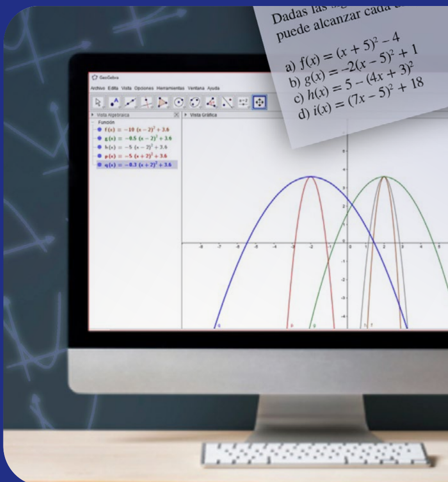


LA INCORPORACIÓN DE LA COMPUTADORA A LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Carmen Sessa y Gema Fioriti (coordinadoras)

unipe EDITORIAL UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas

La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas

Carmen Sessa y Gema Fioriti (coordinadoras)

Marina Andrés
Valeria Borsani
Eduardo Cirigliano
María Teresa Coronel
Betina Duarte
Claudia Kerlakian
Juan Pablo Luna
Débora Sanguinetti

unipe
EDITORIAL
UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas / Carmen Sessa ... [et al.] ; coordinación general de Carmen Sessa ; Gema Inés Fioriti. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria, 2021.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-59-2

1. Matemática. 2. Docentes de Escuela Secundaria. 3. Aplicaciones Informáticas. I. Sessa, Carmen, coord. II. Fioriti, Gema Inés, coord.
CDD 510.712

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Adrián Cannellotto
Rector

Carlos G.A. Rodríguez
Vicerrector

UNIPE: EDITORIAL UNIVERSITARIA

Directora editorial
María Teresa D'Meza

Edición y corrección
Juan Manuel Bordón

Diagramación
Diana Cricelli

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, abril de 2021

ISBN 978-987-3805-59-2

Índice

SECCIÓN 1. Introducción ... 9

Organización del documento ... 10

SECCIÓN 2. Estudio de la variación de áreas a través de un modelo dinámico ... 13

Primera etapa: entrada a la situación ... 13
Segunda etapa: construcción de los rectángulos dinámicos en GeoGebra ... 15
Tercera etapa: características del modelo desarrollado en GeoGebra y estudio de algunas magnitudes de los rectángulos ... 17
Cuarta etapa: identificación de una función como herramienta de estudio de la variación del área ... 18
Quinta etapa: elección de gráficos compatibles con la función en estudio ... 20
Sexta etapa: la producción de un gráfico ... 22

SECCIÓN 3. Estudio de familias de funciones con GeoGebra: trabajo a partir de la expresión canónica de la fórmula ... 25

Los problemas ... 25
Acerca del Problema 4 ... 26
Acerca del Problema 5 ... 35
Acerca del Problema 6 ... 43

REFLEXIONES FINALES. Potencia y limitaciones del trabajo con funciones en el entorno GeoGebra ... 47

ANEXO. Enunciados de los problemas ... 49

SOBRE LAS AUTORAS Y LOS AUTORES ... 55

SECCIÓN 1

Introducción

En este libro presentamos actividades que incorporan el uso del programa GeoGebra al estudio de la función cuadrática en el aula del secundario. Estas actividades fueron elaboradas por el Grupo de los Lunes –un colectivo conformado por docentes de escuela secundaria y de universidad– con el objetivo de transformar una propuesta de enseñanza pensada para un contexto de lápiz y papel y publicada en el documento *Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*.[1]

El Grupo de los Lunes trabaja desde hace varios años pensando la enseñanza de la matemática, diseñando propuestas y analizándolas en su funcionamiento. A medida que se elaboran las actividades, los docentes del grupo las implementan en sus aulas. La reflexión colectiva en torno a lo sucedido enriquece nuestro conocimiento acerca de la enseñanza de la matemática y permite ajustar las propuestas iniciales.

Los integrantes del Grupo compartimos algunos principios en relación con el trabajo matemático en el aula. Nuestro propósito es involucrar a los estudiantes de la escuela secundaria en una verdadera actividad de producción de conocimiento. Para ello será necesario proponer problemas desafiantes a los alumnos y crear un ambiente en la clase que los aliente a ensayar, a producir diferentes soluciones y a aportar ideas. Estos ensayos, resoluciones e ideas son la materia prima a partir de la cual el docente organiza las interacciones en la clase. El espacio colectivo de discusión es propicio para estudiar la validez de razonamientos y procedimientos, avanzar en la precisión, plantear nuevos problemas, elaborar conjeturas y estudiarlas.

La irrupción de las computadoras en las aulas de las escuelas públicas, gracias al programa Conectar Igualdad, llevó a que desde 2010 el Grupo estudiara cómo incorporarlas en las propuestas que elaborábamos. De esa

1. El documento fue elaborado en 2009 y lo publicó en 2014 el Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. En adelante nos referiremos a este texto como “documento original”. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/images/phocadownload/colecciones/herramientas/cuadraticas/matematica_funcion_cuadratica.pdf>.

época es una propuesta de trabajo que recoge ese desafío: *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula*, un libro publicado en 2015 dentro de la colección *Herramientas* de UNIPE: Editorial Universitaria.

Desde nuestra perspectiva, la confluencia de miradas y enfoques, así como la diversidad de experiencias que caracteriza a la conformación del Grupo, generan buenas condiciones para pensar una integración real y apropiada de las TIC en la enseñanza de la matemática.

A partir del año 2013, en el Grupo surgió el interés en enriquecer la propuesta de enseñanza de función cuadrática del documento original[2] con la incorporación de la computadora y estudiar las transformaciones que se producirían tanto en el tipo de tareas como en las técnicas que empiezan a desplegar los estudiantes o en la complejidad del trabajo docente.

Este libro pretende plasmar dichas transformaciones. Creemos que puede resultar de interés para un docente que intenta afrontar los grandes cambios que implica la incorporación de las TIC en el aula.

ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Durante los años 2012 y 2013, el Grupo diseñó e implementó una actividad para el estudio de la variación de una familia de figuras.[3] La incorporación de la computadora permitió diseñar un modelo dinámico de esta familia y ofrecerla a los estudiantes para estudiar la variación del área. En la Sección 2 de este libro, *Estudio de la variación de áreas a través de un modelo dinámico*, se presenta esta actividad en detalle.

A lo largo de los dos años posteriores, el Grupo avanzó en el diseño de actividades para desarrollar con GeoGeobra apuntando centralmente a la lectura de información en la expresión canónica de fórmulas de funciones cuadráticas y la relación de esta información con la que aportan los gráficos cartesianos de las funciones. Por ejemplo, en la fórmula $f(x) = (x - 3)^2 - 7$ puede leerse que "para todo valor de x, la función f toma valores mayores o iguales a -7, es decir que -7 es el valor mínimo de la función y que dicho mínimo se alcanza en $x = 3$"; "que los valores de x que están a la misma distancia del 3, tienen la misma imagen por f".[4] En la Sección 3, *Estudio de familias de funciones con GeoGebra: trabajo a partir de la expresión canónica de la fórmula,* se presentan las actividades en detalle.

2. Muchos de los integrantes del Grupo de los Lunes habían participado en la elaboración del documento original.

3. En el capítulo 2 del documento original, el Problema 1 presenta la misma variación para ser estudiada en un contexto de "lápiz y papel".

4. Para profundizar, invitamos a leer el documento original, disponible para descarga en el link ya mencionado.

En el Grupo de los Lunes, el análisis de las distintas actividades se va realizando a medida que las diseñamos y muchas veces nos quedan interrogantes importantes acerca de cómo resolverán los estudiantes y de cuán fértiles pueden ser alguno de los problemas que planeamos. La puesta en aula de la secuencia por parte de varios de los profesores y profesoras del grupo retroalimenta la instancia inicial de diseño al acceder a los hechos de las clases y estudiarlos teniendo como marco el análisis previo. Incorporamos aquí parte de ese estudio posterior en torno a lo trabajado por los alumnos en los cursos donde se implementó. También intentaremos reflejar algunas discusiones del Grupo que llevaron a tomar las decisiones que se plasman en este nuevo producto.

Diferentes subgrupos del Grupo del Lunes escribieron un texto sobre cada una de las actividades diseñadas. Estos documentos se han incorporado en el libro respetando los respectivos estilos con que fueron escritos. Vale aclarar que los enunciados de algunos problemas trabajados en este libro incluyen precios que han quedado muy desactualizados respecto a los posibles valores actuales. No obstante, se decidió mantenerlos tal como figuraban en los enunciados originales.

SECCIÓN 2

Estudio de la variación de áreas a través de un modelo dinámico

En el capítulo 2 del documento original, se presentan varias situaciones geométricas que permiten definir funciones cuadráticas al considerar la dependencia entre la variación de la longitud de algún segmento y la del área de alguna figura. Nuestro grupo se propuso rediseñar el Problema 1 (página 30), formulando un conjunto de tareas con la intención de aprovechar la potencialidad de los modelos dinámicos construidos con la computadora.

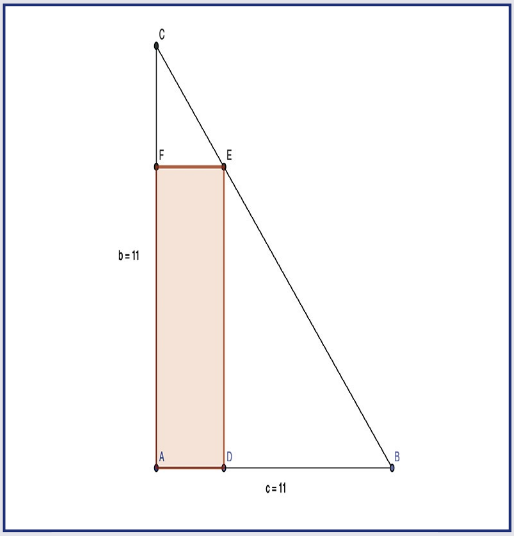
En este problema se busca analizar la variación del área de ciertos rectángulos inscriptos en un triángulo isósceles rectángulo. Una vez estudiada la situación geométrica, se define una relación funcional entre la longitud de un segmento y el área del rectángulo; se estudia numéricamente esta relación y finalmente se presentan gráficos cartesianos para que el estudiante decida si pueden o no representar la relación. Con esta última tarea se espera que los estudiantes puedan diferenciar relaciones de crecimiento lineal de aquellas de crecimiento no lineal e identificar algunas características numéricas y gráficas de la función que están estudiando que serán propias de la clase de todas las funciones cuadráticas (ejes de simetría, existencia de una semirrecta de crecimiento y de decrecimiento, extremos, etc.).

Este esquema y estos objetivos están presentes en el diseño original del problema para ser resuelto en "lápiz y papel" y se conservan en el rediseño que realizamos para trabajar con GeoGebra. En esta nueva versión, el problema se organizó en seis etapas. Para cada etapa, presentamos a continuación los enunciados de las tareas para los estudiantes, los objetivos de la misma y comentarios.

PRIMERA ETAPA: ENTRADA A LA SITUACIÓN

Se entrega a los alumnos una hoja con el siguiente enunciado:

> En un triángulo rectángulo isósceles de lado 11, inscribimos rectángulos como los de la siguiente imagen. Vamos a estudiar esos rectángulos.



- ¿Qué valores puede tomar la base? ¿Cuántos rectángulos hay? ¿Dónde tenemos que ubicar los vértices de estos rectángulos?

Comentarios

La situación a estudiar es relatada oralmente por el docente mientras dibuja un triángulo y distintos rectángulos posibles. Se formulan unas primeras preguntas para ir precisando cuál es la familia infinita de rectángulos que será objeto de estudio:

> ¿Qué valores puede tomar la base? ¿Cuántos rectángulos hay? ¿Dónde tenemos que ubicar los vértices de estos rectángulos?

Una alternativa a esta entrada al problema es proponerles a los estudiantes dibujar un nuevo rectángulo de esta familia con el objetivo de discutir y definir algunas características: por ejemplo, que la base siempre se encuentra sobre la respectiva base del triángulo, que un vértice está sobre la hipotenusa, o que un vértice coincide con el vértice del triángulo donde se unen los catetos, entre otras. En este momento exploratorio es posible que emerjan otras propiedades relativas a la familia de rectángulos. Proponemos tomar en consideración aquellas que aporten a la construcción dinámica que será el objetivo de la siguiente actividad.

Finalizada esta primera etapa de entrada a la situación (estática), representada en papel, el docente anuncia: “Vamos a estudiar algunas nuevas características de esos rectángulos con GeoGebra”.

SEGUNDA ETAPA: CONSTRUCCIÓN DE LOS RECTÁNGULOS DINÁMICOS EN GEOGEBRA

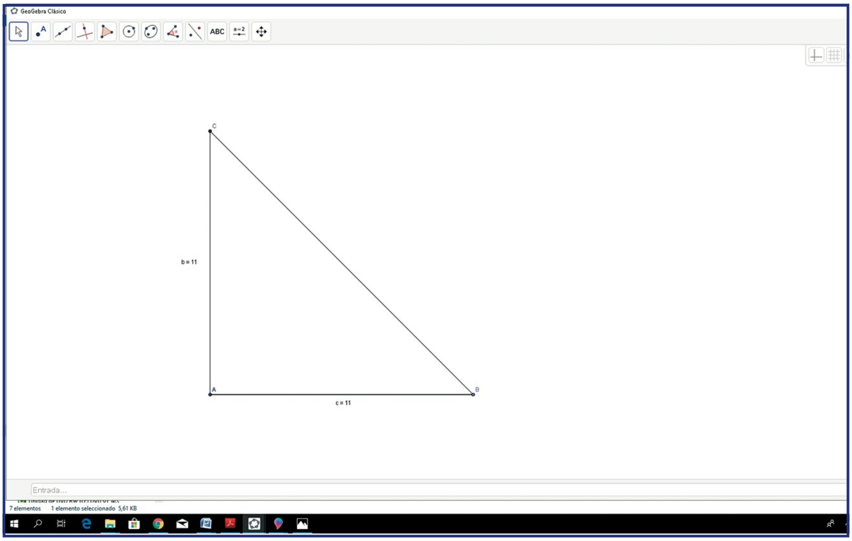
A continuación, se provee un archivo GeoGebra y se enuncia:

> En el archivo hay un triángulo rectángulo isósceles de lado 11, como el que veíamos recién. Construyan un rectángulo dinámico con las mismas características de los rectángulos dibujados en el pizarrón.

Comentarios

Al abrir el archivo GeoGebra, los estudiantes se encontrarán con la siguiente imagen.

1



Como muestra la imagen 1, en la pantalla se ve el triángulo rectángulo junto con las medidas de los catetos. El archivo ha sido preparado de forma tal que el triángulo está fijo y por lo tanto los alumnos no podrán moverlo ni cambiar sus medidas o su aspecto. Se les propone entonces construir un rectángulo dinámico con las mismas características de los rectángulos dibujados en el pizarrón. En la medida que la construcción requiere poner en juego relaciones y conocimientos geométricos, la producción de la figura dinámica es, desde nuestra perspectiva, un modo de apropiarse del problema.

La participación del docente en esta construcción dependerá de las experiencias previas de los alumnos en el uso de GeoGebra. Podrá dejar a sus alumnos en total libertad para tomar decisiones sobre la construcción o sostener una mediación que permita que todos lleguen a construir una figura dinámica con idénticas características. Una de estas alternativas es pedirles a los estudiantes la construcción de un rectángulo con un punto libre D sobre el lado AB del triángulo. En etapas posteriores, la longitud de AD será la variable independiente en el estudio de la variación del área de los rectángulos. La ubicación del punto móvil tiene importancia cuando tenemos en vista un alumno que está construyendo la noción de función y la noción de dependencia. En tal sentido, un punto móvil ubicado en el lado vertical AC o en la hipotenusa CB del triángulo haría más difícil aprehender la dependencia que se quiere estudiar.

Queremos detenernos en dos cuestiones sobre la segunda etapa:

1) Esta actividad podría iniciarse con un archivo GeoGebra en blanco, dejando en manos de los alumnos toda la construcción, tanto del triángulo como del rectángulo. Al producir modelos con un programa de geometría dinámica, el abanico de decisiones que los alumnos toman es de por sí amplio y está en relación con los conocimientos que ellos tengan, tanto matemáticos como propios del programa. Esto deriva en un escenario de una enorme diversidad que condiciona las futuras decisiones que el docente necesita tomar para llevar adelante sus objetivos de enseñanza. Hemos optado por una configuración para la cual, por tener menos diversidad de producciones en el archivo, tenga al mismo tiempo menos condicionantes para el docente.

   Experiencias anteriores de algunos profesores nos alertaron sobre dificultades originadas por aproximaciones de cálculo que realiza el programa. Particularmente, se observaron incoherencias/discordancias entre dos datos que el programa puede mostrar en pantalla: valores de áreas de distintos rectángulos y los correspondientes valores de los lados. Para un análisis detallado de estos fenómenos se puede leer el artículo “La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica”, escrito por algunos integrantes del grupo y publicado en la actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática Cibem.[1]

   Por estas razones, decidimos entregar a los estudiantes el archivo GeoGebra preparado para resolver esta cuestión.

2) La actividad –tal como la hemos presentado en dos etapas– nos permite plantear una situación geométrica como algo previo al modelo GeoGebra que se va a construir. Las interacciones con el modelo permitirán precisar cuál es el problema que se quiere estudiar. Fue objeto de discusión

1. Disponible en: https://editorial.unipe.edu.ar/images/phocadownload/colecciones/herramientas/cuadraticas/lipgd_cicalaborsanisessa.pdf

en el Grupo la diferencia entre ambos planos –problema geométrico y modelo dinámico– y arribamos a la necesidad de resaltar esa diferencia en el aula. Nuestro diseño retiene esa intención al no comenzar el trabajo con los estudiantes directamente por la situación planteada en la pantalla de las computadoras de los alumnos. De este modo esperamos poder comenzar a discutir con ellos en torno a la distinción y relación entre ambos planos, las ventajas del modelo dinámico para el estudio y al mismo tiempo sus limitaciones.

TERCERA ETAPA: CARACTERÍSTICAS DEL MODELO DESARROLLADO EN GEOGEBRA Y ESTUDIO DE ALGUNAS MAGNITUDES DE LOS RECTÁNGULOS

Preguntas para los estudiantes:

- ¿Qué cambios se producen a partir del arrastre del punto D?
- ¿Tienen todos estos rectángulos la misma área?
- ¿Todos pueden llegar a un rectángulo cuyo lado AD mida 9,25? ¿Y a uno cuyo lado AD mida 2,31?

Comentarios

En esta tercera etapa, el trabajo que se propone para el aula en torno a la situación geométrica derivará en definir una función que sirva como herramienta para el estudio de la variación del área.

Una vez que los alumnos finalizaron la construcción del rectángulo dinámico en GeoGebra, la puesta en común permite compartir que en las construcciones hay un solo vértice del rectángulo que pueden mover ellos y que los otros dos quedan determinados (y el cuarto es fijo). Se unifica que el punto sobre el lado AB se nombrará con la letra D.

Esta etapa se lleva adelante en un modo de discusión colectiva en la cual el docente va planteando preguntas y los estudiantes, en interacción con el modelo GeoGebra, van estudiando las preguntas que el docente plantea. Se espera que realicen conjeturas sobre cambios en algunas magnitudes/elementos del rectángulo.

· *"¿Qué cambios se producen a partir del arrastre del punto D?"* Respondiendo a esta pregunta se espera que identifiquen magnitudes que varían, entre otras, la medida del lado AD y la medida del lado vertical. Es posible que los estudiantes también formulen conjeturas sobre el perímetro y el área.

· *"¿Tienen todos estos rectángulos la misma área?"* En nuestra experiencia notamos que algunos estudiantes sospechan que el área no cambia, pues "si aumenta la base, disminuye la altura y podría compensarse".

En esta etapa se privilegia que los estudiantes expliciten aquellos cambios que visualizan o que sospechan; no se espera que estos asuntos sean tratados exhaustivamente en este momento.

Para continuar con el análisis del área, se explica cómo hacer para que el GeoGebra muestre en pantalla la medida del lado AD (pulsar sobre texto en color para ver ventana emergente) y se formulan las siguientes preguntas:

· *"¿Todos pueden llegar a un rectángulo cuyo lado AD mida 9,25?"; "¿Y a uno cuyo lado AD mida 2,31?"* Estas preguntas tienen la intención de identificar que el archivo está preparado para obtener una familia finita de rectángulos entre los infinitos presentes en la situación geométrica: todos los que tengan lados con medidas que varían de 0 a 11, con incrementos de 0,05.

CUARTA ETAPA: IDENTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMO HERRAMIENTA DE ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DEL ÁREA

Preguntas para los estudiantes:

- ¿Cuál será el área del rectángulo cuando AD mide 2? ¿Y cuando mide 8,45?
- ¿Habrá otro rectángulo de área 18? Si pensás que sí, dar la longitud de AD.
- ¿Cuál será el área del rectángulo cuando AD mide 2,31?
- ¿Cómo varía el área cuando AD aumenta en uno?
- ¿Es verdad que cuando crece la medida de AD aumenta el valor del área del rectángulo?

Comentarios

Para responder la primera pregunta, los estudiantes pueden arrastrar el punto D hasta lograr AD de longitud 2 –u 8,45– y luego responder utilizando diferentes estrategias. Por ejemplo:

- deduciendo el valor de la altura a partir de establecer que la base y la altura suman 11, y calculando el área con la fórmula (se supone que los alumnos disponen de la fórmula $b \times h$ para calcular el área);
- leyendo la medida de la altura, en caso de que GeoGebra esté brindando esa información, y haciendo la cuenta para calcular el área;
- finalmente, otra posibilidad es que le pidan al programa la información sobre el valor del área.

Si esta última estrategia no aparece, aquí se indica a los estudiantes cómo hacer para que en la pantalla se muestre el valor del área de cada rectángulo.

Se introducen a continuación nuevas preguntas:

· *"¿Habrá otro rectángulo de área 18? Si pensás que sí, dar la longitud de AD."* Quizás algunos alumnos lleguen a la respuesta sin ninguna anticipación, arrastrando el punto D hasta encontrar otro rectángulo de área 18. Podría ser también que, con una cierta anticipación, visualicen que se trata del mismo rectángulo "acostado" (con lado vertical que mida 2).

Es posible que los estudiantes no hayan identificado que dos lados consecutivos de cada rectángulo suman 11, relación que justificaría que el "mismo rectángulo acostado" va a estar inscripto en el triángulo. Para trabajar explícitamente esta relación pensamos que podría preguntarse por un valor que el archivo GeoGebra no permita obtener, por ejemplo 2,31.

· *"¿Cuál será el área del rectángulo cuando AD mide 2,31?"* La certeza de la existencia de un rectángulo de tales dimensiones, junto con la falta de ese dato en este archivo GeoGebra, pueden ser el punto de partida para establecer otras relaciones (algunas correctas, otras no). Podría ocurrir, por ejemplo, que los estudiantes:

- Establezcan que hay proporcionalidad para la relación lado-área y que intenten con esa idea calcular el valor del área para AD = 2,31; en ese caso consideramos proponerles que analicen esta supuesta regularidad para medidas que el GeoGebra sí ofrece, de modo que puedan poner en cuestión la idea de proporcionalidad (por ejemplo, analizar los casos en los que AD mide 2, 2,5 y 3).
- Deduzcan el valor de la altura a partir de establecer que la base y la altura suman 11, y calculen el área con la fórmula.
- Visualicen la regularidad "cada vez que la base aumenta en una unidad, la altura disminuye en una unidad" a partir de la exploración en la familia de rectángulos y sus medidas (y que luego apliquen esta regularidad partiendo del rectángulo de base 2,3 con una medida de avance de 0,01 para encontrar la altura y calcular el área).

Proponemos discutir estas diferentes estrategias en el aula y, en particular, formular y validar que "las medidas de dos lados consecutivos de cada rectángulo suman once". Las relaciones geométricas que se necesitan para validar este hecho son conocimientos que los estudiantes suelen tener disponibles. El docente puede ayudar a recuperarlos, para establecer la relación y luego calcular el área solicitada.

Podría pasar que algunos estudiantes exploren en la configuración del archivo para lograr el valor 2,31 para AD y que entonces obtengan el valor del área del rectángulo en la pantalla. Es una estrategia que no pone en juego relaciones matemáticas y convivirá en el aula con estrategias matematizadas, que son las que esperamos.

A partir del trabajo sobre las preguntas anteriores, el docente propondrá una nueva tarea: estudiar la variación del área de los rectángulos en función de AD. En principio, se conocen ya los valores de esa función para AD = 2, AD = 8,45, AD = 9 y AD = 2,31. En este contexto, proponemos un conjunto de preguntas para tratar con los estudiantes y así comenzar a identificar características asociadas al tipo de crecimiento de esta nueva función.

· *"¿Cómo varía el área cuando AD aumenta en uno?"* Se espera que los alumnos aporten distintas respuestas numéricas y que en el espacio colectivo se concluya que no es constante la variación.

· *"¿Es verdad que cuando crece la medida de AD aumenta el valor del área del rectángulo?"* Los estudiantes podrían visualizar mediante el arrastre del punto D que el área crece y después decrece. Las argumentaciones apoyadas en la exploración nos parecen pertinentes en esta etapa de trabajo y esperamos que evolucionen a lo largo del estudio de esta situación, apoyándose sobre las relaciones matemáticas que estamos construyendo.

Es posible que los alumnos, habiendo calculado algunas áreas específicas, las hayan ordenado en tablas. Con esta información podrían, por ejemplo, argumentar que como el área es la misma para los valores de la base AD = 2 y AD = 9, el crecimiento de la medida de la base no asegura el aumento del área. Se podrá proponer que consideren tramos menores para establecer alguna conjetura acerca de en qué tramos aumenta y en cuáles disminuye.

La actividad de esta etapa puede desarrollarse como un momento de discusión colectiva o también como un momento de trabajo en pequeños grupos, para luego compartir y analizar las respuestas elaboradas por los chicos con todo el grupo.

La intención de estas preguntas es que sirvan de apoyo para la realización de la próxima etapa.

QUINTA ETAPA: ELECCIÓN DE GRÁFICOS COMPATIBLES CON LA FUNCIÓN EN ESTUDIO

A continuación, a los estudiantes se les plantea una nueva tarea:

Decidan cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la representación del área del rectángulo en función de la base del mismo. Justifiquen su respuesta.

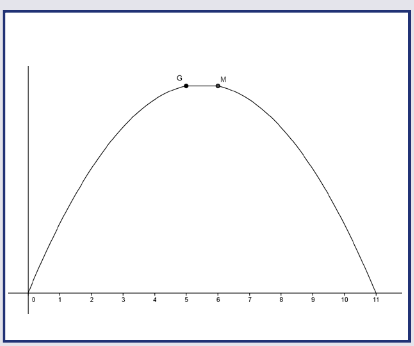


Gráfico 1

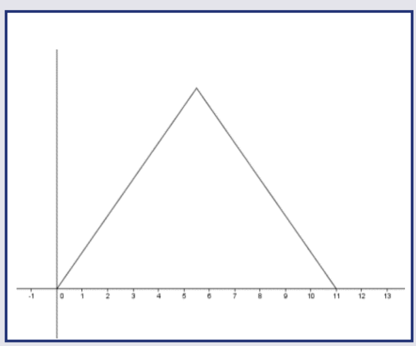


Gráfico 2

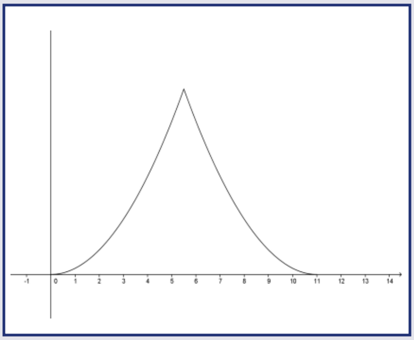


Gráfico 3

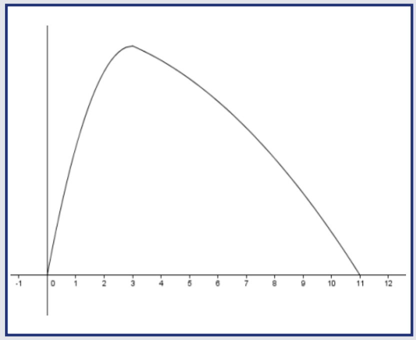


Gráfico 4

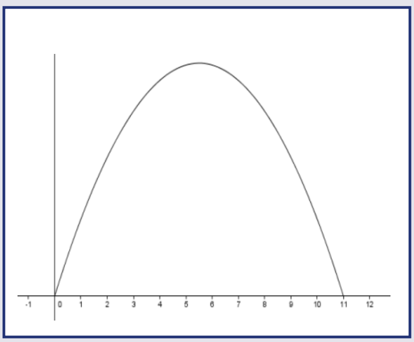


Gráfico 5

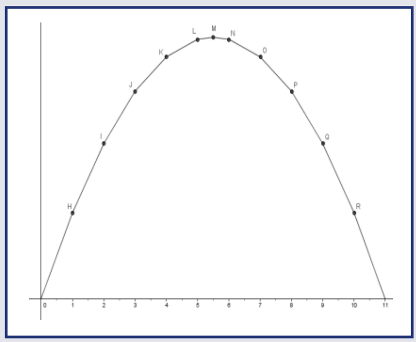


Gráfico 6

Comentarios

El análisis de los gráficos que se propone hacer en esta etapa no busca definir *cuál* es el de la función estudiada, sino ver la compatibilidad –o no– de cada gráfico con las características de la función. En este sentido podría ser que los alumnos llegaran a identificar varios gráficos como posibles, dependiendo de las relaciones que pongan en juego.

El objetivo de esta nueva tarea es que los alumnos lean en la forma de cada gráfico el tipo de crecimiento que expresa y lo pongan en relación con el crecimiento de la función de área estudiada antes. Nos interesa detenernos en el papel que puede jugar el GeoGebra.

Si los alumnos dispusieran del *software* para hacer el gráfico sería difícil lograr el objetivo al que apuntamos. Nuestra opción para este momento de estudio con gráficos es, entonces, entregar los gráficos dibujados en una hoja, dejar la computadora disponible para cálculos y no alentar a los alumnos a la producción de gráficos a través del GeoGebra.

Nos interesa promover que los alumnos conviertan al registro de los gráficos cartesianos los aspectos identificados en el trabajo previo con el problema y sientan la necesidad de conocer nuevas características de las variaciones ya que algunos de los gráficos comparten ciertas características identificadas previamente en la situación. Todo este trabajo permitirá elaborar nuevas relaciones en torno a la función estudiada. Por ejemplo, será necesario analizar qué datos de la situación usar –y cómo usarlos– para decidir entre un gráfico lineal a trozos y un gráfico curvo que tienen en común los intervalos de crecimiento, el máximo y el eje de simetría.

Encontramos, entonces, una especificidad en la actividad de elegir gráficos que no resulta abordable desde la tarea de producción del mismo, tal como se sostiene en el documento original, página 32:

> Estudiar cada uno de los seis gráficos, buscando razones para aceptarlo o descartarlo, es una tarea que comporta una complejidad diferente a la de confección de un gráfico, que clásicamente se resuelve en la escuela siguiendo el siguiente recorrido: fórmula de la función → confección de tabla de valores → marcado de puntos en un sistema de ejes cartesianos → dibujo de un gráfico aproximado uniendo los puntos.

Entendemos que, de este modo, la presencia del *software* no diluye la riqueza de la tarea de elección de gráficos. Sí creemos, en cambio, que la disponibilidad de la computadora puede traer aparejadas otras formas de trabajo entre los estudiantes. El modelo dinámico, del que disponen los alumnos a través del archivo GeoGebra, permite obtener una gran cantidad de datos sobre la función, pero estos se hacen visibles de a uno a medida que se arrastra el punto D sobre AB. Implícitamente hay una tabla con gran cantidad de valores que no están visibles al mismo tiempo. Quedaría en manos de los estudiantes la organización de la información y la decisión acerca de cuáles son datos pertinentes para estudiar cada uno de los gráficos.

Para finalizar esta etapa nos parece importante señalar que la elección de gráficos posibles –o el rechazo de gráficos “imposibles”– se apoyará en distintas ideas construidas y explicitadas por los estudiantes. La instancia de discusión colectiva aparece como una oportunidad para que cada estudiante comprenda las ideas de los otros, las valore, rechace o complete y, eventualmente, se construyan en el aula ideas nuevas a partir de la interacción.

Como ya dijimos, varios gráficos podrían ser los elegidos como posibles al terminar esta etapa. Estas decisiones se verán confrontadas en la próxima etapa a través de la construcción del gráfico.

SEXTA ETAPA: LA PRODUCCIÓN DE UN GRÁFICO

Consigna para los estudiantes:

Construir en el archivo el gráfico de la función área.

Comentarios

Antes de analizar esta última etapa del problema, creemos pertinente realizar una breve síntesis de las cuestiones que se habrían abordado hasta este momento y que serían un punto de partida para el trabajo.

Al analizar la relación "área del rectángulo inscripto-longitud de su base", los alumnos:

- averiguaron el área de varios rectángulos y quizás organizaron los datos en una tabla;
- reconocieron que la base AD puede tomar todos los posibles valores entre 0 y 11, exceptuando eventualmente estos dos;
- eligieron gráficos compatibles con la situación geométrica, estudiando el modo de variación de la función;
- percibieron la coincidencia del valor del área cuando los valores de la base están equidistantes de 0 y 11. Y en relación con esto identificaron visualmente una simetría en los gráficos elegidos (la actividad de elección de gráficos permite comenzar a discutir la idea de simetría que será luego abordada y precisada en otros problemas).

Nos parece importante señalar que hasta la quinta etapa no se tuvo la intención de promover la producción de la fórmula de área, aunque es posible que esta haya aparecido en el aula. Tomaremos entonces como un hecho eventual que algunos alumnos hayan formulado la expresión Área $= x(11 - x)$.

Para comenzar con la tarea de la sexta etapa los docentes podrán proponer a sus alumnos agregar la *Vista Gráfica 2* del programa donde se construirá el gráfico.

Las tablas realizadas anteriormente y los gráficos analizados son una fuente para recuperar algunos puntos posibles de este gráfico. El docente podrá ingresar las coordenadas de alguno en la barra de entrada y recuperar junto a sus alumnos el significado de los valores de cada coordenada: la primera indica la medida de la base del rectángulo y la segunda indica la medida del área.

Por otra parte, el movimiento del punto D y los valores que arrojan los datos de la *Vista Gráfica 1* son una fuente de nuevos puntos. Con estos datos reorganizados se propondrá ubicar algunos otros puntos en la *Vista Gráfica 2*. El docente tendrá en cuenta la necesidad de controlar dónde se ubica el cursor antes de introducir nuevos datos, pues en lo que sigue ambas vistas gráficas trabajarán en sintonía y esto requiere que el alumno sepa cómo pasar de una a la otra.

Luego, ya ubicados en la *Vista Gráfica 2*, se propondrá a los alumnos definir en GeoGebra un punto dinámico P cuyas coordenadas estarán definidas por: (medida del segmento AD, área del rectángulo ADEF).

Por último se activará el rastro del punto P y se desplazará el punto D sobre toda la extensión de la base. Dada la cantidad de cuestiones instrumentales del programa a tener en cuenta para esta construcción, pensamos que una forma de llevar adelante la clase es utilizar un proyector e ir haciendo juntos –el docente por su lado en pantalla, los alumnos por el otro en sus computadoras– estas distintas acciones.

El punto dinámico P representa en el plano cartesiano los distintos estados particulares de la situación geométrica dinámica a los que se va accediendo vía el arrastre. Este dinamismo es el que permite poner de relieve la constitución punto a punto del gráfico de una función.

Al desplazar el punto móvil D en la *Vista Gráfica 1*, cada uno de los puntos previamente ubicados en la *Vista Gráfica 2* serán alcanzados por el punto P. La activación del rastro permite acceder a una imagen de la totalidad del gráfico de la función.

A continuación se podrá graficar la función $f(x) = x(11 - x)$ en la medida que haya surgido en la clase tal como lo hemos comentado. Se verá entonces que este gráfico es una versión "prolija" y continua del que se obtenía al activar el rastro. Se puede constatar que el recorrido del punto P coincide con el gráfico producido a partir de la fórmula. También se podrá analizar que dicho gráfico es una curva que excede el recorrido del punto P. Esto se podrá explicar, ya que se tienen en cuenta valores para x y $f(x)$ que escapan de los posibles para las medidas de base y área de estos rectángulos.

Cualquiera haya sido el camino para la construcción del gráfico de la función en la pantalla, su visualización permite volver a las respuestas dadas en la etapa 5 para descartar los gráficos que no corresponden y pudieron haber sido elegidos. Sin embargo, falta comprender las razones por las cuales es necesario descartarlos. Profundizar el estudio de la variación del área en relación con la base y formular nuevos valores posibles o nuevas organizaciones de tablas será una forma de abordar esta cuestión.

SECCIÓN 3

Estudio de familias de funciones con GeoGebra: trabajo a partir de la expresión canónica de la fórmula

LOS PROBLEMAS

En el documento original, el capítulo 3 se concentra en el estudio de las funciones a partir de fórmulas dadas en forma canónica. Nuestro grupo se planteó diseñar actividades para trabajar con el programa GeoGebra y al mismo tiempo sostener la intención didáctica de la propuesta original, que es promover una entrada fuerte de los estudiantes en la práctica de buscar información sobre una función a partir de la lectura de su fórmula.

Esta última condición nos llevó a preservar los primeros problemas del capítulo para ser realizados en "lápiz y papel". En esos tres problemas iniciales de la secuencia original, los estudiantes aprenden a leer en las fórmulas expresadas en forma canónica que

- las funciones crecen en un intervalo y decrecen en otro;
- no todo valor está en la imagen;
- hay valores máximos o mínimos que toma la función, y a qué valor de x corresponden;
- para todo valor de x, hay otro valor con la misma imagen.

Todas estas características, propias de las funciones cuadráticas, son nuevas para el estudiante. En el Grupo pensamos que la introducción del programa GeoGebra, con su gran disponibilidad para producir gráficos de funciones a partir de su fórmula, iba a permitir leer la información en el gráfico y debilitaría la necesidad de leer información en la fórmula, una actividad más laboriosa. Por esta razón preferimos preservar el trabajo en "lápiz y papel" para los tres primeros problemas antes de que los estudiantes comenzaran a trabajar con el programa GeoGebra. La secuencia de los seis primeros problemas –tres para hacer con "lápiz y papel" y tres para hacer con GeoGebra– puede verse en el Anexo ubicado al final de este libro, mientras que un análisis detallado de los problemas para hacer en "lápiz y papel" puede verse en el documento original.

Recién después de estos problemas resueltos en “lápiz y papel” se presentan a los estudiantes las tres actividades que diseñamos para trabajar con GeoGebra. En esta sección del libro presentaremos cada actividad seguida de su análisis.

Ahora bien, los cursos en los cuales se lleve adelante esta nueva secuencia pueden tener diferentes experiencias previas con el trabajo con funciones en el programa GeoGebra. En nuestro grupo se presentaron situaciones muy variadas entre las docentes que probaron la experiencia en sus respectivas aulas. En un caso los estudiantes habían trabajado previamente con funciones usando el programa, pero en otro curso no. Para este último, la profesora organizó un trabajo colectivo previo al Problema 4: les propuso a sus estudiantes que abran el programa GeoGebra y que escriban en la barra de entrada la fórmula que aparece en el Problema 2.[1] Al dar *enter* se hizo visible en la pantalla de cada computadora el grafico de la parábola correspondiente. Validaron de este modo si la elección hecha al resolver el Problema 2 había sido correcta. A continuación, la profesora preguntó cómo podía verse en el gráfico de la pantalla la respuesta dada a cada ítem del problema. Al comenzar, las respuestas de los estudiantes se apoyaban en gestos de los chicos con sus manos marcando en la pantalla. De a poco, estas direcciones trazadas con la mano se fueron transformando en rectas dibujadas por el programa; con algún aporte de la docente aparecieron las herramientas *rectas paralelas*, *rectas perpendiculares* o *punto intersección*. También apareció la posibilidad de arrastrar rectas para responder los ítems d), e) y f). Estas manipulaciones serán necesarias para resolver el Problema 4.

Los problemas 4 y 5 fueron llevados a las aulas por varias profesoras del Grupo de los Lunes. En las reuniones estudiamos lo ocurrido en las diferentes aulas a partir de videos, fotos de las producciones de los estudiantes (tanto en papel como en pantalla), audios de los intercambios al trabajar de a pares y grabaciones de la discusión colectiva gestada por el docente. Una síntesis que dé cuenta de las decisiones tomadas al planificar estos dos problemas y del estudio realizado por el grupo será presentada en las secciones siguientes, incluyendo en el análisis las decisiones sobre la gestión de la clase, las anticipaciones sobre las producciones de los estudiantes y algunos episodios singulares ocurridos en las aulas.

Cada una de estas presentaciones fue redactada por diferentes subgrupos de profesores que integran el Grupo de los Lunes.

ACERCA DEL PROBLEMA 4

PROBLEMA 4

> En un archivo GeoGebra ingresar los parámetros $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$. A continuación ingresar la función $f(x) = a(x + b)^2 + c$.

1. Ver el enunciado del Problema 2 en el Anexo.

a) Modifiquen los valores de a, b y/o c, de manera que la función tenga un valor máximo igual a 3,6. Una vez que lleguen a una función que crean que tiene un máximo igual a 3,6, expliquen por qué el gráfico que obtienen cumple con lo pedido. Para armar esta explicación, pueden hacer construcciones auxiliares en la ventana gráfica utilizando herramientas del programa. Apoyándose en la fórmula, escriban una explicación de por qué la función que cada grupo obtuvo cumple con lo pedido.

Una vez discutido el inciso a), se continúa con los siguientes ítems:

Modifiquen los valores de a, b y/o c, de manera que la función:
b) tenga un valor máximo igual a -4,1.
c) tenga un valor mínimo igual a 2,7.
d) tenga un valor máximo igual a 3,6 y se alcance en $x = 2$.
e) tenga un valor mínimo igual a 2,7 y se alcance en $x = -5{,}3$.

Para todos los ítems, una vez lograda la función pedida, capturen la pantalla de GeoGebra, péguenla en un archivo Word y expliquen cómo "leen" en la fórmula que la parábola tiene máximo o mínimo y cómo controlan gráficamente que la parábola que obtuvieron cumpla con lo pedido. Estudien también si hay más de una función posible.

A continuación, analizaremos cada sección de este problema:

En un archivo GeoGebra ingresen los parámetros $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$. A continuación ingresen[2] la función $f(x) = a(x + b)^2 + c$

Comentarios

Al ingresar los valores de los parámetros y la fórmula parametrizada, es importante observar e interpretar aquello que muestra el programa en la pantalla. Resulta necesario comentar con los alumnos las siguientes cuestiones:

- En la ventana algebraica, aparece $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$, es decir, una función particular, pues cada parámetro es reemplazado por el valor que actualmente posee.

2. Notemos que en la fórmula propuesta la expresión dentro del paréntesis es $x + b$ y no $x - b$, como es habitual. Eso hará que la abscisa del vértice sea el opuesto del parámetro b. Con la fórmula habitual resultaba natural a los chicos el signo menos que aparecía y tampoco teníamos argumentos *a priori* para justificar su razón de ser.

- En la ventana gráfica, se visualiza el gráfico de la función expuesta en la ventana algebraica.
- El valor de cada parámetro aumenta o disminuye presionando las flechitas ↑ ↓, respectivamente.

Con el propósito de ver cómo funcionan los parámetros, sugerimos a los estudiantes modificar sus valores y ver los efectos que se producen en el gráfico y en la fórmula.

A continuación de eso, proponemos trabajar con los siguientes ítems.

a) Modifiquen los valores de a, b y/o c, de manera que la función tenga un valor máximo igual a 3,6. Una vez que lleguen a una función que crean que tiene un máximo igual a 3,6, expliquen por qué el gráfico que obtienen cumple con lo pedido. Para armar esta explicación, pueden hacer construcciones auxiliares en la ventana gráfica utilizando herramientas del programa. Después, cada grupo va a pasar con su computadora para explicar qué hicieron.

Comentarios

Pedimos que expliquen por qué el gráfico cumple con lo pedido con el objetivo de que los alumnos vinculen ese máximo que informa la fórmula de la función con la ordenada del vértice de la parábola. Otra cuestión para considerar es la necesidad de que identifiquen, tanto en la fórmula como en el gráfico, que la ordenada de ese punto es la mayor de las ordenadas de la parábola, y por lo tanto es el punto más “alto”.

Solicitamos explícitamente el uso de herramientas del programa para que pongan en juego relaciones que no serían necesarias si se responde simplemente mirando la pantalla (por ejemplo, trazar una recta y solicitar la intersección con la parábola tiene más rigurosidad que responder por “lo que se ve” en la computadora).

Las siguientes son algunas de las estrategias que surgieron durante la implementación de la actividad en diferentes cursos. Estas variaron de acuerdo con la experiencia de los alumnos en el uso del GeoGebra.

- A pesar de haber llegado a una fórmula correcta, algunos estudiantes no pudieron determinar en el gráfico que el valor máximo fuera 3,6 pero sí que este estaba entre 3 y 4.
- Un alumno hizo que el programa mostrara la cuadrícula y luego “estiró” el eje de las ordenadas hasta que la cuadrícula se ajustó al valor 3,6. Esta acción de “estirar el eje” implica modificar la escala de dicho eje, pasando de 1 en 1 a 0,1 en 0,1 y logrando de este modo visualizar el 3,6.
- Otros marcaron el eje de simetría de la parábola (ingresando la ecuación de la recta vertical en la barra de entrada) y pidieron la intersección

entre esa recta y la parábola utilizando la herramienta *intersección*. Luego encontraron las coordenadas de ese punto, solicitando al programa el "valor" de dicho punto.

- Un alumno graficó con el programa la recta horizontal $y = 3{,}6$ y luego pidió la intersección entre esta recta y la parábola para comprobar que era un punto.
- Otros chicos trazaron una recta horizontal a una altura tal que corta en dos puntos a la parábola. Luego, visualizaron estos puntos pidiendo la intersección entre la parábola y la recta. Desplazando la recta hacia arriba llegaron a ver que en un momento la recta corta a la parábola una sola vez. Ahí ubicaron el máximo.
- Usando la instrucción *punto en objeto*, un alumno ubicó un punto sobre la parábola y le indicó al programa que muestre sus coordenadas. A continuación, desplazó este punto sobre la parábola hasta visualizar que la segunda coordenada toma el valor 3,6. Luego, afirmó que este valor es el máximo porque moviendo el punto hacia la derecha o izquierda, la segunda coordenada nunca es mayor que 3,6.
- Un estudiante hizo variar los valores de a hasta hacer $a = 0$. En ese momento observó que la parábola se convirtió en una recta que intersecaba en 3,6 al eje y, de acuerdo con la fórmula que él tenía. Luego continuó cambiando los valores de a y con eso visualizó que, para los valores positivos de a, la función cuadrática tendrá mínimo, en tanto que para los valores de a negativos, tendrá máximo. Esta estrategia es muy particular. Se pasa por un valor del parámetro que no sirve para visualizar una característica que tendrán las otras funciones de la familia con valores de a negativos.

Para la instancia de discusión colectiva, planificamos que algún grupo pase y muestre su producción conectando su computadora a un proyector. El resto de la clase tiene que decidir si están de acuerdo, si objetan algo, si proponen mejoras, etc. Si algún grupo produjo una estrategia diferente, la muestra y se continúa con esta dinámica.

Para poder llevar adelante la gestión de esta instancia colectiva, consideramos importante que el docente pueda identificar cuáles son los conocimientos matemáticos que los alumnos pusieron en juego en cada una de las estrategias utilizadas, no necesariamente para discutirlas colectivamente sino para estar al tanto de los conocimientos disponibles hasta este momento.

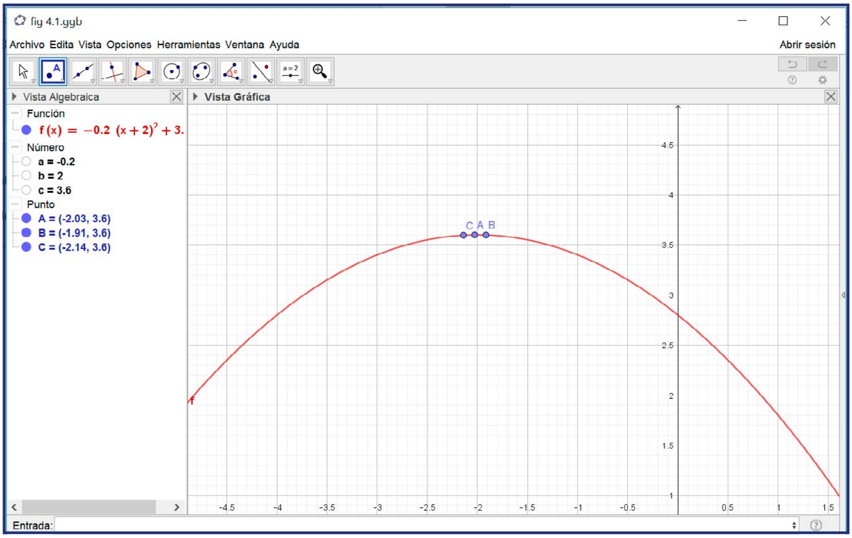
Por ejemplo, el alumno que traza una recta $y = 3{,}6$ y solicita la intersección con la parábola para luego pedir las coordenadas del único punto que obtuvo, se está basando en que si hay un único punto de ordenada 3,6 entonces ese punto es el vértice de la parábola. Por otro lado, controla que todos los demás puntos de la parábola se encuentran por debajo de esa recta.

El que traza la recta horizontal y la arrastra hasta obtener un único punto de intersección, también está poniendo en juego que el máximo de la función cuadrática se alcanza para un solo valor de x. En el caso anterior, el alumno asume que el máximo de la función es 3,6 y lo verifica; y, en este caso, busca ese máximo aprovechando el dinamismo del programa.

El que traza la recta vertical $x = -b$ se apoya en el conocimiento de que esa es la abscisa del vértice de la parábola (aunque aún no sepa que esa recta es el eje de simetría).

El alumno que marca un punto sobre la parábola y lo desliza, está buscando el punto que tiene mayor ordenada. En esta estrategia puede ocurrir que encuentre varios puntos cuya ordenada se visualice como 3,6 porque por defecto el redondeo del *software* tiene dos decimales, como se muestra en la imagen de la pantalla siguiente:

1



En este ejemplo, el programa nos muestra tres puntos sobre la parábola con distintas abscisas, pero con la misma ordenada 3,6. Si calculamos f según la fórmula $f(x) = -0{,}2(x + 2)^2 + 3{,}6$ en, por ejemplo, $x = -2.14$ (la abscisa del punto de la izquierda) obtenemos $f(-2{,}14) = 3{,}59608$, número que la computadora, trabajando con dos cifras decimales, redondea a 3,6.

Si en lugar de dos cifras decimales se le pide al programa que aproxime con más cifras decimales, el problema podría llegar a subsistir, por lo que resulta de utilidad recurrir a la lectura de la fórmula para decidir cuál de los puntos puede tener ordenada 3,6.

En el caso de los alumnos que ponen cuadrícula y "agrandan" el eje y o hacen *zoom* sobre este eje, solo se apoyan en lo visual. Queda a cargo del docente aceptar esta estrategia, que puede ser útil para invalidar aquello que se veía en un principio.

Por último, el alumno que considera $a = 0$ se apoya en lo visual porque está viendo que la curva transformada en recta corta al eje y en 3,6. Luego, cuando considera valores negativos para a, ve que la recta se curva hacia abajo y dice

“3,6 es el máximo”. Esto puede validarse fácilmente desde la fórmula, porque cuando $a = 0$, el primer término se anula y la función vale 3,6 para todo valor de x. Cuando a es negativo, 3,6 es el máximo porque a 3,6 se le está sumando un valor negativo o 0 para cualquier valor de x.

En un video registrado en el aula, escuchamos a dos estudiantes y vemos algunos gestos que hacen sobre la pantalla mientras interactúan con una profesora hablando de las características que debe tener la función para que tenga su valor máximo igual a 3,6. Los alumnos muestran en la pantalla que al cambiar los valores de a, de negativos a positivos, la parábola pasa de tener máximo a tener mínimo. Están visualizando algo que ya sabían, pero aprovechan el dinamismo del programa para explicarle al interlocutor de qué modo pasan de tener una parábola que tiene mínimo a otra parábola que tiene máximo. Los chicos explican también que el criterio inicial por el cual eligen que el parámetro b valga 0 les permite ver en la pantalla una parábola “centrada” respecto del eje y, mientras que haciendo *zoom* pueden ver que el máximo de la función es 3,6. Pero si cambian el valor del parámetro b, necesitan una recta horizontal $y = 3{,}6$ para poder visualizar que el valor máximo que toma la función es 3,6.

El video también muestra cómo los alumnos aprovechan distintas herramientas del programa para visualizar el modo en que cada parámetro de la fórmula permite controlar características de la parábola. Y además, explican la necesidad del trazado de rectas auxiliares para controlar visualmente si la parábola cumple con las condiciones requeridas.

Un problema que se nos presentó fue que algunos alumnos decían que si una parábola tiene sus ramas hacia arriba, esta parábola tiene máximo. Nos costó entender por qué decían eso al mirar en la pantalla una parábola que no tenía máximo, aún después de haber analizado en los problemas anteriores que hay un valor máximo cuando el parámetro a es negativo. La explicación que daban los chicos es que una parábola con las ramas hacia arriba “tiene máximo” porque los valores de y “crecen y crecen”. Estaban dando otro sentido a la expresión “tiene máximo”, hubo que volver a precisar el significado ya construido colectivamente de esa expresión.

A continuación, y después de poner en común las distintas fórmulas que obtuvieron los chicos (que, pensamos, serán todas con $c = 3{,}6$), se podría preguntar: “¿habrá alguna fórmula con otro valor de c que tenga máximo 3,6?”

La finalidad de esta pregunta es recuperar la lectura de información de la fórmula, dado que, como no encontrarán ejemplos, necesitarán recurrir a la misma para justificar que solo cuando $c = 3{,}6$ la función alcanza ese valor máximo (como ya se trabajó anteriormente, el otro término siempre será negativo o cero).

Finalizada el inciso a), se continúa con las siguientes consignas del Problema 4:

> Modifiquen los valores de a, b y c, de manera que la función:
> b) tenga un valor máximo igual a -4,1.
> c) tenga un valor mínimo igual a 2,7.

d) tenga un valor máximo igual a 3,6 y que se alcance en $x = 2$.
e) tenga un valor mínimo igual a 2,7 y se alcance en $x = -5{,}3$.

En cada caso, una vez lograda la función pedida, capturen la pantalla de GeoGebra, péguenla en un archivo Word y expliquen cómo "leen" en la fórmula que la función tiene máximo o mínimo y cómo controlan gráficamente que la parábola que obtuvieron cumple con lo pedido. Estudien también si hay más de una función posible.

Comentarios

El objetivo de esta actividad es que los alumnos puedan dar argumentos o expliquen estrategias empleadas para poner en primer plano tanto la fórmula como el gráfico. Se podría abordar la puesta en común considerando comparativamente los distintos gráficos y fórmulas producidas en la clase, para poner en juego el rol de los parámetros. Esta puesta en común dependerá de los recursos de los que disponga el docente y de lo que haya surgido en la clase.

En nuestra experiencia en las aulas, una de las docentes contaba con un cañón y la otra no. Ambas se llevaron la producción de los chicos en un archivo Word y a la clase siguiente hicieron la puesta en común aprovechando las fórmulas producidas por los chicos: la que disponía de cañón mostró todas las parábolas producidas para cada ítem en un mismo archivo GeoGebra (ggb); la otra docente dictó todas las fórmulas producidas para cada consigna, le pidió a los chicos que las ingresen en un archivo ggb y que comparen los gráficos.

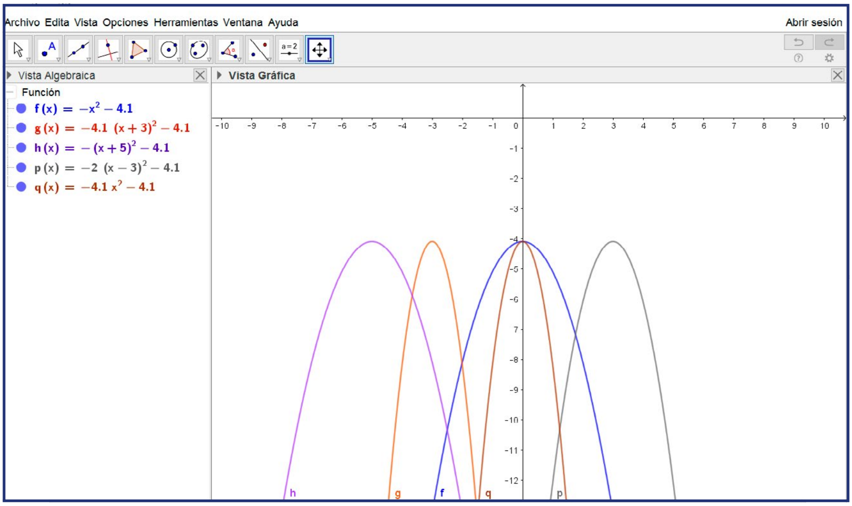
En ambos casos, el objetivo era que los alumnos pudieran visualizar los gráficos simultáneamente, discutieran sobre lo que tienen en común y lo que diferencia a esas parábolas, para luego caracterizar familias de funciones y generalizar con la fórmula.

Por ejemplo, al discutir el ítem b), se espera caracterizar la familia de funciones cuadráticas que tienen un valor máximo igual al valor dado. Desde lo gráfico, todas tienen en común que sus vértices son puntos de una misma recta horizontal ("están colgadas de la recta $y = -4{,}1$"), como se puede apreciar en la imagen 2, que reproduce lo que la profesora muestra con el proyector al incorporar en un mismo archivo ggb las cinco funciones propuestas por sus alumnos.

Aprovechando que en la misma pantalla aparecen los gráficos y las fórmulas, se puede discutir qué gráfico le corresponde a cada fórmula. Además, si se mira con detenimiento la imagen se puede observar que aparece la fórmula $f(x) = -x^2 - 4{,}1$, cuya forma suele desconcertar a los chicos porque no les resulta fácil ver que, en ese caso, el parámetro b vale 0. Si esta forma no aparece entre las producciones de los alumnos, el docente podría incluirla dado que suele generar un debate interesante.

Cada miembro particular de la familia difiere por el valor del parámetro b (el que determina en qué punto de la recta horizontal de ecuación $y = -4{,}1$ está

2



ubicado el vértice de la parábola) y por el valor del parámetro a, que necesariamente debe ser negativo (de acuerdo a su valor, se modifica la abertura de la parábola). De esta manera, esperamos generalizar las fórmulas de esta familia de funciones como aquéllas de la forma

$$f(x) = a(x + b)^2 - 4{,}1, \text{ con } a < 0.$$

En cuanto al inciso c), se trata de caracterizar la familia de funciones cuadráticas que tienen un valor mínimo igual a 2,7. Ahora, desde lo gráfico, esta familia de parábolas está "apoyada" en la recta horizontal de ecuación $y = 2{,}7$. Cada parábola difiere también por el valor del parámetro b y por el valor de a, que ahora tiene que ser positivo. Las fórmulas que caracterizan a esta familia son de la forma

$$f(x) = a(x + b)^2 + 2{,}7, \text{ con } a > 0.$$

Una cuestión para discutir es que todas estas parábolas tienen sus ramas hacia arriba. Esto se debe a que el parámetro a es positivo y esto hace que los valores de la función sean siempre mayores o iguales a 2,7, cualquiera sea el valor del parámetro b. La función decrece hasta alcanzar un valor mínimo cuando $x = -b$, y desde ahí vuelve a crecer.

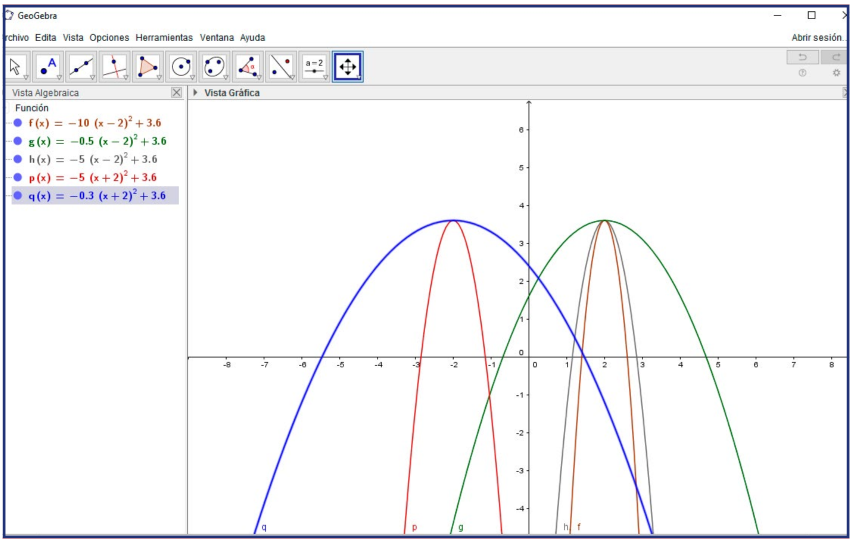
En un aula donde hicimos la experiencia la profesora preguntó: "¿Cuántas parábolas existen con máximo -4,1 (o mínimo 2,7)?". Algunos chicos respondieron que "hay infinitas de a por infinitas de b", intentando atrapar con esta expresión que existen infinitas elecciones para el valor de b y, para cada una de ellas, otras infinitas posibilidades para el valor de a.

Los ítems c) y d) ponen en juego el "control" que tiene el parámetro b sobre los gráficos. Igual que en los ítems anteriores, será conveniente discutir y articular con lo trabajado en los problemas previos con "lápiz y papel". En esos problemas, a partir del análisis de la fórmula, los chicos podían leer que el valor de x para el cual la función alcanza un máximo o un mínimo es aquel que anula la expresión dentro del paréntesis. Sin embargo, a la hora de producir la fórmula de una función que tenga máximo en un determinado valor (por ejemplo en $x = 2$), aun cuando reconocían que deben modificar el parámetro b para lograrlo, algunos se confundían y le daban a b el valor 2.

Nos llamó la atención que en estos casos los alumnos no controlaran en la ventana gráfica que efectivamente se cumpliera lo pedido. Esto nos lleva a pensar en la importancia de relacionar más el registro gráfico y el algebraico.

En la puesta en común optamos, al igual que en los ítems anteriores, por mostrar en una misma pantalla todas las parábolas que produjeron los chicos. Una imagen posible sería la siguiente:

3



De este modo, los alumnos pudieron identificar con mayor facilidad cuáles cumplían con la consigna y cuáles no. En este momento consideramos oportuno discutir con ellos cómo controlar desde el gráfico y desde la fórmula si la parábola cumple con lo que se pide.

Finalmente, concluimos que las fórmulas de las funciones que tienen máximo 3,6 en $x = 2$, tienen la forma

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 3{,}6, \text{ con } a < 0,$$

y sus gráficas son parábolas con las ramas hacia abajo y vértice en el punto (2; 3,6). Análogamente, la familia de funciones que tienen mínimo 2,7 en $x = -5{,}3$ son de la forma:

$$f(x) = a(x + 5{,}3)^2 + 2{,}7, \text{ con } a > 0.$$

y sus gráficas son parábolas con las ramas hacia arriba y vértice en el punto (-5,3; 2,7).

Sería conveniente analizar con los alumnos que, al mover el parámetro *b*, visualmente parece que la parábola se desplaza horizontalmente (en particular, se desplaza el vértice). Es decir que el parámetro *b* controla en qué valor de *x* se alcanza el máximo o el mínimo de la función. Estas ideas fueron trabajadas en los tres primeros problemas de la secuencia que los alumnos resolvieron en "lápiz y papel".

ACERCA DEL PROBLEMA 5

Los problemas 1 a 3 (trabajados en un entorno de "lápiz y papel") permiten que los chicos adviertan la presencia de parejas de números en los cuales la función toma el mismo valor, y que este fenómeno está asociado con el paréntesis al cuadrado que aparece en la fórmula. Queda pendiente, para algunos alumnos, el hecho de que los valores obtenidos son simétricos con respecto al valor en el cual se anula el paréntesis. Este asunto se aborda en el Problema 5, que diseñamos para trabajar con GeoGebra y que presentamos a continuación.

PROBLEMA 5: PRIMERA PARTE

- Ingresar los puntos (1; 7) y (5; 7).
- Ingresar los parámetros *a* y *c* y la función $f(x) = a(x - 2{,}9)^2 + c$.
- Modificar los valores de *a* y *c* para que, si es posible, el gráfico de $f(x)$ pase por los puntos dados.

Comentarios

El Problema 5 hace foco en la simetría de las parábolas, cuestión que no necesariamente quedó explícita en el trabajo con los problemas anteriores. La idea de simetría surgirá como conclusión de la imposibilidad de lograr una parábola con vértice de abscisa 2,9 y que pase por los puntos (1; 7) y (5; 7). Se trata de profundizar en la relación entre el valor de la abscisa del vértice y dos puntos de la parábola que tienen igual ordenada.

Retomando el tipo de trabajo desplegado en el Problema 4, se trata nuevamente de lograr una función que cumpla ciertas condiciones a partir de una familia de funciones definida vía una fórmula con parámetros.

Notemos que si bien la familia está definida a partir de una *fórmula* (con parámetros), las condiciones que se dan se refieren al *gráfico* de la función que se busca. Este juego entre fórmula y gráfico se ve potenciado al trabajar con el programa GeoGebra.

El trabajo con los últimos dos ítems del Problema 4 permitió identificar a *b* como el parámetro que determina el valor "*x* del vértice". Esto permitiría deducir que todas las parábolas con una fórmula de la forma $f(x) = a(x - 2{,}9)^2 + c$ tendrán el vértice con abscisa $x = 2{,}9$.

Por otro lado, a partir del trabajo con los primeros tres incisos del Problema 4, se llegó a la conclusión de que c es el parámetro que controla la ordenada "*y* del vértice". Esta cuestión volverá a aparecer ahora asociada al efecto visual que provoca la modificación del valor de c en la fórmula: un desplazamiento vertical de la parábola.

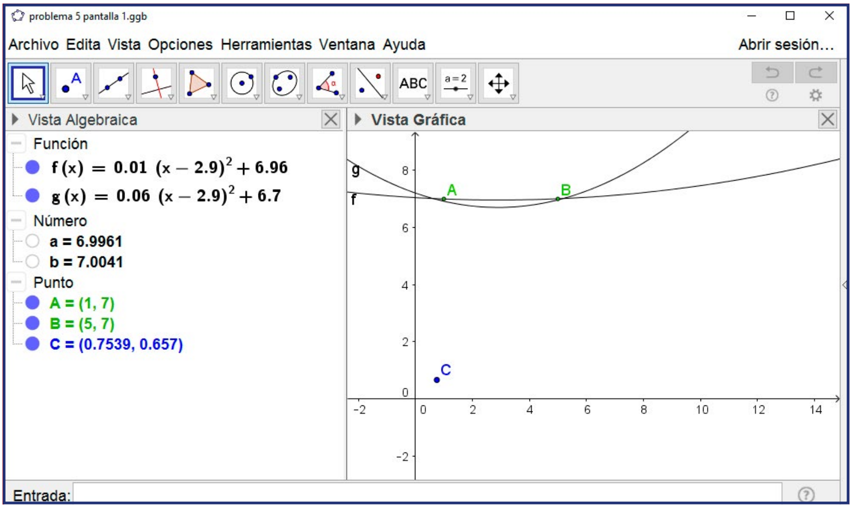
En relación con esta visualización propia del trabajo con el programa GeoGebra, notemos que si se van cambiando los valores de un parámetro cualquiera, con un incremento pequeño (por ejemplo, igual al "paso") se produce en la vista gráfica una secuencia de imágenes de diferentes parábolas con un efecto visual de movimiento: se percibe que es *una* parábola que va cambiando de manera continua.

Si bien estas dos cuestiones habrán estado en juego al trabajar con el Problema 4, no anticipamos que los estudiantes hayan construido explícitamente las relaciones que recién formulamos.

El análisis que se hizo del efecto de la variación del parámetro a en el Problema 4 fue únicamente para entender que con valores negativos la parábola es cóncava hacia abajo y con valores positivos es cóncava hacia arriba. Es probable que el hecho de que a modifica la apertura de la parábola haya permanecido implícito.

En las reuniones grupales, anticipamos que los alumnos explorarían en un archivo GeoGebra tratando de lograr que la parábola pase por los puntos dados y modificando los valores de los parámetros a y c. Nuestro grupo de trabajo, al realizar la exploración, llegó a parábolas que parecían pasar por los puntos A y B, como por ejemplo las que se ven en la imagen 4:

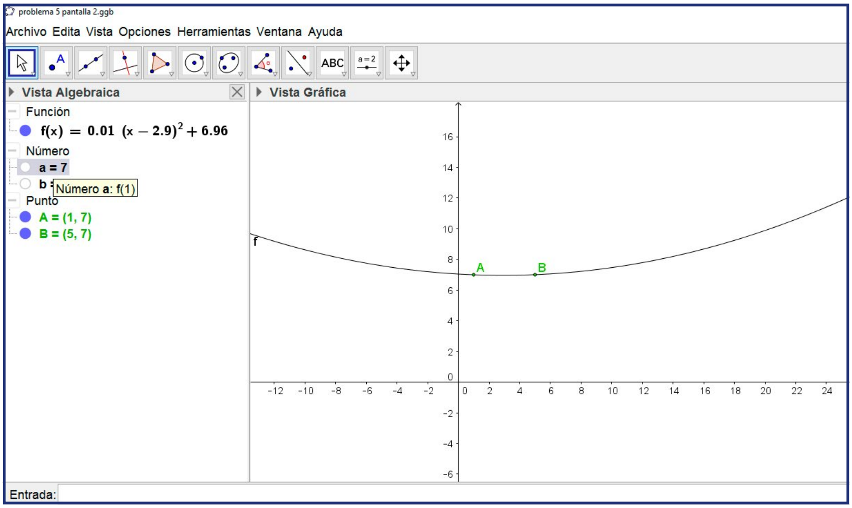
4



Utilizando reiteradamente el *zoom* pudimos corroborar visualmente que ninguno de los dos gráficos pasa por esos puntos. Era nuestra intención que un trabajo sobre las fórmulas acompañara la visualización de la vista gráfica: la evaluación de cada fórmula en $x = 1$ y $x = 5$ tenía que validar lo que los gráficos mostraban.

Ahora bien, trabajando con una de las dos funciones, nosotros pedimos al programa que evalúe $f(1)$ y $f(5)$ y se obtuvo el valor en ambos casos, como muestra la siguiente imagen:

5



Estábamos trabajando con dos cifras decimales para el redondeo, que es la configuración predeterminada en el programa. El valor que mostraba la pantalla en la vista algebraica es un redondeo del valor exacto de la evaluación de f, ya que

- $f(1) = 6{,}9961$
- $f(5) = 7{,}0041$

En el Grupo veíamos que discutir con los estudiantes sobre redondeo y aproximación (asuntos que inevitablemente surgen al trabajar con programas de cálculo) correría el eje de la temática, relegando lo que queríamos abordar en este problema. Sobre todo, considerando que nuestros estudiantes recién se están iniciando en el trabajo matemático con GeoGebra. Una opción sería pedir a los alumnos que configuren el archivo con un redondeo a cuatro cifras decimales y dos cifras decimales para el paso del parámetro. Además, concluimos que era posible discutir con ellos el porqué de esta decisión una vez resuelto el problema.[3]

3. En una fórmula del tipo $f(x) = a(x - 2{,}9)^2 + c$, si a y c tienen a lo sumo dos decimales, al evaluar x en valores enteros, se obtiene siempre un número que tendrá a lo sumo cuatro cifras decimales. Al pedirle al programa que trabaje con un redondeo a cuatro cifras, logramos que no realice redondeo alguno al evaluar en $x = 1$ y $x = 5$. De este modo, veremos en la pantalla el valor exacto de la evaluación.

Es probable que, al explorar, algunos estudiantes lleguen a parábolas que parecen pasar por los puntos A y B, como las que muestra la imagen 5. Algunas de ellas no resistirán el uso del *zoom* pero otras podrían seguir mostrando un aparente paso por los dos puntos. La idea es construir herramientas de control de lo que muestra la pantalla. En este caso, queremos que los estudiantes se apropien de la evaluación de la fórmula como estrategia válida para confirmar o rechazar lo que ven en la ventana gráfica. Si optan por utilizar el programa para la evaluación de la función en $x = 1$ y $x = 5$, la configuración del redondeo y el paso del parámetro que estarán utilizando aseguran que ninguna de las funciones que evalúen vaya a dar por resultado 7 en los dos valores simultáneamente.

Después de un tiempo en que los estudiantes no logren encontrar una función que cumpla lo pedido, se planea discutir colectivamente las posibles razones por las que no pueden encontrarla. Se trata de provocar la sospecha de que el único parámetro de la familia de funciones que está fijado, $b = 2{,}9$, debe ser el responsable. Al estudiar con detenimiento la fórmula con parámetros se puede ver que no va a existir una función porque, para cualquier valor de los parámetros libres, $a(1 - 2{,}9)^2 + c$ no va a dar el mismo resultado que $1 - 2{,}9 = -1{,}9$, ya que no es el opuesto de $5 - 2{,}9 = 2{,}1$.

Una vez que se llegue en el aula a las conclusiones mencionadas en el párrafo anterior, se planea plantear a los estudiantes la segunda parte del problema.

PROBLEMA 5: SEGUNDA PARTE

Si pudieran cambiar el 2,9 ¿qué valor pondrían?

Comentarios

La idea es llegar a la conclusión de que ese valor *debe* estar en el punto medio de las abscisas de los puntos que tienen la misma ordenada. Efectivamente, si cambiamos 2,9 por 3 obtenemos $(1 - 3)^2 = (5 - 3)^2$, que es una condición necesaria –y suficiente– para que los puntos de abscisa 1 y 5 tengan la misma ordenada.

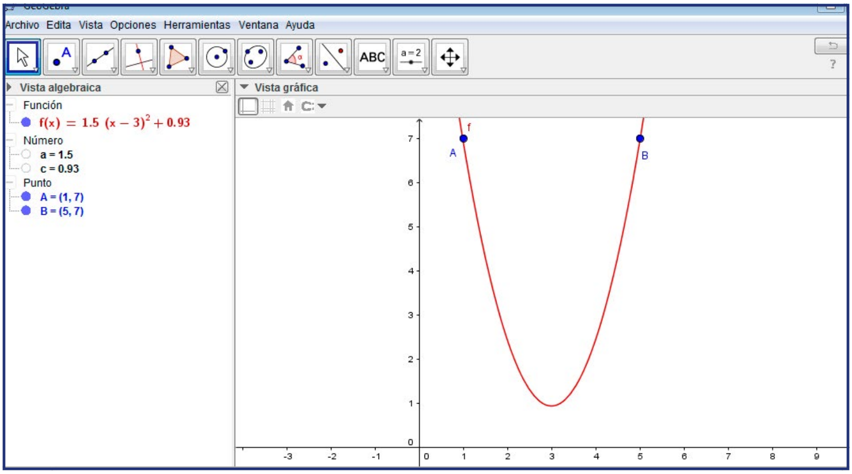
Este cambio no asegura que el gráfico obtenido pase por los puntos A y B. Es necesario, además, garantizar que $f(1) = 7$, y para ello los parámetros deben cumplir una condición: $c = 7 - 4a$. Si bien no se espera que los estudiantes formulen con exactitud esta relación, queremos que noten la existencia de alguna vinculación entre los parámetros a y c.

A continuación, se propone a los estudiantes:

Modifiquen los parámetros a y c en la fórmula $a(x - 3)^2 + c$, de modo que la parábola representada en la vista gráfica pase por los puntos dados.

De esta manera podrán proponerse en la clase diferentes fórmulas cuyos gráficos, en principio, parezcan pasar por A y B. Por ejemplo, en nuestro grupo de trabajo, variando los valores de los parámetros, obtuvimos una parábola como la que muestra la imagen 6.

6



En este caso podemos comprobar que la función no verifica lo pedido, pues $f(1)$ no es 7. Esta evaluación puede realizarse en el papel o con el programa ya configurado para mostrar en la pantalla el valor exacto. Seguimos sosteniendo que la evaluación en la fórmula es una estrategia de control y validación de aquello que vemos en la vista gráfica.

Podría ocurrir que algunos estudiantes controlen en la vista algebraica los valores de $f(1)$ y $f(5)$ que van obteniendo al modificar los valores de los parámetros a y c. Al hacer esto, probablemente trabajen solo con la vista algebraica sin observar la parábola que aparece en la vista gráfica. En ese caso sería necesaria una intervención docente para lograr que los estudiantes coordinen la información dada en el registro gráfico con aquella dada por la fórmula y la numérica de la evaluación.

En principio va a haber muchas respuestas en el aula. Estas respuestas se podrían ir anotando en el pizarrón e instalar la pregunta acerca de cuáles serían todas las soluciones. Los estudiantes habrán encontrado rápidamente que no para cualquier valor de a y de c se obtiene una parábola que pasa por los puntos dados.

Se puede continuar preguntando:

¿Puede ser que a tome el valor 3,4 (algún valor que no haya aparecido aún)? Si doy cualquier valor al parámetro a, ¿se podrá encontrar c?

Análogamente, también se puede preguntar si para cualquier valor arbitrario de c, es posible encontrar un valor de a. Como el parámetro brinda una información muy precisa en términos de la parábola, esta última pregunta podría formularse a los estudiantes en el contexto de la representación gráfica:

Si tomo un punto cualquiera en la recta vertical $x = 3$, por ejemplo (3; -2), ¿puedo conseguir una parábola que tenga como vértice ese punto y que pase por los dos puntos dados? ¿Qué fórmula tendría?

Las preguntas que vaya planteando el docente en el aula buscarán precisar la relación entre los dos parámetros libres, pero estarán condicionadas por las producciones de los estudiantes.

Algunas de las cuestiones discutidas en este problema se retoman en el Problema 6, en el que hay que encontrar una parábola conociendo sus raíces y las coordenadas de su vértice.

Algunas instantáneas del aula

El Problema 5 se trabajó en las aulas de dos docentes del equipo. Los estudiantes desplegaron estrategias que habíamos anticipados y otras que no. Por eso, nos interesa compartir algunos episodios que ilustran aspectos propios del trabajo matemático con computadora. La experiencia en las aulas nos permitió identificar cuestiones que no habíamos previsto y que nos llevaron a reflexionar en torno a las nuevas complejidades que se presentan tanto en el trabajo de los estudiantes como en la gestión del docente.

En una de las aulas, mientras trabajaban con la primera parte del problema, varios chicos propusieron tomar $a = 0$ y $c = 7$ y con eso lograron un gráfico que pasa por los puntos A y B. La profesora acepta la respuesta, pero indica que faltaba algo en el enunciado: se buscan curvas como las que estuvieron trabajando en los cuatro problemas anteriores y para ello es necesario pedir que a no sea cero. La profesora aprovecha para dar el nombre *parábola* al tipo de curvas con las que venían trabajando en los cuatro primeros problemas. Otros chicos obtienen parábolas en sus pantallas que parecen pasar por los puntos pedidos, tal como anticipamos nosotros. A continuación presentamos un diálogo entre la profesora y una alumna, Melany, en relación con su producción en la pantalla:

> PROFESORA. Melany, me parece que vos habías encontrado una que pasaba.
> MELANY. Parece, pero siempre queda un poquito por abajo o por arriba.
> PROFESORA. ¿Cómo podemos hacer para verificar si la parábola pasa por el punto (1; 7) o (5; 7)?
> MELANY. Usemos la fórmula.

Los demás estudiantes siguen buscando parábolas:

> PROFESORA. Bueno, dejen de probar un poquito y veamos si la que encontró Melany sirve o no. ¿Cómo puedo hacer para saber si

> la que tiene Melany ahí sirve o no? El gráfico ¿pasa o no pasa por los dos puntos? Melany dice de usar la fórmula, ¿cómo les parece que podría usar la fórmula para saber si el gráfico pasa o no por los dos puntos?

Utilizar la fórmula para comprobar si el gráfico de la función pasa o no por ciertos puntos no parece ser un conocimiento muy disponible en este curso. Por esta razón la profesora toma la respuesta de Melany, "usar la fórmula", pero repregunta a toda la clase acerca de cómo usarla para verificar si el gráfico cumple con lo pedido. De tal manera, deja a cargo de los chicos precisar dicha estrategia. Durante un tiempo los intercambios entre los chicos, y con la profesora, girarán en torno a esto. Los diálogos hacen visible los puntos de apoyo y las dudas de los estudiantes. Reproducimos a continuación un fragmento de la discusión colectiva. Las interacciones permiten ilustrar el desafío de la gestión del docente –que no dispone de un cañón– para recuperar el trabajo de los estudiantes con GeoGebra. Al principio, la profesora le pregunta a Melany cuál es la fórmula de su párabola y ella le dicta la fórmula $1{,}9(x-2{,}9)^2 - 0{,}6$ que aparece en su pantalla. La profesora la copia en el pizarrón.

> PROFESORA. Bueno, ¿cómo podríamos controlar si esa parábola pasa por los puntos?
> ALUMNA. Ponés en la entrada $a = 1{,}9$ y después ponés $c = 0{,}6$.

La respuesta desconcierta a la profesora, que estaba esperando que los estudiantes trabajaran con la "fórmula del pizarrón" para verificar si el gráfico pasaba por los puntos dados. Para la alumna que le contesta, la tarea era otra: primero, reproduce en su pantalla la fórmula y la parábola de Melany; luego, contesta detallando las acciones que debe realizar en su computadora para lograr esto. El objeto que va a producir en su pantalla se compone de una fórmula, en una vista, y de un gráfico ligado a ella, en la otra. Esto permitiría realizar distintas acciones en cada vista para responder la pregunta de la docente: hacer *zoom* en la vista gráfica para visualizar con mayor precisión, o pedirle al programa que evalúe la expresión recién generada en la vista algebraica. La fórmula que escribe la docente en el pizarrón remite a la evaluación como única estrategia para dar la respuesta.

Como se ve, el trabajo con computadora abre a un abanico de acciones y estrategias de los alumnos difíciles de anticipar para nosotros. La experiencia de haber enseñado en ambiente de "lápiz, papel y pizarrón" condiciona lo que esperamos que los estudiantes respondan ante ciertas preguntas nuestras.

En otro momento, una alumna que está trabajando con el valor 0,1 para el parámetro a mueve con las flechitas[4] el parámetro c, evalúa la fórmula que obtiene en $x = 1$ y concluye:

4. En esta aula, los chicos están trabajando con un paso de 0,1 para el parámetro.

ALUMNA. No pasa, porque con 6,7 [llega en su pantalla a la fórmula $0{,}1(x-2{,}9)^2+6{,}7$] me da 7,6 y con 6,6 me da 6,96.

Es interesante detenerse en la manera en que argumenta esta alumna la imposibilidad de lograr una parábola que cumpla lo pedido: se está apoyando en dos valores “consecutivos” del parámetro, según el paso definido (0,1). ¿Sabe la estudiante que ese valor del paso se podría modificar y que podría obtener valores intermedios para el parámetro? ¿Lo sabe pero cree que no está permitido para resolver la tarea? En cualquiera de los casos, ella no está atrapando las razones matemáticas por las cuales no va a conseguir una función que cumpla con lo pedido.

Nuevamente aparecen imbricadas cuestiones matemáticas con otras que hacen al funcionamiento del programa. Pensamos que es necesaria una intervención docente para que los alumnos puedan diferenciar ambos aspectos y, al mismo tiempo, ir profundizando en el conocimiento del programa para poder aprovechar su potencialidad como herramienta de trabajo matemático.

Al concluir la clase, los alumnos llegan a explicitar que el valor $b = 2{,}9$ hace imposible encontrar una parábola que pase por los puntos dados. El docente propone entonces cambiar ese valor por 3.

En la clase siguiente se escribe la fórmula $f(x) = a(x-3)^2 + c$ y se discute que poner el valor 3 en el lugar del parámetro b es una condición necesaria pero no suficiente. Ante una demanda de la docente, los estudiantes producen ejemplos de parábolas para diferentes valores de a y c, de manera que verifiquen lo que pide el problema: $f(1) = f(5) = 7$.

Se intenta ahora llegar a establecer que, si bien hay muchas (infinitas) soluciones, no todo par de valores de los parámetros da una solución. Para avanzar hacia allí, la docente fija algunos valores de uno de los parámetros y pide estudiar si habrá solución en ese caso.

En cierto momento la docente pide fijar el valor de c en $c = -2$ y estudiar si habrá una solución. Con ese valor del parámetro c no se visualiza claramente en la vista gráfica si las parábolas que se obtienen variando los valores del parámetro a pasan o no por los dos puntos pedidos. Haciendo reiteradas veces *zoom* se visualiza que la parábola no pasa por los dos puntos al mismo tiempo con ninguno de los valores del parámetro a, que se mueve con paso de 0,1 (es el que está predeterminado en el programa). En principio, esto llevaría a los estudiantes a la necesidad de considerar la fórmula como un objeto de estudio para decidir que no va a haber solución o para encontrarla, poniendo un límite a las estrategias más blandas de mover los valores del parámetro y observar las parábolas que se obtienen en la ventana gráfica de la pantalla.

Dada la experiencia anterior de los estudiantes con la primera parte del problema (donde el valor $b = 2{,}9$ no les permitía encontrar una parábola y solo mediante un análisis matemático de las fórmulas a obtener se pudo dar por seguro que tal parábola no iba a existir), sería viable que los estudiantes pensaran que tal vez en este caso ($c = -2$) también hay razones matemáticas para concluir que no existe una parábola para ese valor de c. Pensar que hay alguna razón matemática detrás del "no puedo encontrarla" quizás los lleve a examinar la fórmula. Pasar al registro algebraico permitiría afirmar que sí existe una parábola que pasa por los dos puntos para ese valor del parámetro c. Varios alumnos de la clase se embarcan en este trabajo, pero no todos. Presentamos un fragmento de los diálogos en el aula al discutir colectivamente las producciones de los alumnos sobre este problema. Algunos pudieron encontrar una parábola y otros no.

> PROFESORA. A ver ustedes si nos cuentan cómo lo resolvieron.
> ALUMNO 1. Nosotros probamos con $a = 2{,}2$ y no daba. Después probamos con 2,3 y tampoco daba, porque se pasaba. Entonces pensamos que estaba en la mitad. Pusimos en $a = 2{,}25$ y comprobamos que sí servía, el valor $f(1)$ nos daba 7.
> ALUMNA 2 [pertenece a otro grupo]. ¡Pero entonces ustedes hicieron trampa!
> PROFESORA. (*Sonriendo*) Eso no es hacer trampa.

El análisis de este episodio nos alerta sobre las interpretaciones diversas que aloja una tarea como la propuesta a los alumnos. La cuestión que se discute tiene que ver con reglas del trabajo matemático con computadora que se están construyendo en el aula: ¿cómo lograr los valores del parámetro? ¿Está permitido "ponerlos a mano"? En el aula permanecen implícitas cuáles son las acciones permitidas para resolver una tarea. El incidente que acabamos de relatar pone al descubierto las diferentes posiciones de los estudiantes en relación con esto. Es por esta circunstancia de "ruptura" que la docente interviene explícitamente para habilitar.

En la clase, otra alumna planteó el problema en "lápiz y papel", trabajando con la fórmula y generando la ecuación $a \times 4 - 2 = 7$. Esto le permite arribar a una fórmula que cumple con lo pedido.

Conviven de este modo en el aula diferentes técnicas inherentes al trabajo con GeoGebra junto con técnicas de "lápiz y papel" que ponen en juego conocimientos muy diferentes en torno a los objetos de estudio *función cuadrática* y *parábola*. Resulta un desafío pensar en intervenciones docentes que puedan poner en diálogo estos modos distintos de abordar el problema: los gestos de exploración que realiza un grupo, la interpolación que lleva adelante un segundo grupo al modificar la cantidad de cifras decimales de los valores del parámetro, o el trabajo en lápiz y papel –vía la fórmula– que propone la última alumna.

ACERCA DEL PROBLEMA 6

Presentamos a continuación un problema que diseñamos para retrabajar las ideas construidas en los problemas anteriores. Las restricciones que impone la vida en las instituciones escolares no hicieron posible que las profesoras del grupo implementaran este problema en sus aulas.

PROBLEMA 6

a) En cada caso, encontrar la fórmula de una función cuadrática que cumpla con las condiciones dadas:
   i. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$, y que el máximo valor que alcance sea 3,6.
   ii. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$ y el máximo valor que alcance sea 19,08.
   iii. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$ y el máximo valor que alcance sea 4,7.

b) Encontrar una parábola que tenga una raíz en $x = 4$ y el vértice en V= (1; 6).

Comentarios

La idea de incluir este problema entre aquellos a realizar con GeoGebra apunta a sostener un trabajo que ponga en relación la representación en el registro de gráficos cartesianos con la fórmula de la función en el registro algebraico.

Por ejemplo, para el ítem a)i., si se quiere que las raíces sean $x = -2$ y $x = 4$, la simetría del gráfico se vería reflejada en la fórmula que debe contener a la expresión $(x - 1)^2$. Son cuestiones estudiadas en los problemas anteriores que pueden ser puestas en juego por los alumnos para anticipar que la fórmula será del tipo $f(x) = a(x - 1)^2 + 3{,}6$ y así lograr que el máximo valor sea 3,6.

Si hicieran esto, los estudiantes podrían introducir en la barra de entrada una fórmula a un parámetro y ajustar su valor para lograr que la función se anule en los valores de x dados. El paso que tiene el parámetro en la configuración usual del programa permitiría llegar a la solución "moviendo las flechitas", ya que la respuesta se obtiene con el valor de $a = -0{,}4$. Una lectura de la fórmula obtenida o una evaluación de esta en 4 y -2, permite corroborar numéricamente lo que se mostraría en el gráfico de la parábola. La discusión colectiva en torno a este ítem podría incluir la pregunta acerca de la unicidad.

Para el ítem a)ii., la exploración con los parámetros para una función que necesariamente debe ser de la forma $f(x) = a(x - 1)^2 + 19{,}08$ no permitiría llegar a la solución con la configuración por *default* del programa.

Nuestro diseño apunta a que los estudiantes primero se encuentren con esta dificultad para después habilitar explícitamente que se puede realizar un cambio en el paso del parámetro. Quizás sea necesario mostrar en el aula, con ayuda de un proyector, cómo se hace esto. La idea es que este tipo de maniobra sea incorporada como un gesto posible para futuros trabajos con GeoGebra.

El ítem a)iii., en principio, parece requerir una mayor precisión en el paso del parámetro (mayor cantidad de decimales). Pese a eso, la exploración no permitirá encontrar el valor de a. La función necesariamente debe ser de la forma $f(x) = a(x - 1)^2 + 4{,}7$ y el valor requerido para el parámetro es una fracción con expresión decimal infinita, $a = -4,\frac{7}{9}$, inaccesible para el programa.

Luego de estos tres problemas para trabajar con GeoGebra, la secuencia podría continuar a partir del Problema 8 del documento original de función cuadrática.

REFLEXIONES FINALES

Potencia y limitaciones del trabajo con funciones en el entorno GeoGebra

Un aporte fundamental que trae el trabajo con el GeoGebra, en relación con aquel que se despliega en lápiz y papel, es la posibilidad de conectar la fórmula y el gráfico de una función y que, además, esta conexión pueda realizarse para familias de fórmulas –y por lo tanto familias de gráficos– a partir del uso de parámetros. Con esto queremos decir que la producción de gráficos que realiza el alumno utilizando el *software* puede llevarse a cabo de manera dinámica, ya que al modificar los valores de un parámetro en una fórmula se producen, de manera casi continua, cambios en los gráficos de las funciones. Aprovechamos esta potencia del trabajo con el programa para diseñar actividades que permitieran estudiar familias de funciones.

Durante la etapa de diseño tuvimos en cuenta también algunas restricciones que trae aparejado la utilización del programa.

- La inmediatez con la que aparecen los gráficos al modificar las fórmulas deja afuera del trabajo del alumno una cantidad de decisiones y la construcción de relaciones necesarias para hacer el gráfico en lápiz y papel; entre ellas, obtener la evaluación de la función en varios valores para obtener puntos del gráfico o determinar una escala conveniente para lograr un gráfico significativo.
- Por otra parte, al ingresar los alumnos la fórmula de una determinada función, el programa produce en la ventana gráfica el dibujo de una curva que la representa. Este hecho podría dificultar que ellos identifiquen cada punto que constituye el gráfico en relación con la fórmula de la función. Además, cambiando los valores de los parámetros, el alumno accede a una gran cantidad de gráficos que pueden ser interpretados como un único gráfico que se va transformando (con movimientos diferentes según cuál sea el parámetro que cambia). Este hecho podría opacar, en esa "familia continua" de gráficos que el alumno visualiza, la identificación de cada uno de los gráficos representados
- Con relación al trabajo del docente en el aula, cabe señalar la explosión de diferentes producciones de los estudiantes con sus computadoras y la

no conservación de una traza escrita que permita reconstruir el trayecto recorrido durante la resolución de la actividad. Estos aspectos hacen difícil que el docente pueda tener una visión integral del trabajo realizado por los estudiantes a la hora de organizar una instancia de discusión colectiva. La disponibilidad de un proyector en el aula permite hacer públicas las producciones de los pequeños grupos y así poder discutir colectivamente sobre ellas.

Quisimos compartir las restricciones que nosotros encontramos porque consideramos que pueden ser de utilidad para todo docente que intente trabajar en su aula con esta propuesta. Esperamos haber trasmitido una cuota de entusiasmo para alentar a otros colegas a probar estas actividades. La riqueza del trabajo matemático que desplegaron los estudiantes en las aulas, y el interés que mostraron, son motivos valederos para animarse.

Este trabajo llega a su fin, pero no el trabajo del Grupo de los Lunes, que en el presente está elaborando una propuesta que incorpora GeoGebra al estudio de la noción de función.

ANEXO

Enunciados de los problemas

PROBLEMA 1

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras. Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula,

$$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2,$$

que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora.

a) Miguel propone cobrar 56 pesos por hora ¿cuánto ganarían en ese caso?
b) Ernesto quiere aumentar la ganancia, ¿a qué precio podrían cobrar la hora?
c) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia de 2048 pesos?
d) ¿Es posible obtener una ganancia de 1400 pesos? ¿Y de 3500?
e) ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener? ¿Qué precio por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?
f) En la pregunta c) se analizó que existen dos valores de precios por hora en los cuales la ganancia que se obtiene es de 2048, ¿cuál de los dos precios elegirían para obtener esa ganancia?

Y si la fórmula de la ganancia fuera $G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$:

a) ¿Pueden dar dos valores de p que den la misma ganancia?
b) ¿Cuál sería la máxima ganancia y para qué precio?

PROBLEMA 1 BIS[1]

Los registros de temperatura tomados un día del mes de julio entre las 0 y las 15 horas en una zona rural se ajustan a la función $T(x) = 0{,}1(x - 8)^2 - 4$, donde T es la temperatura en grados Celsius y x la hora del día.

a) ¿Qué temperatura hubo a las 2 de la mañana?
b) ¿En algún momento de la mañana se registró la misma temperatura que a las 15 horas?
c) ¿En algún momento del día se registró la misma temperatura que a las 0 horas?
d) ¿Es posible haber registrado antes de las 15 horas una temperatura de -1,5°C? ¿Y de -5°C?
e) ¿Cuál fue la temperatura mínima entre las 0 y las 15 horas y a qué hora se registró?

PROBLEMA 2

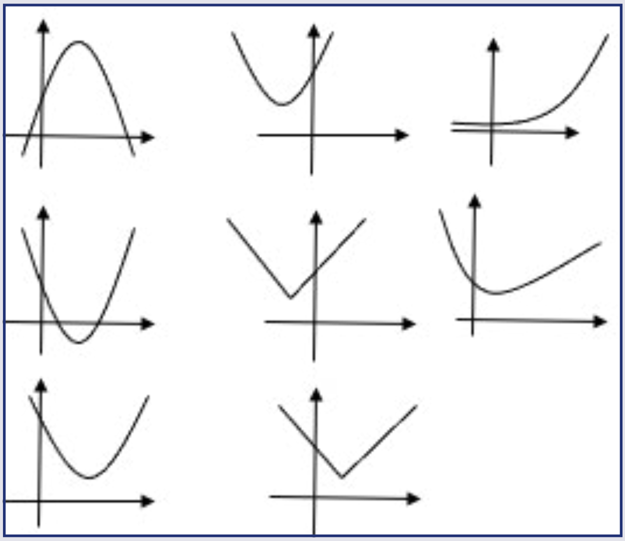
Dada la siguiente función

$$f(x) = (x - 2)^2 + 4$$

a) Busquen otros valores de dominio que tengan la misma imagen que $x = 11$. ¿Cuántos hay?
b) Busquen otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = -3$. ¿Cuántos hay?
c) Busquen otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = 2$. ¿Cuántos hay?
d) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 20. ¿Cuántos hay?
e) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 3. ¿Cuántos hay?
f) Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 4. ¿Cuántos hay?
g) Para cada uno de los siguientes gráficos, analicen si puede corresponder a la función f y expliquen por qué.[2]

1. Llamamos 1 bis a este problema, que agregamos a la propuesta original, porque permite volver sobre el tipo de práctica inaugurada en el Problema 1. Ahora, el contexto de la situación le da sentido a los valores negativos de la variable dependiente y el tipo de fórmula permite leer la existencia de un valor mínimo.

2. Sería interesante que los estudiantes argumenten, acerca de cada gráfico, las razones por las cuáles lo aceptarían o rechazarían. Una vez elegido algún gráfico como posible, se puede preguntar acerca de las coordenadas del vértice teniendo a la vista la fórmula, de modo de relacionar algunos números que intervienen en la fórmula con características del gráfico.



PROBLEMA 3

Dadas las siguientes funciones, hallar el valor máximo o mínimo que puede alcanzar cada una de las funciones y en qué valor de x lo alcanza.

a) $f(x) = (x + 5)^2 – 4$
b) $g(x) = -2(x – 5)^2 + 1$
c) $h(x) = 5 – (4x + 3)^2$
d) $i(x) = (7x – 5)^2 + 18$

PROBLEMA 4

En un archivo GeoGebra ingresar los parámetros $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$. A continuación ingresar la función $f(x) = a(x + b)^2 + c$.

a) Modifiquen los valores de a, b y/o c de manera que la función tenga un valor máximo igual a 3,6. Una vez que lleguen a una función que crean que tiene un máximo igual a 3,6, expliquen por qué el gráfico que obtienen cumple con lo pedido. Para armar esta explicación pueden hacer construcciones auxiliares en la ventana gráfica utilizando herramientas del programa. Apoyándose en la fórmula, escriban una explicación de por qué la función que cada grupo obtuvo cumple con lo pedido.

Una vez discutido el inciso a), se continúa con los siguientes ítems.

Modifiquen los valores de a, b y/o c de manera que la función:
b) tenga un valor máximo igual a -4,1.
c) tenga un valor mínimo igual a 2,7.
d) tenga un valor máximo igual a 3,6 y que se alcance en $x = 2$.
e) tenga un valor mínimo igual a 2,7 y se alcance en $x = -5,3$.

Para todos los ítems, una vez lograda la función pedida, capturen la pantalla de GeoGebra, péguenla en un archivo Word y expliquen cómo “leen” en la fórmula que la parábola tiene máximo o mínimo y cómo controlan gráficamente que la parábola que obtuvieron cumpla con lo pedido. Estudien también si hay más de una función posible.

PROBLEMA 5: PRIMERA PARTE

Ingresar los puntos (1; 7) y (5; 7).
Ingresar los parámetros a y c y la función $f(x) = a(x - 2,9)^2 + c$
Modificar los valores de a y c para que, si es posible, el gráfico de $f(x)$ pase por los puntos dados.

Una vez que en el aula se llegue a la conclusión de que no se podrá encontrar una función que cumpla con las condiciones planteadas en la primera parte del problema, se pasa a la segunda parte.

PROBLEMA 5: SEGUNDA PARTE

Si pudieran cambiar el 2,9 ¿qué valor pondrían?

Una vez encontrado el valor 3, se propone una nueva consigna dentro de este problema.

Modifiquen los parámetros a y c en la fórmula $a(x - 3)^2 + c$, de modo que la parábola representada en la vista gráfica pase por los puntos dados.

Después de que los alumnos hayan resuelto la consigna anterior, se podría cerrar el problema con un par de preguntas más.

¿Puede ser que a tome el valor 3,4 (algún valor que no haya aparecido aún)? Si doy cualquier valor al parámetro a, ¿se podrá encontrar c?

PROBLEMA 6

a) En cada caso, encontrar la fórmula de una función cuadrática que cumpla con las condiciones dadas:

   i. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$, y el máximo valor que alcance sea 3,6.

   ii. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$, y el máximo valor que alcance sea 19,08.

   iii. que tenga raíces en $x = -2$ y $x = 4$, y el máximo valor que alcance sea 4,7.

b) Encontrar una parábola que tenga una raíz en $x = 4$ y el vértice en $V = (1; 6)$.

Sobre las autoras y los autores

MARINA ANDRÉS es profesora de Matemática recibida en el Instituto de Enseñanza Superior N° 1, actualmente jubilada. Se desempeñó como profesora de matemática en escuelas secundarias e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Es coautora de documentos y artículos relacionados con la enseñanza de la matemática y de textos escolares.

VALERIA BORSANI es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA). Actualmente se desempeña como profesora adjunta de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en esa misma universidad. Ha trabajado como formadora de maestros y profesores, y como profesora de matemática en escuelas secundarias y en universidades. Es coautora de textos escolares y de diversos documentos y artículos referidos a la enseñanza de la matemática.

EDUARDO CIRIGLIANO es profesor de Matemática y Cosmografía por el Instituto de Educación Superior N° 1 “Dra. Alicia Moreau de Justo”. Actualmente se desempeña como profesor de matemática en la Escuela Superior de Comercio Carlos Pellegrini, el Colegio Nacional de Buenos Aires y el Instituto Libre de Segunda Enseñanza, escuelas secundarias que dependen de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

MARÍA TERESA CORONEL es profesora de Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente N° 34 “Profesor Héctor J. Médici”. Enseña en la Escuela de Educación Secundaria N° 20 “Estados Unidos de América”. Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios.

BETINA DUARTE es licenciada en Matemática (UBA) y doctora en Educación (Universidad de San Andrés). Se desempeña como profesora asociada y directora del departamento de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), donde enseña en programas de formación de posgrado para profesores de matemática y programas de grado dirigido a futuros docentes. Su investigación se centra en la enseñanza de la demostración, la fundamentación y la validación en distintas zonas de la enseñanza de la matemática del nivel secundario, en particular la enseñanza de los números reales.

GEMA FIORITI es magíster en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Dirige el Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) de la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM). Se desempeña como profesora titular de Didáctica de la Matemática en la Especialización y Maestría en Enseñanza de las Ciencias (orientación matemática) de la misma universidad. Es coautora de artículos sobre enseñanza de la matemática, documentos para docentes y textos escolares de matemática.

CLAUDIA KERLAKIAN es profesora de Matemática y Cosmografía, licenciada en Educación con orientación en Didáctica de la Matemática y en Diseño, Coordinación y Evaluación de Proyectos por la Universidad Nacional de Quilmes (UNQ). Se especializó en enseñanza de la matemática para el nivel primario en el Centro de Estudios de Pedagogía Avanzada (CePA) e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Es docente en el Instituto Etcheverry Boneo, el Instituto Libre de Segunda Enseñanza (ILSE), el Centro Educativo de Nivel Secundario N° 53, la Escuela de Educación Media DE 10 "Héroes de Malvinas" y en el Profesorado Pedro Poveda, tanto en nivel inicial como en enseñanza primaria. Además, se desempeña como asesora en el Colegio Arrayanes.

JUAN PABLO LUNA es profesor de Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA) y está cursando la Maestría en Formación Docente en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Forma parte del Grupo de los Lunes desde sus inicios. Se desempeñó como docente de escuelas secundarias hasta el 2019 y como formador docente en escuelas primarias, en CePA (actualmente Escuela de Maestros de CABA) y en cursos del Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD), entre otros. Desde 2013 trabaja en la UNIPE, donde realiza tareas de docencia en dos carreras destinadas a profesores de matemática e investiga en temas de enseñanza.

DÉBORA SANGUINETTI estudió el Profesorado de Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Se desempeña como docente en los niveles secundario, terciario y de formación docente. Sus principales actividades están relacionadas con la inclusión de las nuevas tecnologías en la educación matemática.

CARMEN SESSA integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. De formación inicial en matemática, se especializó en didáctica de la matemática desde 1991 y trabaja en formación e investigación en el área. Es profesora titular en la UNIPE y actualmente dirige la Carrera de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria. También es docente en la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Este libro presenta una serie de actividades que incorporan el programa informático GeoGebra al estudio de la función cuadrática en la escuela secundaria. Se trata de secuencias elaboradas por el Grupo de los Lunes –un colectivo de docentes de escuela secundaria y de universidad– con el objetivo de transformar una propuesta de enseñanza pensada inicialmente para un contexto de "lápiz y papel". A lo largo de estas páginas, los intercambios entre los autores y sus estudiantes ponen de manifiesto cómo esa transformación en el soporte del trabajo matemático genera nuevos razonamientos, estrategias y discusiones en el aula. Tomando como ejes temáticos el estudio de la variación del área de una figura a través de un modelo dinámico o el trabajo con familias de funciones a partir de la expresión canónica de una fórmula, aquí se despliegan diversas actividades que incluyen relatos sobre lo que ocurrió durante su puesta en aula y cómo eso retroalimentó el diseño inicial. Esta confluencia de miradas, así como la diversidad de experiencias de los integrantes del Grupo de los Lunes, generan condiciones para pensar en una integración real de las TIC en la enseñanza matemática.

ISBN 978-987-3805-59-2
9 789873 805592

editorial.unipe.edu.ar