fáciles de obtener a simple vista. Los más sencillos de obtener son a y c, con lo cual puede ocurrir que hallen primero estos valores y luego b $(b=2c+22)$. Con estos datos, en caso de querer verificar, al reemplazar los valores y realizar el producto, se obtendrá la función h dada. Puede suceder que no lleguen a considerar la otra condición $(2b-a=-6)$, que aparecería si plantearan las cuatro ecuaciones que surgen al plantear las igualdades de los coeficientes de igual grado. El docente podría considerar esta cuarta condición en el espacio colectivo y ver que es verificada por los valores de a, b y c hallados.

Otra posibilidad, que ocurrió en una de nuestras aulas, es que los alumnos resuelvan el ítem usando la computadora: ingresan $h(x)$, ingresan $g(x)$ y escriben $h(x)/g(x)$. La computadora les devuelve el gráfico de una parábola, de la cual encuentran la ecuación.

En el ítem b) los estudiantes pueden responder que como $h(1)$ no es cero, no es posible expresar h como el producto de $(x-1)$ por otro factor.

Otra posibilidad es que no se den cuenta de lo anterior y directamente planteen $4x^3-6x^2-22x+12=(x-1)\cdot(ax^2+bx+c)$ e intenten, sin éxito, hallar a, b y c. Los estudiantes podrían igualar los coeficientes y comprobar que no hay solución para el sistema de las cuatro ecuaciones.

También pueden considerar solo tres condiciones, hallar a, b y c, pero al multiplicar la cuadrática obtenida por $x-1$ no llegarán a obtener h. Si no realizaran esta última verificación, algunos alumnos pueden creer que hallaron el factor que buscaban.

El docente, ante esta diversidad de propuestas, tiene material para organizar un debate en el aula.

Puede ser que los estudiantes resuelvan el ítem c) teniendo en cuenta lo trabajado en el ítem a): ya saben escribir h como producto de una lineal por una cuadrática, por lo que pueden determinar, de diferentes formas, que tiene otras dos raíces y proponer funciones lineales que sean a su vez factores de la función cuadrática.

Si los estudiantes no pudieran iniciar una estrategia para resolver este ítem, el docente puede sugerirles que analicen la función cuadrática.

El docente puede trabajar, en el espacio colectivo, la no unicidad de las funciones lineales cuyo producto es h. Con esto queremos decir que cada una de estas funciones lineales debe tener su raíz igual a una raíz de la función cúbica, pero además el producto de las pendientes de las tres rectas debe ser el coeficiente principal de h, lo cual permite muchas funciones lineales diferentes.

PROBLEMA 14

Dadas las funciones:

$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $\qquad$ $h_2(x) = -2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$

$h_3(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ $\qquad$ $h_4(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

a) ¿Todas estas funciones tienen por raíz $x = 1$? Usando este dato busquen, si es posible, una recta y una parábola cuyo producto sea cada h.
b) Si es posible, escribir las funciones polinómicas dadas como producto de tres lineales. De no ser posible, expliquen por qué.
c) Realicen un gráfico aproximado de cada función h.
d) Graficar las mismas funciones con GeoGebra y analizar diferencias y similitudes con el gráfico hecho "a mano".

Comentarios

A diferencia del problema anterior, aquí la dificultad radica en que no se les da a los estudiantes la función factor sino que el dato es una posible raíz. A esta altura de la secuencia los estudiantes fueron construyendo la idea de que *si $x = 1$ es raíz, entonces la función lineal $f(x) = a(x - 1)$ es un factor de la cúbica, cualquiera sea el valor de la pendiente a.* Este conocimiento verdadero, aunque quizás no haya sido formulado explícitamente en el aula, resulta tan evidente para los estudiantes que elegimos no presentarlo como una nueva propiedad a demostrar.[8]

Apoyándose entonces en esta idea, y como $x = 1$ es raíz de las cuatro funciones, en todos los casos, los estudiantes podrían plantear el producto de una recta que tenga raíz 1 por $f(x)$, donde f es la función a encontrar: $h(x) = (x - 1) \cdot (ax^2 + bx + c)$. Es posible que, para hallar la función cuadrática, noten que el miembro derecho de la ecuación planteada es siempre el mismo, es decir, $ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

Con respecto a h_1, resulta al encontrar a, b y c: $h_1(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x)$.

Respecto de h_2, una vez que obtuvieran $h_2(x) = (x - 1) \cdot (-2x^2 + 8)$, los estudiantes podrían sacar el factor -2 en la expresión cuadrática e introducirlo en la lineal, obteniéndose $h_2(x) = (-2x + 2) \cdot (x^2 - 4)$.

El trabajo con h_3 y h_4 es similar a los anteriores.

El ítem b) es similar al del problema 13. La diferencia es que h_3 no puede escribirse como producto de tres lineales, ya que la función cuadrática resulta $2x^2 + 8$, y no tiene ceros.

Esta es una buena oportunidad para que los estudiantes puedan reinvertir y valorizar sus conocimientos de cuadrática. Hay distintas maneras en que podrían hallar las

8. Elegimos no demostrar que "*c* es raíz de *f* si y solamente si $(x-c)$ divide a *f*" porque una prueba de este hecho requiere considerar la operación "división de un polinomio por otro", que provee un cociente y un resto. En nuestra propuesta abordamos el problema de la división de una función por otra en términos de la búsqueda de factores para la primera. En ese contexto no nos interesaba considerar las divisiones con resto.

raíces de las funciones cuadráticas resultantes. Por ejemplo, en $h_1(x)=(x-1)\cdot(x^2-x)$ podrían sacar factor común; en $h_2(x)=(x-1)\cdot(-2x^2+8)$, igualar a cero y obtener los valores de x; o en cualquiera de los casos, con la fórmula resolvente. De hecho, las funciones h fueron elegidas convenientemente para que pudieran aparecer en el aula diferentes modos de resolución.

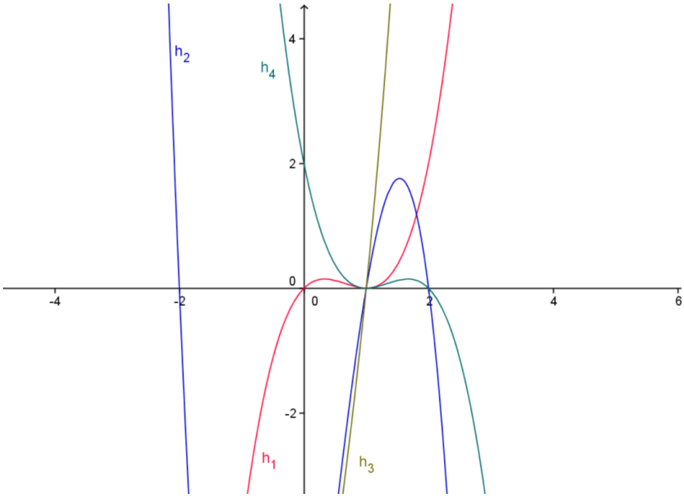
Creemos que este es un buen momento para discutir, con el total de la clase, que no son únicas las parábolas y las rectas cuyos productos permiten obtener cada h_i. Con respecto al ítem a), por ejemplo, si no surgió en la clase, el docente puede preguntar si h_1 puede escribirse como $h_1(x)=(x-1)^2\cdot x$. Por lo tanto, existe otra parábola y otra recta, de manera que al multiplicarlas también se obtiene h. En esta escritura, por ejemplo, hay un producto de una función lineal con raíz en $x=0$ por una función cuadrática con raíz doble en $x=1$.

Del mismo modo, h_2 puede expresarse como $h_2(x)=-2\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$. Y, asociando de a dos los factores, también se pueden obtener varias formas de expresar h_2 como producto de una función lineal por una función cuadrática. Notemos que cada uno de estos pares de funciones tienen gráficos muy diferentes, aunque el producto dé siempre la misma función, con el mismo gráfico.

Al pedirles a los estudiantes en el ítem c) un gráfico aproximado, tendrán que utilizar, para graficar, las estrategias aprendidas en los problemas anteriores. Es decir, realizar primero los gráficos de los factores, lineal y cuadrático, y luego tener en cuenta el tipo de raíces y dónde h es positiva o negativa. El gráfico de h_3 es el más difícil de anticipar, ya que la función tiene una sola raíz simple y, por ende, no se dispone de mucha información.

Es probable que algunos aún marquen la coordenada x de los extremos en el punto medio de dos raíces consecutivas y la coordenada y arbitrariamente. En este caso será necesario retomar la cuestión de la no simetría. Podrían identificar que en los ceros dobles la función “rebota”.

El ítem d) servirá para corroborar si las anticipaciones de los estudiantes fueron correctas. Los gráficos resultantes son los siguientes:



Las principales diferencias estarán en los extremos y, principalmente, en el gráfico de h_3, que en la vista estándar de GeoGebra parece una recta. El docente podrá preguntar si esto es posible y también modificar de manera diferenciada la escala de cada eje para que en el gráfico se muestre más "curva" la función h_3.

Para hallar las coordenadas de los extremos puede utilizarse nuevamente el comando "Extremo".

Una pregunta que puede realizar el docente es: *¿qué similitudes encuentran entre los cuatro gráficos?* Algo sabido es que todas las funciones pasan por el punto (1,0).

Esta es otra oportunidad para seguir trabajando con la propiedad de que todas las funciones cúbicas tienen al menos una raíz y relacionar su comportamiento en los infinitos con el coeficiente principal. El docente puede preguntar si es posible anticipar esto desde la fórmula. ◢

En los problemas 8 al 14 hemos intentado hacer un estudio bastante sistemático de las cúbicas, presentándolas como "productos" de parábolas por rectas. Hemos estudiado cómo podían ser los ceros de este tipo de funciones y abordamos también el problema de la división de un polinomio de tercer grado por otros de primer grado, sobre la base de buscar las funciones que pudieran ser factores de una cúbica dada.

Vamos ahora a presentar tres problemas que, de manera mucho más abierta, proponen a los estudiantes explorar el comportamiento de funciones de grado mayor. La computadora va a ser una herramienta esencial en la exploración, fundamentalmente para la realización de los gráficos de las funciones.

PROBLEMA 15

Exploren qué pasa si se "multiplican" dos parábolas.

Comentarios

Este problema plantea un enunciado muy abierto. Da lugar a que los chicos se centren en diferentes aspectos o utilicen diferentes criterios para "barrer" las distintas posibilidades. También habilita a que estudien solamente algunos casos particulares. En uno de los cursos fue dado como trabajo práctico y los estudiantes debían entregar por escrito sus producciones. A continuación nos referimos a algunas de ellas.

1. Varios alumnos organizaron el estudio en función de la multiplicidad de los ceros de las dos parábolas. Son seis casos que combinan parábolas con ceros dobles, con ceros simples o sin ceros, pero ningún estudiante logró "atrapar" los seis.

Para el caso de dos parábolas con ceros dobles, un grupo de alumnos se detuvo en el signo del coeficiente principal de cada parábola, dando lugar a otros subcasos: ambos positivos, ambos negativos o con signos diferentes. Estos alumnos dieron la respuesta en términos de la ubicación del gráfico.

Para el caso de los dos coeficientes principales con el mismo signo, buscaron ejemplos y concluyeron que:

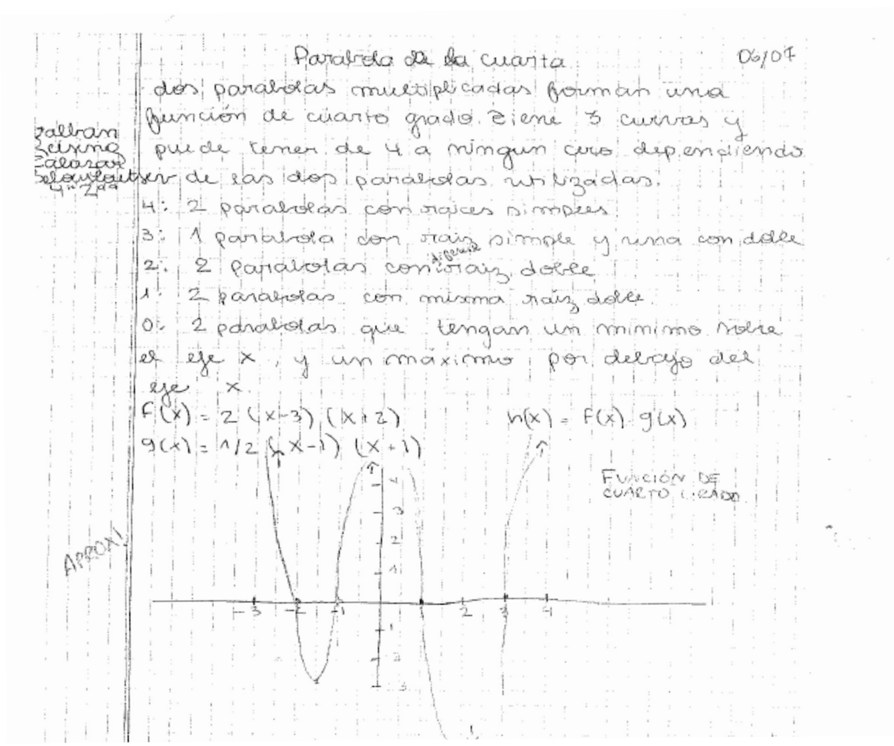
> El gráfico se encuentra en los cuadrantes 1 y 2 y los ceros son los mismos que los de las parábolas. Ambos vértices son mínimos.

Para el caso de coeficientes de distinto signo, luego de un ejemplo, escribieron:

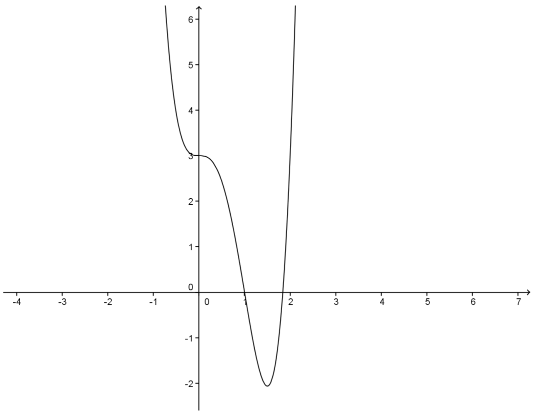
> Estas funciones cuadráticas, una con coeficiente negativo y otra positivo, al multiplicarlas, el gráfico se va a encontrar en los cuadrantes 3 y 4 y siempre su *y* va a ser negativa.

Si bien estos estudiantes se apoyaron en ejemplos para sacar sus conclusiones, es probable que hayan visto en el ejemplo por qué esa propiedad se iba a cumplir, siempre que las parábolas verificaran las condiciones de los ejemplos (la computadora podría haber sido un apoyo para producir gráficos y, eventualmente, formular la conjetura).

2. Otros alumnos organizaron la respuesta en función de la cantidad de ceros que tendría la función de grado 4 (este fue el criterio con el cual la profesora realizó una síntesis colectiva). Presentamos el escrito de un grupo que tuvo en cuenta este criterio:



Estos alumnos se refieren a “curvas” para hablar de las tres zonas de los extremos locales que tienen muchas funciones de grado 4. Sabemos que no toda función de este grado va a tener tres extremos locales, como por ejemplo x^4 o la función $3(x-2)x^3+3$:



Al considerar funciones de cuarto grado con dos o un cero, no se detuvieron a explorar diferentes posibilidades para la multiplicidad de los ceros, como hizo la profesora (ver la síntesis que presentamos más adelante).

3. Otros estudiantes no tomaron ningún criterio para el estudio y analizaron casos sueltos. Entre ellos mencionamos una parte de la respuesta de una alumna:

> Si hacemos x^4, veremos que parece una parábola con una raíz doble, pero esta no corta en un solo punto, sino que son como 3 mm. seguidos.

En “lápiz y papel” efectivamente no puede distinguirse entre la “forma” del gráfico de x^4 y la de x^2. Sin embargo, al hacer el gráfico en GeoGebra, la función x^4 se ve muy achatada cerca del (0,0) y al poner *zoom* la situación empeora, mostrando todo un segmento apoyado sobre el eje x. De algún modo, esta estudiante consideró lo que vio en la pantalla, sin ponerlo en relación con otros conocimientos que posiblemente tenía. Esto fue discutido en el espacio colectivo del aula y los alumnos pudieron fundamentar que la función solo se anula para $x = 0$. Las respuestas de la computadora –en este caso un gráfico– no son necesariamente precisas desde el punto de vista matemático. Se abre en el aula un nuevo tipo de tarea: controlar y eventualmente refutar con argumentos matemáticos esas respuestas.

En la clase se realizó la siguiente síntesis, acompañada por ejemplos de gráficos y fórmulas.

> A partir del producto de dos funciones cuadráticas se obtiene una función de grado 4 que puede tener:
>
> • **cuatro ceros distintos**, cuando las dos cuadráticas tienen raíces simples y no comunes.

• **tres ceros distintos (dos simples y uno doble**), cuando las dos cuadráticas tienen raíces simples y una de ellas es común, o cuando una tiene raíces simples, la otra doble y ninguna en común.
• **dos ceros distintos, con diferentes posibilidades:**
–**dos dobles**, cuando las dos cuadráticas tienen raíces dobles y distintas, o cuando cada cuadrática tiene dos raíces simples y estas son las mismas para ambas.
–**dos simples (únicamente)**, cuando una de las cuadráticas tiene dos raíces simples y la otra no tiene raíces.
–**uno simple y uno triple**, cuando una cuadrática tiene raíz doble y la otra dos simples, pero una de estas raíces es igual a la raíz de la otra cuadrática.
• **un cero, con diferentes posibilidades:**
–**uno doble (únicamente)**, cuando una de las cuadráticas tiene una raíz doble y la otra no tiene raíces.
–**uno cuádruple**, cuando las dos cuadráticas tienen la misma raíz doble.
• **sin ceros:**
–ninguna de las dos cuadráticas tiene raíces.

La exploración y las conclusiones del problema 15 permiten caracterizar a las funciones de grado 4 que se obtienen como "producto" de dos parábolas. Se podría plantear ahora cuáles de estos casos se pueden obtener como "producto" de dos rectas y una parábola, y cuáles como "producto" de cuatro rectas.

Por otro lado, los alumnos han caracterizado anteriormente a las funciones de grado 3, teniendo en cuenta sus ceros (problema 10). Si se "multiplica" una de estas funciones por una recta se vuelve a obtener una función de grado 4. ¿Habrá nuevos casos respecto de los obtenidos en el problema 15? ¿Se obtendrán todos los casos anteriores? ¿Es posible obtener de este modo, por ejemplo, una función de cuarto grado con un solo cero simple? Son preguntas pertinentes para continuar estudiando en el aula las funciones de grado 4.

Otra pregunta que puede hacerse a los estudiantes es si existe alguna función de grado 4 que no sea el producto de dos cuadráticas. Nosotros sabemos que la respuesta es negativa, pero la justificación requiere considerar las cuatro raíces complejas de todo polinomio de grado 4. Son asuntos que exceden totalmente lo que puede ser tratado en el aula.

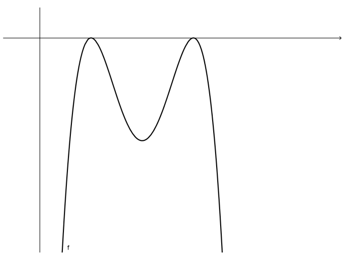
A pesar de que no puede justificarse, nosotros decidimos informar a los estudiantes que toda función de grado 4 es producto de dos cuadráticas y explicitar que se necesita más matemática para entender las razones de por qué ocurre esto. Con esta información pudimos concluir que el estudio hecho en el problema 15 permite caracterizar a todas las funciones de grado 4.

La siguiente actividad se plantea para que los alumnos reinviertan los conocimientos sobre las funciones de grado 3 y 4 que se han venido construyendo.

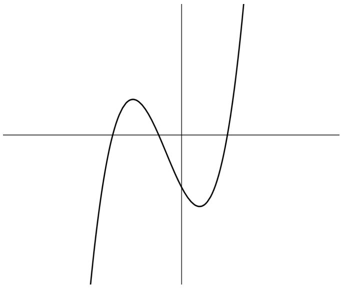
PROBLEMA 16

a) Escriban una fórmula que pueda corresponder a cada una de las funciones representadas. En cada caso, indiquen qué conocimientos han tenido en cuenta para armar la fórmula.

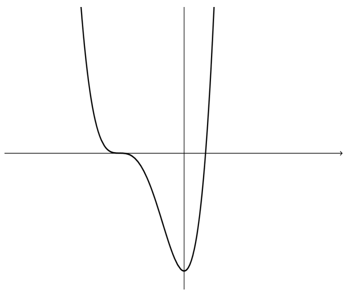
i)



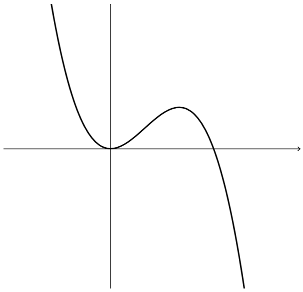
ii)



iii)



iv)



b) Consideren las funciones

$$h(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2-2x+4$$

y

$$m(x)=x^3-2x^2+4x-8$$

Sabiendo que 2 es raíz de ambas, escriban cada función como producto de otras dos funciones.

Después, si es posible, escríbanlas como producto de rectas y hagan un gráfico aproximado (sin tabla de valores). Indiquen conjuntos de positividad y de negatividad.

Comentarios

El problema fue entregado a los estudiantes para que los resolvieran de manera individual y entregaran sus respuestas por escrito. Esto nos permitió analizar *a posteriori* las producciones de los estudiantes.

En particular, pudimos acceder a las diferentes maneras en que los estudiantes justificaban las elecciones que hacían para producir las fórmulas en el punto a). Presentamos algunas respuestas:

- Un alumno propone $a(x)=(x+4)(x+1)(x-3)$ y explica:

  > Los conocimientos que tuve fueron: que tenía tres ceros (dos negativos y uno positivo) y que el coeficiente principal era positivo porque la función va desde un x e y negativos hacia un x e y positivos.

  Este alumno parece estar mirando los signos de las variables, recorriendo el gráfico de la función según una dirección creciente de x. En este curso se habían estudiado los signos de y para valores grandes (en módulo) de x, cuando se justificó que toda función cúbica tiene una raíz. En ese momento se distinguió el comportamiento del gráfico según el signo del coeficiente principal. Estas ideas parecen estar presentes en los argumentos de este estudiante.

- Este mismo alumno produce otro tipo de justificación para la función de grado 4 de la parte ii). Propone $b(x)=-(x-1)^2(x-3)^2$ y explica:

  > Tengo dos ceros dobles (los dos positivos) y sé que el coeficiente principal es negativo porque tiene un máximo (al igual que en las parábolas).

  Es un argumento novedoso en el aula y este estudiante lo formula extendiendo ideas que trabajó cuando estudiaron parábola. Ya que toda función de grado par tiene un extremo absoluto, este argumento podría generalizarse a todas esas funciones.

- Otra estudiante propone $2\cdot(x+5)^3(x-2)^2$ para la función de grado 4 de la parte iii), y explica como lo pensó:

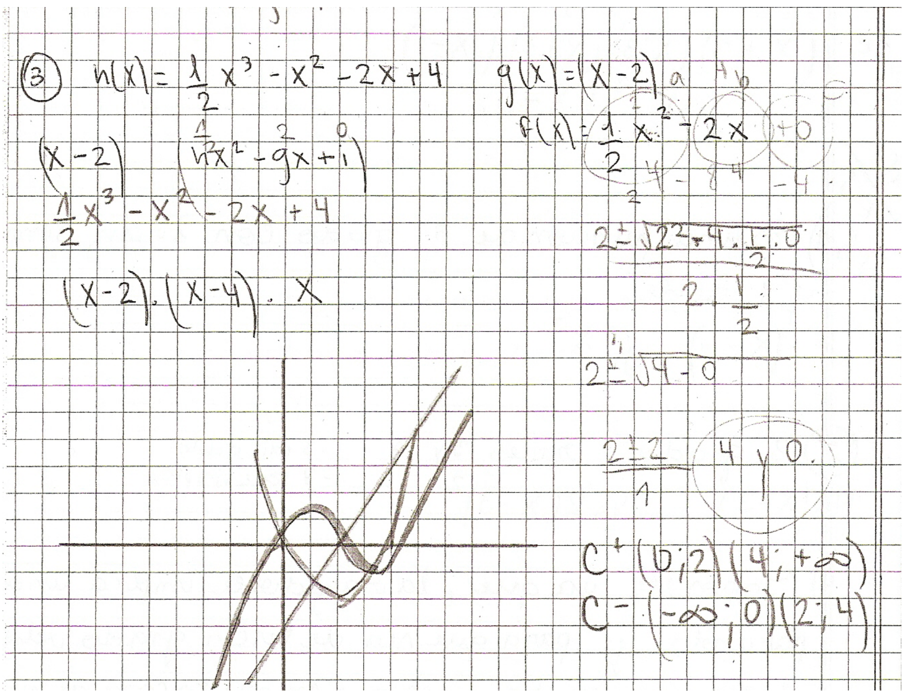
  > En este caso la función tiene cero triple y un cero simple. Quiere decir que una parábola toca al eje x en un cero (cero doble) y la otra parábola, que atraviesa al eje x, comparte uno de los ceros con la otra parábola. El coeficiente es positivo porque para valores de x mayores que 2, la y toma valores positivos.

  En todos los casos esta alumna justifica el signo del coeficiente mirando el signo de y, para valores de x mayores que la raíz mayor. Al indagar más acerca de este argumento, ella explicó que, al tomar un valor de x mayor que todas las raíces, seguro que todos los factores de grado 1 darán positivo; si el gráfico mostrara que allí la ordenada toma valores negativos, necesariamente el coeficiente principal de la función de grado 4 debe ser negativo. Todo lo trabajado en los problemas anteriores de la secuencia habilita a esta estudiante a tratar con "familiaridad" a un cero triple: lo reconoce como una "forma" en el dibujo, lo produce como fórmula y lo explica como producto de dos parábolas con ciertas condiciones.

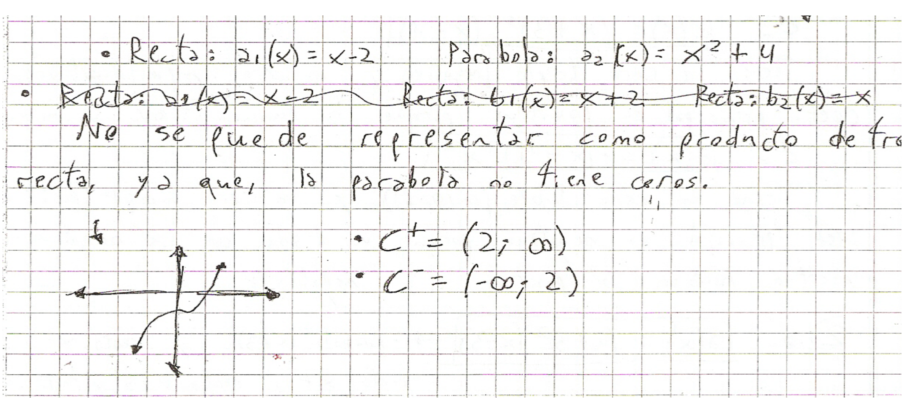
En cuanto al punto b), al analizar los problemas 13 y 14, hemos discutido estrategias para hallar el factor cuadrático estableciendo condiciones sobre sus coeficientes. Detengámonos ahora en los gráficos (confeccionados sin el auxilio de la computadora) que propusieron los estudiantes después de haber resuelto el problema de la división.

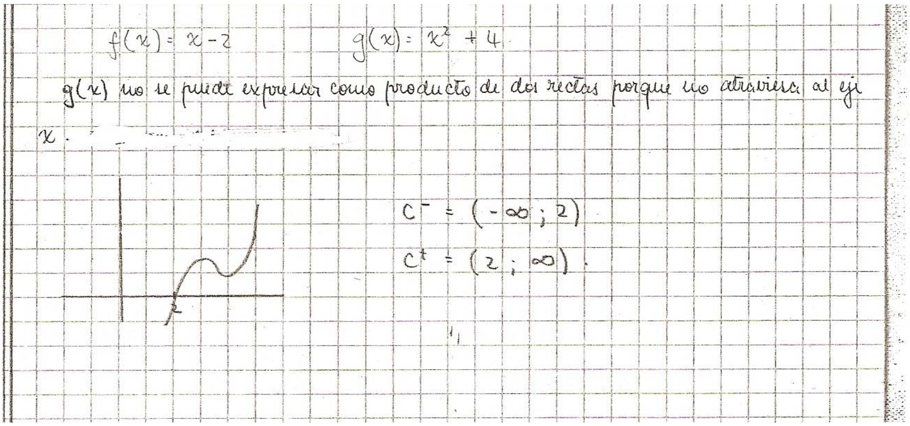
Para la función *h*, la mayoría de los estudiantes encuentra correctamente el factor cuadrático, halla los ceros, y grafica directamente una cúbica con un cero doble en $x = 2$ y un cero simple en $x = -2$. Nos interesa mostrar la producción de una estudiante que grafica primero la función lineal y la cuadrática y se apoya en eso para realizar el gráfico de la cúbica. Su trabajo nos resulta valioso, a pesar de que la estudiante se equivoca al hallar la cuadrática y obtiene un factor

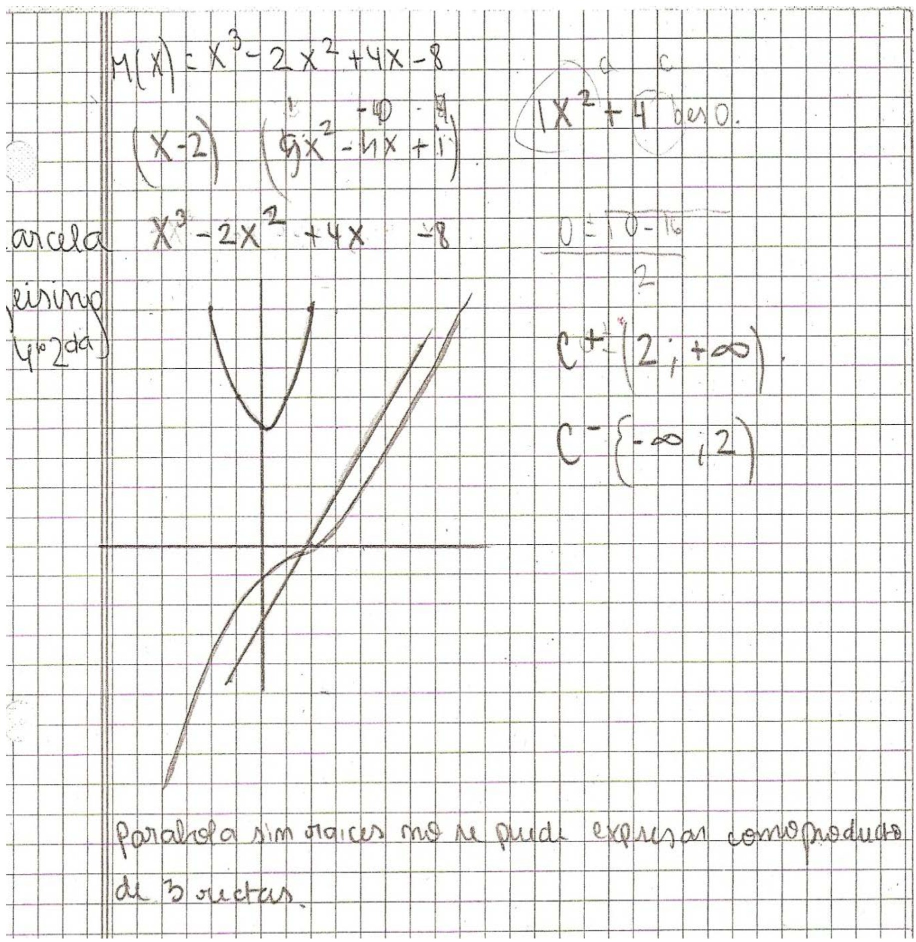
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$



En cuanto a la función *m*, mostramos la producción de tres alumnos que hallaron correctamente el factor cuadrático.







En los tres gráficos los estudiantes intentan atrapar el cambio de concavidad de la curva, sin tener elementos suficientes para decidir dónde se encuentra realmente.

Como hemos visto, los alumnos encaran sin inconvenientes el estudio de funciones de grados 3 y 4, a partir del producto de funciones de grado menor. En nuestras aulas hemos planteado también el estudio de las funciones de grado 5 y 6, para que los estudiantes lo realizaran de manera totalmente autónoma. Nos referimos a ello en el problema 17, el último que presentaremos en este documento. Tenemos la convicción de que hubieran podido encarar también el estudio de funciones de mayor grado.

Para abordar el estudio de las funciones de grado 5 y 6, vimos necesario informar en el aula que todas las funciones polinómicas pueden ser escritas como producto de rectas y/o parábolas.

Se trata nuevamente de una propiedad que los alumnos pueden comprender pero no justificar. Si bien valoramos las justificaciones como asunto fundamental en la clase (ya que apuntamos a que los chicos construyan un sentido de lo que se está enseñando), pensamos también que presentar esta propiedad, postergando su justificación, permite avanzar en el estudio de las funciones polinómicas.

El problema 17 se presentó como un trabajo práctico grupal para realizar en el aula con la computadora. Los alumnos debían producir un escrito en un archivo Word e insertar allí los gráficos producidos con GeoGebra. La profesora cargó en un *pendrive* los diferentes archivos producidos por los grupos.

PROBLEMA 17

Respondan las siguientes preguntas en un archivo Word:
a) Estudien todas las posibilidades para que una función de 5º grado tenga una sola raíz. Para cada caso, grafiquen con GeoGebra las rectas y las parábolas que consideraron y también la función de grado 5.

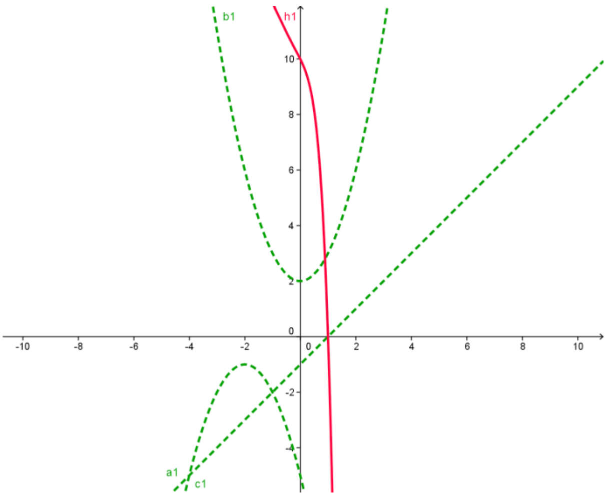
Para cada una de las posibilidades, peguen el gráfico que previamente copiaron de GeoGebra (en "Edita", "Copia la vista gráfica…"). Hagan lo mismo para los ejemplos del ítem b). En todos los casos, previo al gráfico correspondiente, escriban las fórmulas con las que trabajaron.
b) ¿Es posible que una función de grado 5 no corte ni toque al eje x? ¿Y una de grado 6? Si es posible, muestren un ejemplo con GeoGebra. Si no es posible, expliquen por qué.

Comentarios

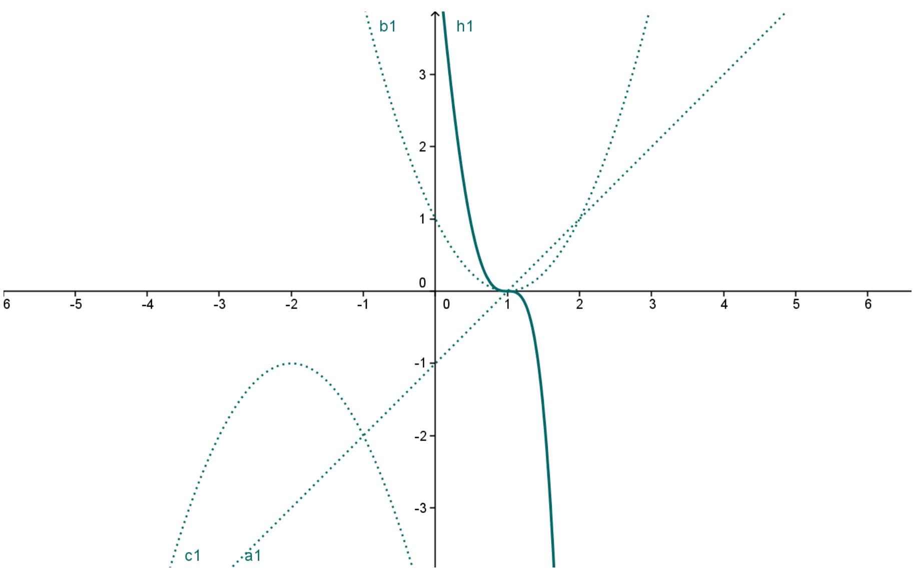
Un comentario para hacer acerca del desarrollo de este problema en el aula es que a los chicos les resultaba trabajoso "copiar" la fórmula y protestaron. Finalmente, se negoció que no lo hicieran y eso nos dificultó un poco la interpretación de su trabajo. Ahora nos damos cuenta de que hubiera sido más útil que "capturaran" la pantalla en vez de copiar el gráfico, pues de ese modo la fórmula estaba presente en el gráfico de la pantalla "capturada".[9]

9. En la nueva versión del programa se puede "arrastrar" la fórmula desde la vista algebraica hasta la vista gráfica, logrando fácilmente que quede la fórmula sobre el gráfico.

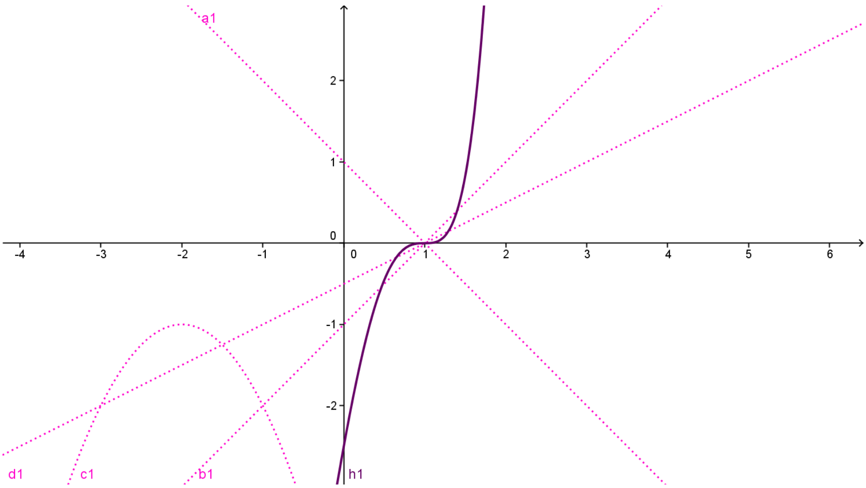
Presentamos la producción de una pareja de estudiantes sobre el ítem a), similar a la producida por muchos alumnos:



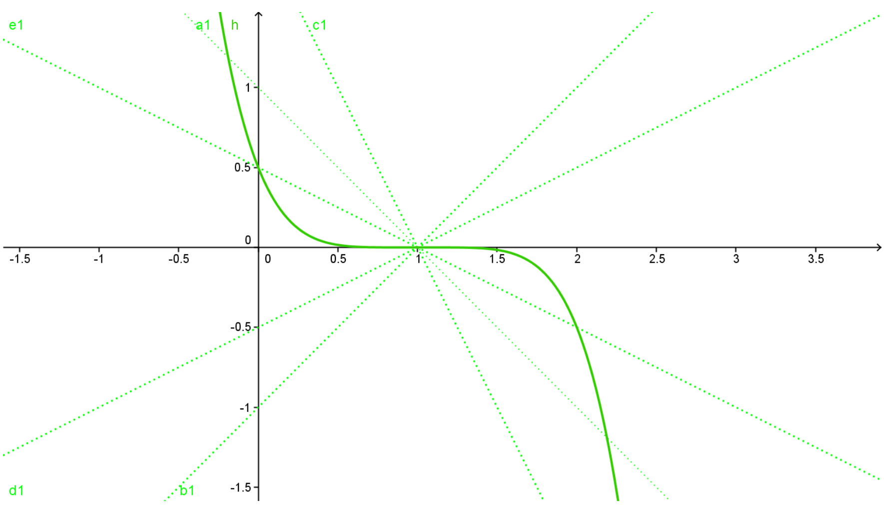
Producto de dos parábolas y una recta:
un cero simple



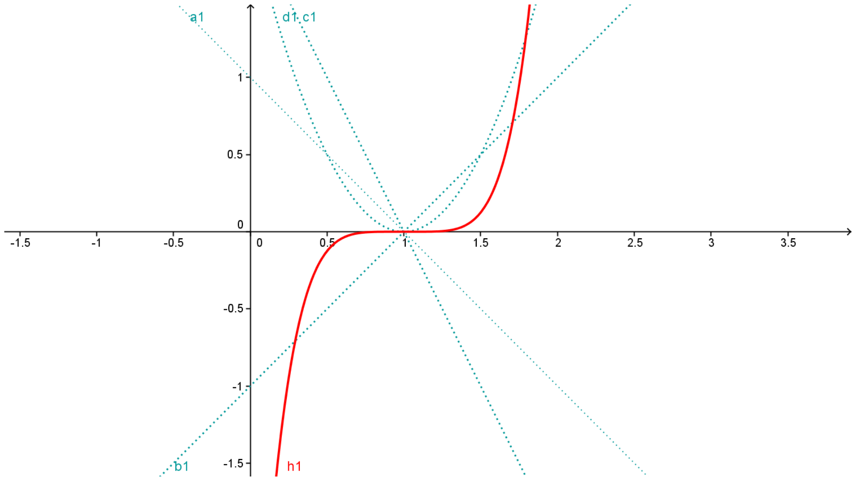
Producto de dos parábolas y una recta:
un cero triple (vértice de parábola y cero de recta en común)



Producto de una parábola y tres rectas:
un cero triple (tres rectas con cero en común)



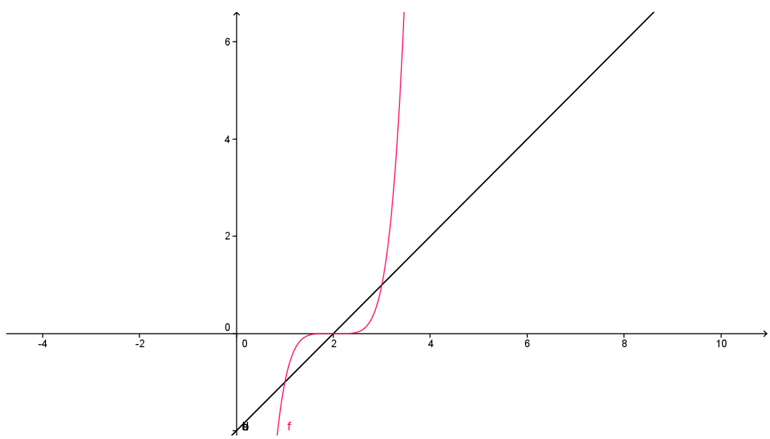
Producto de cinco rectas:
cero "quíntuple" (las cinco rectas con cero en común)



Producto de 3 rectas y una parábola:
cero ‘’quíntuple” (todos los ceros en común)

Este alumno agrega a este ejemplo la siguiente leyenda: *También puede ser cero quíntuple, como producto de dos parábolas y una recta.*

Para este mismo ítem, al considerar la función de quinto grado como producto de cinco rectas, una pareja de estudiantes considera cinco rectas iguales para ejemplificar, dando lugar a un gráfico que nos llamó la atención:



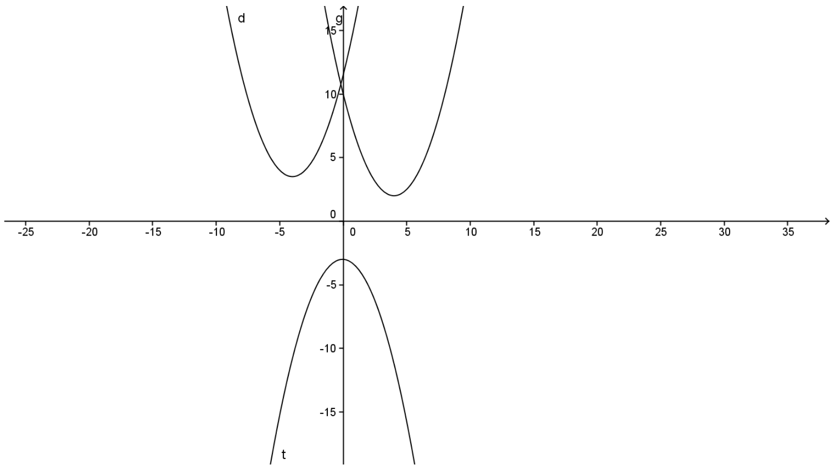
Producto de 5 rectas con la misma raíz

Respecto al ítem b), en cuanto a la función de quinto grado, dos alumnas dan esta explicación:

> No es posible que una función de quinto grado no toque ni corte el eje x, ya que siempre va a estar compuesta por lo menos por una recta, y esta siempre tendrá una raíz. Si usáramos una recta que no tenga raíz, por ejemplo $y=-2$, entonces formaríamos una función de cuarto grado.

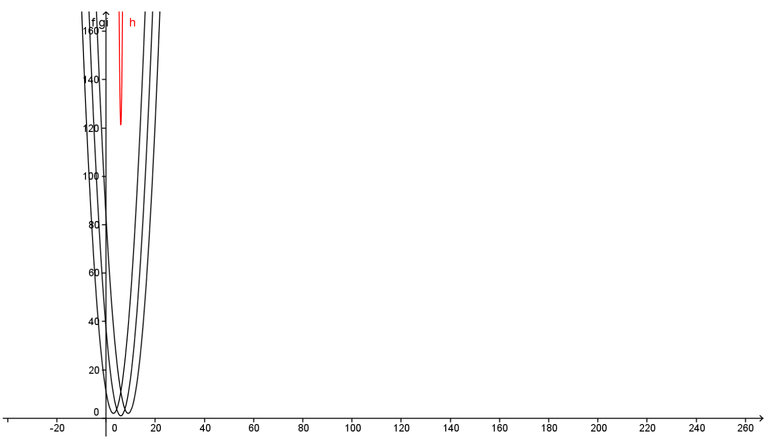
Para la función de sexto grado, si bien no tuvieron problema en responder que podía no tener ceros y así presentar ejemplos de esta situación, no siempre lograron una pantalla en la cual pudieran visualizarse simultáneamente las parábolas factores y la resultante función de sexto grado. Por ejemplo, una pareja de estudiantes explica:

> Una función de sexto grado puede no atravesar porque en ella entran tres parábolas, las cuales no necesariamente deben tener un cero. He aquí el ejemplo:

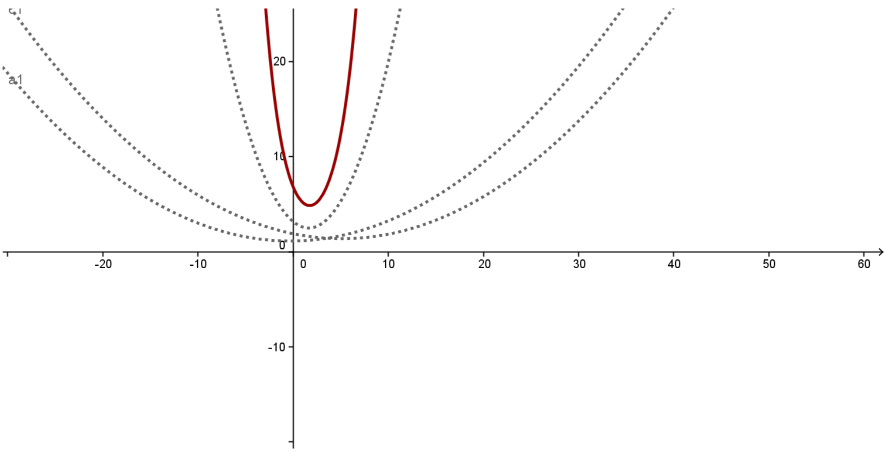


> La función de sexto grado tiene valores de y tan negativos que no se ve a simple vista.

Otros lograban hacer el suficiente zoom como para ver la función de grado 6:



También hubo alumnos que explicaron que fueron modificando los coeficientes de las parábolas para que resultaran más "achatadas" y así lograron ver la función de grado 6 en la pantalla (con un poco de *zoom*):



Los comentarios de estos alumnos nos permiten identificar una nueva tarea propia del trabajo mediado por la computadora: lograr que el gráfico de la función producto se vea en la pantalla, al mismo tiempo que los factores. En la primera de las producciones esto no se logra. La segunda producción presentada apela a una herramienta del programa: el *zoom*; mientras que en el tercer caso los estudiantes se apoyan en el conocimiento matemático, y también en el *zoom*, para producir fórmulas de parábolas cuyo producto se pueda ver en la pantalla.

ASUNTOS PENDIENTES EN TORNO DEL TRABAJO CON LA COMPUTADORA

Con este último problema concluimos la presentación de esta propuesta de enseñanza de las funciones polinómicas. Como señalábamos al comienzo, la secuencia está organizada en torno al producto de funciones y hemos incluido un trabajo sostenido con los gráficos cartesianos, dado que los entendemos como medio fértil para que los alumnos produzcan relaciones sobre las funciones polinómicas. Pensamos que estas dos ideas permiten diseñar otros problemas en torno a las funciones polinómicas. De hecho, las profesoras de nuestro grupo irán modificando y ampliando esta propuesta en las sucesivas puestas en sus aulas.

La incorporación de la computadora como medio de trabajo permitió ampliar y enriquecer el espacio de producción matemática de los estudiantes hacia zonas impensables en la enseñanza anterior de "lapiz y papel". Esperamos que este documento permita vislumbrar ese enriquecimiento.

Para muchos de nosotros fue la primera vez que trabajamos con computadoras en el aula. En nuestras reuniones discutimos sobre distintas cuestiones transversales que se fueron identificando a partir del trabajo en la clase. Presentamos algunas de ellas como modo de compartir las preguntas que nos quedan pendientes.

Repensar “la carpeta” en el trabajo con computadoras

Cuando en las clases utilizamos el pizarrón, solemos decirles a los estudiantes que copien las resoluciones de sus compañeros porque es importante que les quede registro de distintas maneras de resolver un problema. ¿Cómo podríamos hacer ahora para conservar la resolución de un compañero que trabajó en su computadora? Una posibilidad sería dar un tiempo a todos para que la reproduzcan en un archivo GeoGebra y luego la guarden en su *netbook*, aunque eso puede insumir mucho tiempo en la clase. Otra variante sería guardar los archivos GeoGebra de cada problema en una carpeta accesible a todos. Es un asunto en el que seguimos indagando y requiere pensar en cosas muy nuevas para la clase.

Por otra parte, en el trabajo personal de cada estudiante muchas veces se modifica un archivo .ggb con alguna acción y puede ser necesario guardar el archivo primitivo y el modificado. Por esta razón, decidimos enseñar explícitamente a los alumnos el uso de la instrucción “guardar como”, como se muestra en el enunciado del problema 9.

El trabajo de los alumnos va modificando constantemente lo que es visible en la ventana algebraica y en la vista gráfica, y no queda una traza del trabajo. Esto dificulta el acceso del docente a los procesos de resolución de los alumnos, situación que complejiza la tarea de gestionar los espacios colectivos. Frente a esta complejidad, los profesores vieron muy necesario incluir en la secuencia momentos de sistematización, como el que se plantea en el problema 6 o como la realización del cuadro de síntesis al finalizar el problema 9.

Una pregunta que reiteradamente nos hacemos es: *¿Cómo va a aprovechar/utilizar el alumno los archivos GeoGebra (con trabajo propio o de sus compañeros) para organizar su estudio? Los alumnos ¿van a seguir tomando apuntes? En caso de que así sea, ¿sobre qué tomarán notas?* Es necesario seguir pensando, probando y analizando colectivamente modos de estudio con las computadoras.

Los distintos registros de representación de los objetos matemáticos en la pantalla

En nuestro trabajo con funciones anterior a la incorporación de las computadoras en el aula, siempre hemos intentado incluir una variedad de representaciones de los objetos matemáticos en el trabajo de los alumnos con la convicción de que dicha variedad contribuye a una mejor comprensión de los conceptos.

Ahora bien, la computadora es una herramienta de trabajo que explota la multiplicidad de registros de representación y las funciones conforman una zona matemática privilegiada para este trabajo. La actividad en el aula con múltiples representaciones en un entorno computarizado nos ha enfrentado con nuevos fenómenos. En el entorno informático la conversión entre registros es automática –sin demasiado costo para los alumnos– y la realiza el *soft* sin mucho valor para el aprendizaje. ¿Cómo aprovechar desde la enseñanza la inmediatez de las respuestas que da un programa para potenciar los aprendizajes de los alumnos? Hay una complejidad nueva en la tarea de coordinación entre registros que plantea la necesidad de que los estudiantes lean *de manera crítica* la información que provee la pantalla.

Nos proponemos seguir explorando el potencial didáctico de las representaciones producidas por la computadora –a partir del uso de programas de geometría dinámica–, lo cual incluye las manipulaciones que pueden hacerse con ellas.

Exploración vs. anticipación en el trabajo con GeoGebra

En el trabajo con lápiz y papel hemos privilegiado siempre la actividad de anticipación de los estudiantes como una parte importante del trabajo matemático en el aula. El uso de las computadoras viene a modificar ese estado de cosas. Pensamos que una explicación puede estar en que "explorar" con GeoGebra tiene un "bajo costo". Por ejemplo, en una clase se preguntó a los alumnos: *¿Pueden encontrar un valor de "a" para que la función* $f(x) = a \cdot (x-3) \cdot (x-7) + 4$ *tenga como raíces 3 y 7?*

El objetivo era que ellos pudieran "leer" de la fórmula que en esos puntos f valdría 4 para cualquier valor del parámetro a. Sin embargo, con las computadoras sobre la mesa, casi todos los chicos se pusieron a probar con números buscando una respuesta. Recién cuando no podían encontrarla, algunos empezaron a pensar una explicación de por qué ocurría eso. Para los chicos fue un aprendizaje: *no siempre te conviene largarte a probar con la compu*.

Es decir que, al disponer de un *software*, lo primero que hacen los estudiantes es explorar. Esto no lo vemos como una desventaja sino como un cambio en la forma de trabajar. Nosotros estábamos acostumbrados a decirles a los alumnos "pensá antes de actuar". Es que con lápiz y papel es más económico "pensar" para organizar el trabajo. Con GeoGebra la producción de muchos ejemplos es "económica" y esto permite el planteo de conjeturas: la pregunta a instalar ahora es *¿por qué pasa eso que ves?*

Este documento llega a su fin, pero no nuestro trabajo en el Grupo de los lunes. Actualmente estamos encarando el problema de la transformación de una propuesta de enseñanza –en particular la propuesta de enseñanza de función cuadrática– a partir de la inclusión de las computadoras en el trabajo del aula. Las preguntas anteriores tendrán un espacio para desplegarse y al mismo tiempo surgirán otras nuevas.

Esperamos que este documento aporte para el trabajo de todos los docentes que intentan hacer vivir en el aula un trabajo matemático potente mediado por programas de cálculo y geometría dinámica.

Anexo

COMPLEMENTO A LOS COMENTARIOS DEL PROBLEMA 12

Es posible también hacer una demostración más rigurosa, por ejemplo, considerando un polinomio cualquiera de grado 3, es decir, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$.

Si $a>0$, podemos sacar el factor común x^3. Entonces,

$$P(x)=x^3\cdot\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right).$$

Cuando x tiende a más infinito, las expresiones

$$\frac{b}{x},\ \frac{c}{x^2} \text{ y } \frac{d}{x^3}$$

tienden a cero. Entonces, todo el valor de $P(x)$ queda dominado por el valor de $x^3\cdot a$ que tiende a más infinito, resultando $P(x)$ positivo para valores grandes de x.

Cuando x tiende a menos infinito, las expresiones anteriores también tienden a cero. Entonces, $P(x)$ resulta negativa pues $x^3\cdot a$ tiende a menos infinito. Por lo tanto, como P es continua, la función atraviesa el eje x por lo menos una vez. O lo que es lo mismo, P tiene al menos una raíz.

Si $a<0$, el razonamiento es el mismo. La diferencia estará en que cuando x tienda a más infinito, P tenderá a menos infinito y viceversa. La conclusión es la misma: P tiene al menos una raíz.

Sobre los autores

MARINA ANDRÉS es profesora en Matemática recibida en el Instituto de Enseñanza Secundaria Nº1 Alicia Moreau de Justo. Da clases en primero, tercero, cuarto y quinto año en la Escuela Normal Nº1 de la Ciudad de Buenos Aires. Integra el Grupo de los lunes desde sus inicios.

SILVIA S. COLACELLI es profesora en Matemática. Su último trabajo como docente fue en la Escuela Secundaria Nº22 de Lanús, donde se jubiló a fines de 2014. Tuvo una participación breve en el Grupo de los lunes.

MARÍA TERESA CORONEL es profesora de Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente Nº34 Profesor Héctor J. Médici y enseña en la Escuela de Educación Secundaria Nº20 Estados Unidos de América. Integra el Grupo de los lunes desde sus inicios.

ENRIQUE DI RICO es profesor de Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA) y docente de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la UNIPE. También enseña en el Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA e integra el equipo de investigación en didáctica de la matemática para el nivel secundario de la UNIPE.

GEMA FIORITI es magíster en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Se desempeña como profesora titular de didáctica de la matemática en la Especialización y Maestría en Enseñanza de las Ciencias (orientación matemática) de la Unsam, y como directora del Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) de esa misma universidad. Integra el Grupo de los lunes desde sus inicios.

PATRICIA GARCÍA es profesora en Matemática egresada del Instituto Superior de Formación Docente Nº41. Se desempeña como profesora e investigadora en la Universidad Pedagógica de la Provincia de Buenos Aires (UNIPE) y en el ISFD Nº41. Es integrante del Equipo Central del Área Matemática de la Dirección de Educación Primaria de la Provincia de Buenos Aires y coautora de artículos de investigación y de difusión dirigidos a docentes en el área de didáctica de la matemática.

ERICA GUZMÁN YAÑEZ es profesora de Matemática y licenciada en Enseñanza de las Ciencias con orientación en didáctica de la matemática (Unsam). Actualmente trabaja en los niveles medio y terciario de la Escuela Normal Nº8 y en el Profesorado de Matemática Joaquín V. González (CABA). Es profesora en la Facultad Regional Buenos Aires de la UTN y en la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

CLAUDIA KERLAKIAN es profesora de Matemática y Cosmografía, licenciada en Educación con orientación en didáctica de la matemática y en diseño, coordinación y evaluación de proyectos. Se especializó en enseñanza de la matemática para el nivel primario, es docente en el Instituto Etcheverry Boneo y en el Profesorado Poveda, además de ser asesora en el Colegio Arrayanes. Integra el Grupo de los lunes desde sus inicios.

CECILIA B. LAMELA es profesora en Enseñanza de la Matemática por la UBA, miembro del equipo de didáctica de la matemática de la UNIPE y docente en escuelas secundarias de la Ciudad de Buenos Aires. Ha trabajado en formación de profesores y maestros en el marco de la Escuela de Capacitación del Centro de Pedagogías de Anticipación de la CABA, y en el Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias de la UBA. Es coautora documentos curriculares y libros de texto de enseñanza de la matemática.

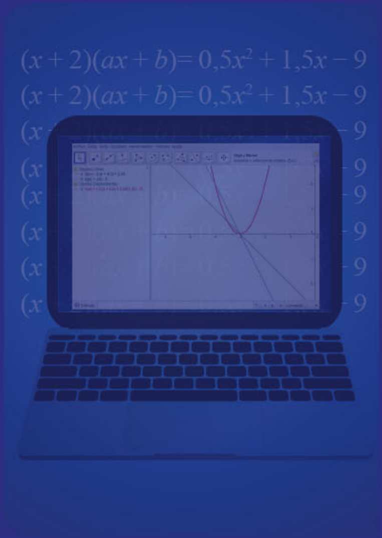
FABIANA NOEMÍ MARCOVICH es profesora de Matemática y Cosmografía por la Escuela Normal Superior del Profesorado Nº1 Roque Sáenz Peña, y profesora de Computación por el Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González. Actualmente trabaja como profesora de matemática en la Escuela Cangallo y en el Normal Nº8 Julio A. Roca, ambos de Ciudad de Buenos Aires. Es delegada zonal de la Olimpiada Matemática y fue integrante del Grupo de los lunes.

RODOLFO MURÚA es profesor de Matemática por la UBA. Trabaja como docente de la Licenciatura en Enseñanza de Matemática para la Educación Primaria en la UNIPE y como docente-investigador en la Universidad Nacional de General Sarmiento. Allí elaboró, junto a profesores de distintas escuelas secundarias, un proyecto para incorporar el programa GeoGebra a la enseñanza de la matemática.

MARÍA FLORENCIA RUDA BART es profesora de Matemática. Trabaja desde 1995 como profesora, tutora y jefa del departamento de ciencias exactas del Colegio de las Victorias (CABA), donde también desempeñó tareas directivas. Es jefa de trabajos prácticos en la materia Matemática I de la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la UBA. También se desempeña como profesora de tercero, cuarto y quinto año en el Colegio Padre Luis María Etcheverry Boneo (CABA).

DÉBORA SANGUINETTI trabaja como docente de matemática de primer y segundo año en el Colegio Secundario Scholem Aleijem. Es autora y tutora del módulo "Enseñar matemática con TIC" de la especialización docente en educación primaria y TIC del Instituto Nacional de Formación Docente.

CARMEN SESSA es coordinadora de la Carrera de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria de la UNIPE, y docente en la carrera del Profesorado en Matemática y Exactas de la Universidad de Buenos Aires. Integra el Grupo de los lunes desde sus inicios.



unipe: editorial universitaria

9 789873 805073