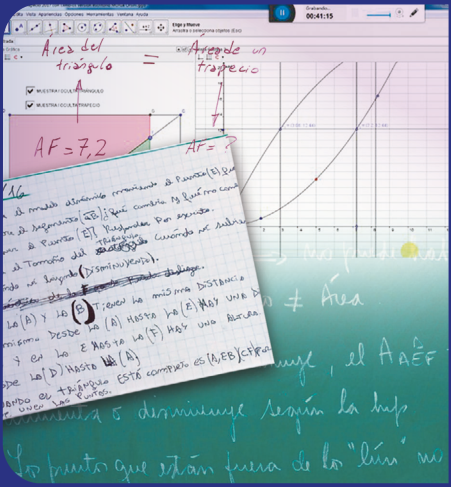


FIGURAS GEOMÉTRICAS DINÁMICAS PARA EL ABORDAJE DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

GeoGebra en el aula de la escuela secundaria

Juan Pablo Luna y Carmen Sessa (coordinadorxs)

OEI

unipe editorial universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

>>

Figuras geométricas dinámicas
para el abordaje de la noción de función

Figuras geométricas dinámicas para el abordaje de la noción de función

GeoGebra en el aula de la escuela secundaria

Juan Pablo Luna y Carmen Sessa (coordinadorxs)

Laura Marina Acosta
Marina Andrés
María Nieves Brunand
Milagros M. Cervio
María Teresa Coronel
Enrique Di Rico
Gema Fioriti
Romina Flores
Claudia Kerlakian
Cecilia Silvina Pineda
Germán Omar Pugliese
Valeria Ricci
Esteban Ignacio Romañuk
Marina Esther Torresi

unipe editorial universitaria
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA
OEI

Figuras geométricas dinámicas para el abordaje de la noción de función: GeoGebra en el aula de la escuela secundaria / Juan Pablo Luna... [et al.]; coordinación general de Juan Pablo Luna; Carmen Sessa - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria; Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura - OEI, 2023.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática; 8)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-83-7

1. Matemática. 2. Medios de Enseñanza. 3. Docentes de Escuela Secundaria. I. Luna, Juan Pablo, coord. II. Sessa, Carmen, coord.

CDD 510.712

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Carlos G.A. Rodríguez
Rector

Ana Pereyra
Vicerrectora

UNIPE: EDITORIAL UNIVERSITARIA

Directora editorial
María Teresa D'Meza

Edición y corrección
Mariana Liceaga y Juan Manuel Bordón

Diagramación
Diana Cricelli

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
Figuras geométricas dinámicas para el abordaje de la noción de función. GeoGebra en el aula de la escuela secundaria

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, diciembre de 2023

ISBN 978-987-3805-83-7

Índice

Introducción

Este libro es el fruto de un trabajo realizado por un grupo integrado por docentes de escuela secundaria y docentes-investigadorxs de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) llamado Grupo de los Lunes.[1]

Presentamos aquí una secuencia de actividades elaborada por el grupo para abordar la noción de función. En toda la secuencia los gráficos cartesianos, como una de las formas de representación de las funciones, juegan un papel relevante. Tres profesoras de este grupo implementaron la propuesta en alguno de los cursos donde dan o daban clases. Marina Torresi (docente M) la aplicó en el curso 3º D de la Escuela de Educación Técnica Nacional Nº 3 de Claypole en 2016; Claudia Kerlakian (docente C), en un curso de 2º año del Instituto Libre de Segunda Enseñanza (ILSE) de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA) durante 2016 y 2017; y Laura Marina Acosta (docente L), en el curso 3º A del Instituto Juan XXIII de Ramos Mejía en el año 2017. Durante estas implementaciones otrxs integrantes del equipo presenciamos esas clases para recoger datos (fotos, audio y videos).[2]

El análisis de las actividades que aquí presentamos incorpora el relato del trabajo realizado por los diferentes grupos de estudiantes y el estudio detallado de algunos episodios.

1. El grupo está integrado por lxs autorxs de este libro y en el inicio del trabajo colaboraron también Carla Cabalcabué, Rosa Escayola, Celia Fasce, Sabrina Maffei, Débora Sanguinetti, Sandra Tettamanti y Martín Tornay.

2. Agradecemos a las autoridades de las instituciones mencionadas por permitir el desarrollo de este trabajo en sus aulas.

Para trabajar con la secuencia, lxs estudiantes deberán disponer de un archivo GeoGebra[3] con un modelo geométrico dinámico, a partir del cual lx docente definirá diferentes funciones para ser estudiadas en el aula.

Lxs integrantes del Grupo de los Lunes compartimos una posición en relación al trabajo matemático en el aula. Nuestro propósito es involucrar a lxs estudiantes de la escuela secundaria en una genuina actividad de producción de conocimiento. Pensamos en docentes que eligen problemas desafiantes para sus alumnxs, anticipan estrategias de resolución correctas e incorrectas y crean un ambiente en el aula que lxs estimula a explorar, aportar ideas y discutir en torno a diferentes procedimientos. Estos ensayos, resoluciones e ideas son la materia prima a partir de la cual lx docente organiza las interacciones en la clase. Ese espacio colectivo de discusión es propicio para analizar la validez de razonamientos y procedimientos, avanzar en la precisión, plantear nuevos problemas, elaborar conjeturas y estudiarlas.

En la sección *Antecedentes del Grupo de los Lunes* recorremos, a grandes rasgos, la trayectoria del grupo: cómo se conformó, las diferentes etapas de trabajo que transitamos, los temas que abordamos en cada una de ellas y los materiales que se produjeron.

A continuación, en la sección *La secuencia diseñada y experiencias del aula*, presentamos actividades que elaboramos e implementamos en varias aulas, junto con un análisis de estas. A medida que diseñamos las actividades, realizamos un análisis de cada una. En muchas ocasiones, este análisis nos deja interrogantes importantes acerca de cómo las resolverán lxs estudiantes y de cuán fértiles podrán ser los problemas que planeamos. En este sentido, las implementaciones de la secuencia en las aulas de algunas profesoras del grupo retroalimentaron la instancia inicial de diseño al examinar lo sucedido en las clases, teniendo como marco nuestras anticipaciones. En esta sección incorporamos, como parte del análisis de las actividades, algunas producciones de

3. Este programa puede descargarse de: <https://www.geogebra.org/download?lang=es>. La versión utilizada en esta experiencia y que recomendamos para seguir este escrito es la versión GeoGebra Clásico 5.

estudiantes y escenas de aulas recogidas en los cursos donde implementamos la secuencia.

Por último, compartimos algunas reflexiones finales de esa experiencia.

Antecedentes del Grupo de los Lunes

En el año 2008, profesorxs de escuelas secundarias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y de la Provincia de Buenos Aires y especialistas en didáctica de la matemática formaron un grupo con el propósito de pensar –de manera compartida– la enseñanza de la matemática. El trabajo del grupo se centra en el diseño de propuestas de enseñanza para diferentes temas del currículum, su implementación en las aulas por parte de algunxs integrantes y el análisis de lo acontecido. La reflexión colectiva en torno a lo sucedido en esa primera implementación enriquece nuestro conocimiento y permite ajustar la propuesta inicial. La confluencia de miradas y enfoques, por un lado, y la diversidad de experiencias que caracterizan a la conformación del grupo, por el otro, generan buenas condiciones para estudiar cuestiones relativas a la enseñanza de la matemática.

Desde que se conformó el Grupo de los Lunes, una de las preocupaciones permanentes es pensar en canales que permitan dar a conocer las producciones al conjunto de profesorxs de matemática de todo el país.

La primera producción del grupo trata sobre la enseñanza de las funciones cuadráticas –pensada para un contexto de lápiz y papel– y se plasma en 2009 con la escritura del documento *Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*, publicado en 2014 por el Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.[1]

1. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/images/phocadownload/colecciones/herramientas/cuadraticas/matematica_cuadratica.pdf>.

Durante los dos años siguientes, el grupo adquirió mayor autonomía institucional y se impuso el nombre (Grupo de los Lunes, en adelante GL), en referencia al día en que se reunía. El inicio de los encuentros del grupo coincidió con la distribución de *netbooks* en las escuelas secundarias de todo el país, “una por alumnx”, con el objetivo manifiesto de “achicar la brecha tecnológica” entre los distintos sectores de la sociedad. Las computadoras empezaban a llegar a las escuelas y el GL quiso estudiar cómo incorporarlas en las secuencias que elaborábamos. La propuesta que recoge ese desafío se plasmó en el libro *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del GeoGebra al trabajo en el aula*, publicado en 2015 en la colección Herramientas de UNIPE: Editorial Universitaria.

A partir de 2012, el GL encuentra un lugar en la Universidad Pedagógica (UNIPE). Docentes e investigadorxs de esa casa de estudios se integraron al grupo, generando nuevas y mejores condiciones para analizar fenómenos relativos a la enseñanza. El grupo decidió considerar la propuesta original para la enseñanza de la función cuadrática y transformarla para incorporar la computadora en el trabajo de lxs estudiantes. El diseño y análisis de las nuevas actividades se plasmarían en un segundo libro publicado en 2021 en la colección Herramientas, *La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas*.

Desde el año 2016, el grupo se abocó al diseño, implementación y análisis de la secuencia que presentamos en este libro.

La secuencia diseñada y experiencias del aula

Como ya dijimos, la secuencia se ubica curricularmente en las primeras aproximaciones a la noción de función, donde juegan un papel relevante los gráficos cartesianos en cuanto una de las formas de representación de las funciones. Asumimos que lxs estudiantes trabajaron previamente con actividades de lectura de información del gráfico de una función en contexto, tanto global (dónde crece, dónde es el máximo) como puntual, incluyendo la escritura de par ordenado y la ubicación de un punto en el plano al conocer sus coordenadas. Además, es conveniente que antes de encarar la secuencia hayan hecho algún problema de producción del gráfico cartesiano de una función a partir de una tabla de valores.

Este trabajo previo podría ser en lápiz y papel, ya que no es condición necesaria para abordar las actividades de esta propuesta que tengan una experiencia anterior con GeoGebra. Aunque no se necesita que lxs estudiantes dominen las herramientas específicas del programa, sí creemos necesario que lx docente tenga una relación previa con el programa y que esté familiarizadx con las potencias y limitaciones básicas del GeoGebra.

La secuencia aporta a la construcción con sentido de la noción del gráfico cartesiano como representación de una función. Buscamos que lxs chicxs identifiquen que la representación gráfica de una función está formada por puntos, y que cada punto atrapa información de la situación. Proponemos un trabajo tanto global como puntual con el gráfico, en un entorno dinámico. Con esta propuesta, pretendemos que lxs estudiantes tengan un primer acercamiento al objeto *punto dinámico* del GeoGebra, el cual vincula la situación geométrica dinámica con puntos del gráfico de una función.

La propuesta se desarrolla a partir de una situación geométrica dinámica[1] en la vista gráfica 1 (que a partir de ahora llamaremos VG1) de un archivo del programa GeoGebra (archivo.ggb) en la cual se identifican algunas magnitudes que varían. Se define una función a partir de relacionar la variación de dos de esas magnitudes, la longitud de un segmento y el área de una figura. Luego se define una segunda función modificando solo la variable dependiente; o sea, considerando el área de otra figura. Los gráficos de esas dos funciones se van construyendo en la vista gráfica 2 (a partir de ahora, VG2). Las distintas tareas que se plantean fomentan el interjuego entre dos vistas gráficas del GeoGebra: qué características observables en la situación geométrica dinámica son transferibles –y de qué manera– al gráfico cartesiano de cada función y viceversa.

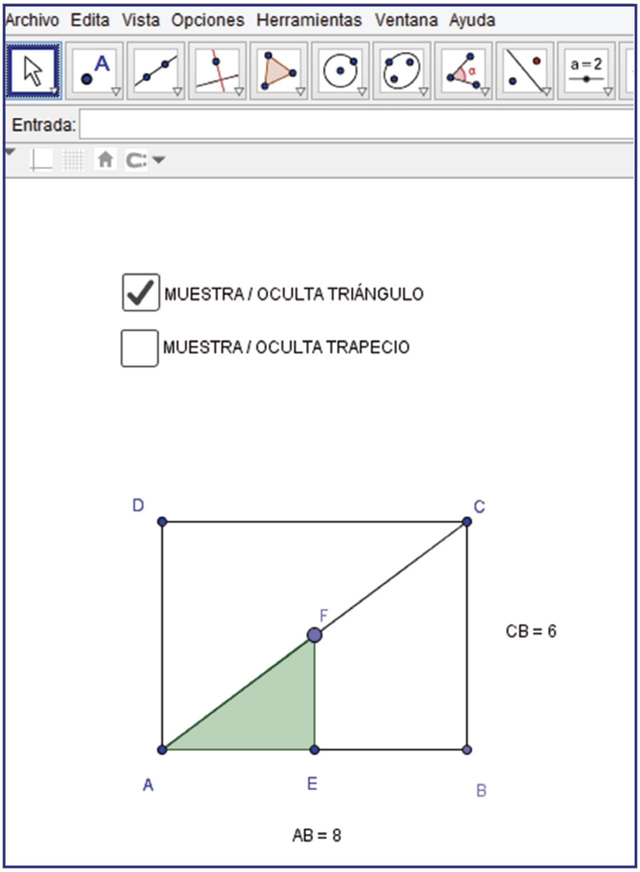
La secuencia se divide en dos partes. En la primera, lxs alumnxs exploran una situación geométrica dinámica a partir de un archivo que se les proporciona (y que se puede descargar aquí). Al abrir el archivo se observa una pantalla como la de la imagen 1, en la siguiente página.

Al explorar la figura moviendo el punto F, lx docente les propone a lxs estudiantes que identifiquen distintas magnitudes que varían. Entre ellas se eligen dos: la longitud del segmento $\overline{AF}$ y el área del triángulo AEF. Luego se plantean distintas tareas para estudiar la función que tiene como variable dependiente al área del triángulo AEF y como variable independiente la longitud de la hipotenusa.

En la segunda parte, se hace visible en la pantalla un trapecio que inicialmente estaba oculto, y se define una nueva función, modificando solo la variable dependiente y considerando ahora el área del trapecio para cada valor de la longitud de la hipotenusa $\overline{AF}$. En las últimas actividades se ponen en relación ambas funciones.

1. La secuencia se diseñó a partir de una propuesta de Abraham Arcavi en su artículo “Modelling with Graphical Representations”, publicado en *For the Learning of Mathematics*, vol. 28, n° 2, FLM Publishing Association, 2008, pp. 2–10. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/40248601>.

1



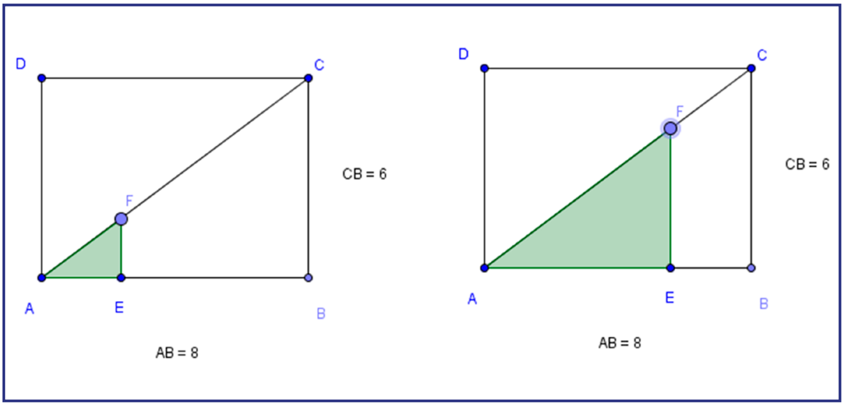
El punto F puede moverse en la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD. Cada posición de F determina un triángulo AEF sombreado.

Estudio del área de una familia de triángulos a través de una función. Construcción de su gráfico cartesiano

EXPLORACIÓN DE LA SITUACIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA

Como ya dijimos, lxs estudiantes comienzan explorando un archivo .ggb que les permite generar una familia de triángulos al mover el punto F (ver imagen 2).

2



Vista de la figura dinámica para dos posiciones de F diferentes.

Antes de proponerles la primera actividad, pensamos en hablar con lxs alumnxs sobre las características geométricas de la figura que están viendo, para confirmarles aquello que se visualiza: ABCD es efectivamente un rectángulo y el segmento $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Les informamos que estas características están garantizadas por cómo fue construida la figura.

A continuación, mostramos la primera actividad de la secuencia y proponemos que la resuelvan en pequeños grupos.

ACTIVIDAD 1

Exploren el modelo dinámico moviendo el punto F que está sobre la diagonal $\overline{AC}$. ¿Qué cambia y qué no cambia al mover el punto F? Respondan por escrito.

Tener que producir un escrito grupal obligará a lxs alumnos a discutir y acordar sobre la escritura en colaboración; una revisión conjunta sobre los escritos producidos permitirá a lx docente trabajar con las dificultades surgidas a partir de las escrituras de los objetos geométricos.

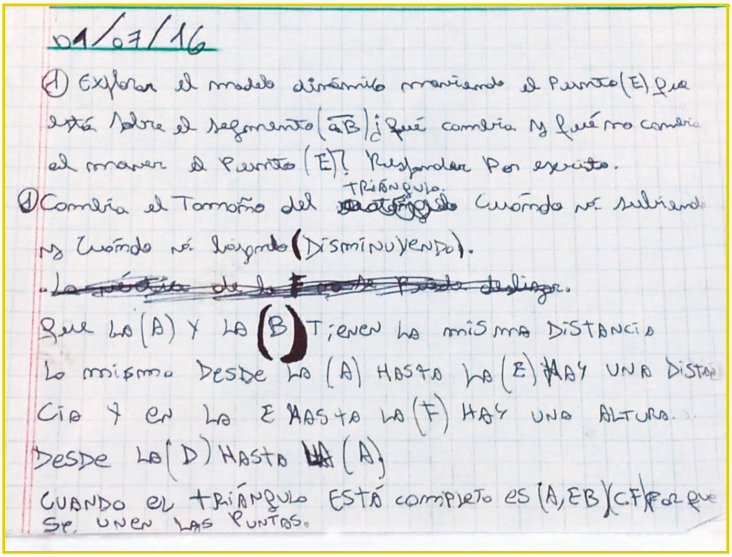
Por eso, diseñamos una posible forma de gestionar esta instancia colectiva: nos propusimos mostrar en el pizarrón el escrito de un grupo y que unx integrante de otro grupo marque en la figura (con el dedo sobre el pizarrón o con el mouse en una pantalla) aquellos objetos mencionados en el escrito expuesto. De esta manera, se pone de relieve que la escritura debe ser eficaz para que otra persona, que no la produjo, pueda reconocer lo que se quiso informar. Será necesario ponerse de acuerdo en la forma de mencionar los elementos de la figura para lograr más entendimiento.

Otra posible gestión es que lx docente pase por los grupos, identifique algunas producciones interesantes para discutir y las retome en una puesta en común. También se podría elegir como alternativa que lx docente se lleve las producciones al finalizar la clase y haga una síntesis, seleccionando aquellas que le permitan abordar asuntos que quisiera discutir en la clase siguiente. Sea cual fuera la organización que tenga, el espacio colectivo es el lugar para trabajar con todxs a partir de las producciones de cada grupo.

En los cursos en donde se implementó la secuencia entre 2016 y 2017, las docentes desplegaron distintas organizaciones de esta instancia colectiva en donde se trabajaron cuestiones sobre la escritura, algunas muy personales (ver imagen 3), para ser analizadas en la clase.[1]

1. La primera producción proviene de la implementación en el aula de la docente M, en 2016. En esa versión de la secuencia, el punto móvil era el E.

3


01/07/16

(1) Explorar el modelo dinámico moviendo el punto (E) que está sobre el segmento (AB) ¿qué cambia y qué no cambia al mover el punto (E)? Responder por escrito.

(1) Cambia el tamaño del ~~triángulo~~ triángulo cuando va subiendo y cuando va bajando (DISMINUYENDO).

- ~~La posición de la F porque puede deslizar.~~

Que la (A) y la (B) tienen la misma distancia lo mismo desde la (A) hasta la (E) hay una distancia y en la E hasta la (F) hay una altura. Desde la (D) hasta la (A)

Cuando el triángulo está completo es (A,EB)(C.F) porque se unen los puntos.

Producción de un grupo de estudiantes.

Aunque no se tiene registro de cómo se retomó esta escritura en el espacio colectivo, la compartimos porque nos parece un ejemplo interesante sobre posibles discusiones acerca de las escrituras que se podrían desplegar en el aula.

En la frase “cambia el tamaño del triángulo cuándo va subiendo y cuando va bajando (disminuyendo)”, podemos suponer que se refieren a que se modifica el área de la figura a medida que se mueve el punto E. Al analizar esta producción en el espacio colectivo, ante una pregunta de la docente sobre qué es lo que sube y qué baja, podría haber distintas interpretaciones. Por ejemplo, que lo que “sube” o “baja” es el punto F. O, mirando de una forma más “global”, que alguien diga que el triángulo es el que “sube” o “baja” a medida que cambia su altura; o que lo que “sube” y “baja” es la medida del segmento $\overline{AE}$ (recordemos que E era el punto móvil en esta versión de la actividad). Frente a esta situación es posible plantear la necesidad de explicitar en la escritura a qué objetos se están refiriendo.

A continuación de una frase tachada, lxs estudiantes de este grupo escriben “que la (A) y la (B) tienen la misma distancia”, posiblemente queriendo explicitar que la medida de $\overline{AB}$ no cambia al mover el punto E: siempre será de 8 unidades. Luego, reconocen otros segmentos de la figura, pero no distinguen en el escrito cuáles cambian su medida y cuáles no al mover el punto E. En un momento colectivo posterior, además de darles la oportunidad de completar sus ideas, se podría plantear que como A y B son vértices, resulta confuso referirse a su distancia, y que para nombrar al segmento que va desde A hasta B se utiliza la notación $\overline{AB}$.

Finalmente, terminan su respuesta diciendo que cuando "el triángulo está completo es (A, EB) (CF) porque se unen las puntas". Al escribir "completo" probablemente estén haciendo referencia a que el triángulo ABC está "todo pintado", lo que se logra si el punto E ya no se puede mover más hacia la derecha. El punto E coincide con B, y F coincide con C. Es decir, en su texto "EB" y "CF" no son segmentos sino que dan a entender que los vértices de ambos triángulos están encimados, lo que ellxs identifican en la frase "porque se unen las puntas". En futuras tareas sería posible retomar la importancia de que existan pautas de escrituras compartidas, para que todxs aquellxs que lean entiendan lo mismo. De esta manera se podría seguir informando sobre la escritura convencional de los objetos geométricos, como por ejemplo que $\overline{EB}$ corresponde a un segmento.

En esta instancia de producción colectiva, también es posible generar buenas condiciones para que aparezcan argumentos que permitan justificar algunas afirmaciones. Los argumentos necesariamente deberán apoyarse en relaciones matemáticas y permitirán ir más allá de la certeza dada por la visualización en la pantalla.

Nos interesa detenernos en un episodio[2] para reflexionar en torno a los intercambios que se dan entre tres estudiantes –Marcos, Valeria y Tania– y la docente:

> MARCOS. Nosotros dijimos que lo que no cambia es la jerarquía de los lados.

2. Este episodio ocurrió en la experiencia realizada durante 2017 en el aula de la docente C, donde el punto móvil era el F.

DOCENTE. ¿Qué quieren decir?

MARCOS. Como que el lado $\overline{AF}$ es siempre el más largo, $\overline{AE}$ poco más largo, y $\overline{FE}$ es siempre el más corto.

DOCENTE. *(En referencia a uno de los grupos)* Acá las chicas están moviendo porque les parece que no, pero están viendo.

VALERIA [una chica de ese grupo]. Creemos que el triángulo AFE puede ser isósceles.

TANIA [una chica de otro grupo]. No, eso no puede ser. Los ángulos son siempre iguales, en ningún caso puede ser isósceles.

DOCENTE. ¿Qué ángulos?

TANIA. Del triángulo. Cuando movés F los ángulos siguen siendo de la misma amplitud y A no puede llegar a ser de 45°.

(*Se escucha que Valeria habla bajito*)

DOCENTE. A ver... las chicas acá (*refiriéndose al grupo de Valeria*) dicen que A es de 45° y acá ella (*refiriéndose a Tania*) dice que no, ¿qué opinan los demás?

(*Se oyen varios "no", hablan todxs juntxs.*)

DOCENTE. A ver… Analicemos esto. Si yo tengo un rectángulo con la diagonal…

VALERIA. La diagonal es bisectriz del ángulo… (*se corta*) … ¡¡¡Ah…!!! Ya entendimos…

DOCENTE. Lo que ustedes dicen pasa si es un cuadrado.

VALERIA. Claro.

Señalemos que la afirmación de Marcos ("Como que el lado $\overline{AF}$ es siempre el más largo, $\overline{AE}$ poco más largo, y $\overline{FE}$ es siempre el más corto") y de Valeria ("Creemos que el triángulo AFE puede ser isósceles") se sustentan en lo visual y las ideas que expresan son contrapuestas. Estas impresiones contrarias desde lo visual dan origen a una discusión donde se comienzan a incorporar relaciones matemáticas. En la siguiente intervención, Tania se centra en los ángulos, afirmando que sus medidas no cambian al mover el punto F; probablemente esté apelando a la propiedad de la congruencia de los ángulos correspondientes, considerando como paralelas dos posiciones del segmento $\overline{EF}$. Luego, Tania dice que cuando "movés F los ángulos siguen siendo de la misma amplitud y A no puede llegar a ser de 45°". En este caso, se estaría agregando otra relación: como todos los triángulos son rectángulos, si fuera isósceles, los dos ángulos iguales de cada triángulo deberían medir 45°.

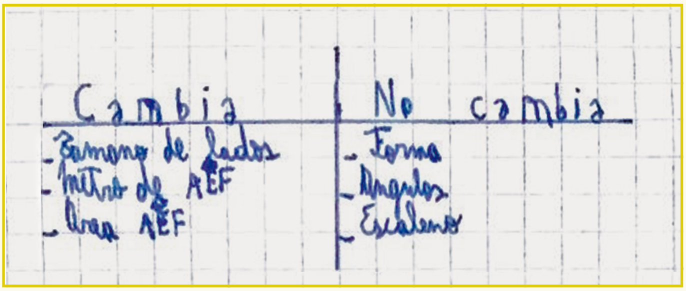
Nuevamente no hay acuerdo en el aula, esta vez en torno a la afirmación de Tania sobre la medida del ángulo A. La discusión se desliza desde la conservación de "la jerarquía de los lados" –observada en la pantalla por Marcos– hacia la pregunta de si habrá algún triángulo con ángulos de 45°. El grupo de Valeria –que inicialmente sostenía que había algún triángulo isósceles en la familia– afirma ahora que el ángulo A mide 45°, y posteriormente lo justifica recurriendo a una propiedad que solo es válida para los cuadrados: la diagonal de un rectángulo divide a los ángulos en partes iguales. En estos intercambios, los argumentos matemáticos que empiezan a formular algunxs estudiantes se hacen necesarios para dirimir entre dos asuntos opuestos que lxs diferentes actorxs "ven" en la pantalla.

Si bien en este episodio observamos estudiantes que avanzan de manera autónoma hacia la producción de argumentos matemáticos y una docente que se enfoca en la gestión de la circulación de la palabra, en otras ocasiones podría ser necesaria una participación más activa de lx docente para que el trabajo en el aula no se agote en la formulación de una propiedad a partir de lo que "se ve en la pantalla" y que la elaboración de argumentos basados en propiedades matemáticas tenga lugar y sentido en la clase.

La idea es que esta actividad 1 no quede solamente como una simple enumeración de cosas que cambian o no cambian (ver imagen 4).

La docente del curso trabajó sobre esta producción centrándose en uno de los elementos incorporados en esa lista y solicitando explicaciones de por qué los ángulos no cambian al mover el punto F. Para responderle, algunxs chicxs se apoyaron en que el ángulo con vértice en F, para cualquier posición, es correspondiente al ángulo fijo ACB. Otrxs estudiantes se basaron en que el

4



Lista generada por un grupo de estudiantes.

ángulo con vértice en A es común a todos los triángulos, el ángulo con vértice en E es recto, por construcción, en cualquier posición de de E, y el otro ángulo con vértice en F tiene la misma medida para todos los triángulos AEF porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

LA FUNCIÓN A ESTUDIAR

En las siguientes actividades de la secuencia se va a estudiar la función área del triángulo en función de la medida de $\overline{AF}$. Queremos que este estudio se apoye en el modelo dinámico y en las herramientas del programa, que permitirán construir el gráfico cartesiano de la función sin recurrir al cálculo del área y al uso de una fórmula. Elegimos que la variable independiente sea la medida de la hipotenusa por esa misma razón, para desalentar estrategias de cálculo basadas en la fórmula del área del triángulo.[3]

Recordemos que en la primera actividad, lxs estudiantes identificaron muchas magnitudes que varían cuando modifican la posición del punto F. Ahora, se elegirán dos de ellas entre las distintas posibilidades para determinar una función. De esta manera, queremos hacer visible en el aula que la

3. Esta decisión fue tomada luego de las implementaciones de la primera versión de la secuencia, donde el punto móvil era E y la variable independiente era $\overline{AE}$. En ese escenario, algunos grupos de estudiantes recurrieron a esa estrategia.

función a estudiar no está determinada por la situación sino que es producto de una decisión. Proponemos que la siguiente frase quede escrita en el pizarrón, como referencia que guíe el trabajo con las siguientes actividades hasta la número 5:

> Para poder analizar cómo varía el área de estos triángulos utilizaremos la función área del triángulo AEF en función de $\overline{AF}$.

ACTIVIDAD 2

¿Entre qué valores varía la medida de $\overline{AF}$?

¿Entre qué valores varía el área del triángulo AEF?

En nuestra experiencia, lxs estudiantes responden sin dudar que la medida de $\overline{AF}$ varía entre 0 y 10. Suele haber más discusiones en torno a que el área del triángulo puede ser 0, ya que cuando el punto F coincide con A, no hay triángulo. Proponemos, en ese momento, acordar con todo el curso incluir el 0 como “valor inicial” de la variable independiente y asignarle como correspondiente el valor cero para el área, de esta manera podemos incorporar el punto (0;0) al gráfico de la función a estudiar.

En el espacio colectivo, luego de discutir sobre las respuestas de la actividad 2, lx docente podría invitar a sus estudiantes a abrir la VG2 para empezar a construir allí el gráfico de la función. Esto permite la utilización de las herramientas “Acercar” o “Alejar” en una vista y que no afecte a la otra.

Para iniciar la construcción del gráfico, lx docente puede proponer ubicar los dos puntos que ya se conocen: el (0;0) y el (10;24). Es probable que algunxs estudiantes sepan cómo ingresar las coordenadas de puntos desde la barra de entrada y otros no. En este segundo caso, nos imaginamos que lxs chicxs, al utilizar la herramienta “Punto”, podrían introducirlos cliqueando con el mouse, en forma aproximada, en la posición buscada. Esto daría lugar a que lx docente explicite que ya se conocen dos puntos del gráfico cuya construcción se continuará en las siguientes actividades.

A continuación, lx docente podría explicar, y mostrar con el proyector, cómo introducir los puntos escribiendo las coordenadas (0;0) y (10;24) en la barra de entrada, aclarando que en el programa es necesario ponerlo con coma y no con punto y coma. Luego, podría proponer que cada estudiante lo haga en su computadora y de esta manera utilizar la herramienta del GeoGebra como control para aquellxs estudiantes que lo hubieran puesto a mano con cierto grado de imprecisión. Y viceversa, para aquellxs estudiantes que pongan mal las coordenadas al ingresar los puntos por la barra de entrada, la ubicación en el plano que hace automáticamente la computadora también puede servir como control.

Al presentar la siguiente actividad, lx docente podría realizar una explicación para plantear la nueva tarea y escribir en el pizarrón la consigna.

ACTIVIDAD 3

Recién marcamos dos puntos del gráfico de la relación. Ahora les pedimos que ubiquen un tercer punto del gráfico que corresponda al triángulo con $\overline{AF} = 5$. Además, escriban por qué lo ubicaron allí.

Otra manera de formular esta actividad podría ser la siguiente: ¿cuál les parece que será el valor del área del triángulo cuando $\overline{AF}$ mide la mitad de la diagonal del rectángulo, o sea 5? Creemos que esa pregunta se puede resolver trabajando solamente en la situación geométrica de la VG1. Por eso, elegimos formular la actividad tal como lo expresamos al inicio para así avanzar en la construcción del gráfico de la función dándole mayor presencia a la VG2.

Pretendemos que lxs estudiantes avancen también en la articulación entre la representación geométrica de la situación (VG1) y la representación gráfica de la función elegida (VG2). Por eso, cualquiera sea la vista gráfica donde cada grupo de estudiantes se apoye para responder, lx docente podría formular una pregunta sobre cómo se ve o qué significa en la otra vista gráfica.

Al planificar la secuencia nos imaginamos que algunxs chicxs podrían decir que si $\overline{AF}$ mide 5, el área será 12, ya sea porque creen que a la mitad de

$\overline{AF}$ le corresponde la mitad de área, o porque observan en la VG2 que el punto (5;12) queda alineado con los dos puntos que ya están marcados. De hecho, algunos de estos dos argumentos (erróneos) aparecieron en todas las aulas donde hicimos la experiencia.

También anticipamos que algunxs estudiantes, al mirar el triángulo en la VG1, podrían argumentar que si la medida de $\overline{AF}$ es 5, el área del triángulo es mucho menor que la mitad del área del triángulo ABC.

En un aula, algunos grupos de estudiantes respondieron que si F quedaba en el punto medio de la diagonal, E debía estar en el punto medio de la base y entonces concluyeron que $\overline{EF}$ mide 3, la mitad de $\overline{BC}$. A partir de esto calcularon el área: $(4 \times 3) \div 2 = 6$. Somos conscientes de que la conclusión a la que llegaron en este caso está apoyada en lo visual, pero en el aula la aceptamos como suficientemente válida. Como esta secuencia está pensada para ser trabajada antes que la noción de semejanza, lxs estudiantes no tendrían disponible los argumentos necesarios para validarla, y no se espera que utilicen estas ideas.

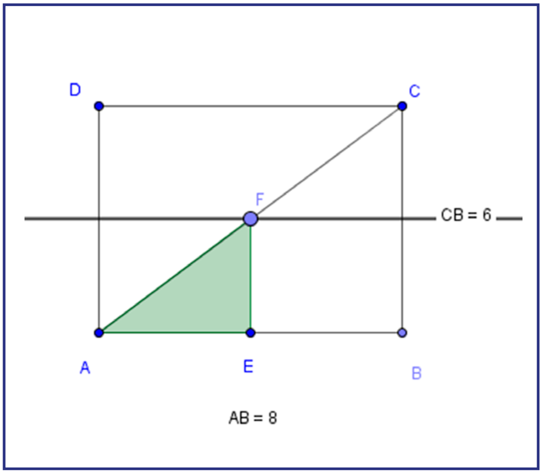
En otra de las aulas donde implementamos la secuencia, encontramos respuestas en las que se hicieron construcciones auxiliares, primero en un trabajo en pequeños grupos y después se llevó al espacio de discusión colectiva. Por ejemplo, un grupo de estudiantes ubicó el punto F –de forma aproximada– en el punto medio de la diagonal, luego trazaron con una herramienta del programa la paralela a $\overline{AB}$ por el punto F. Al considerar el triángulo de hipotenusa $\overline{FC}$ (ver imagen 5), concluyeron que era igual al triángulo AFE ya que tenían la misma altura, la misma base y, por lo tanto, la misma área.

Estxs estudiantes decidieron calcular el área de este nuevo triángulo que construyeron y lo hicieron mediante la cuenta $(4 \times 3) \div 2 = 6$. Otros grupos de esa misma aula trazaron, además, la diagonal $\overline{DB}$ (ver imagen 6).

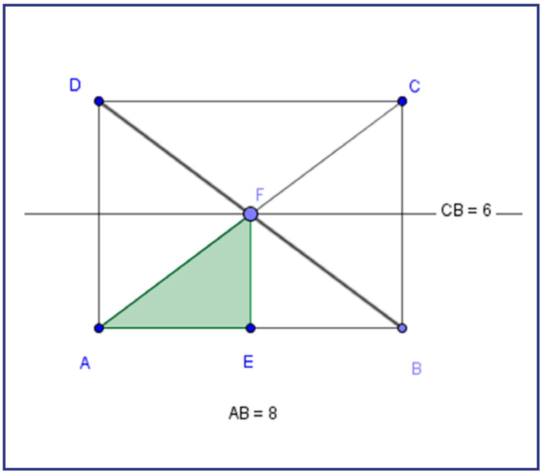
A partir de esta subdivisión, dividieron el área total del triángulo ABC (24) en cuatro, obteniendo de esta manera que el área buscada era 6.

En esa aula, en el momento de discusión colectiva, estas construcciones auxiliares dieron lugar a que otrxs alumnxs consideraran el rectángulo ABCD partido en ocho triángulos iguales. Y otrxs, ante la construcción mostrada en

5



6

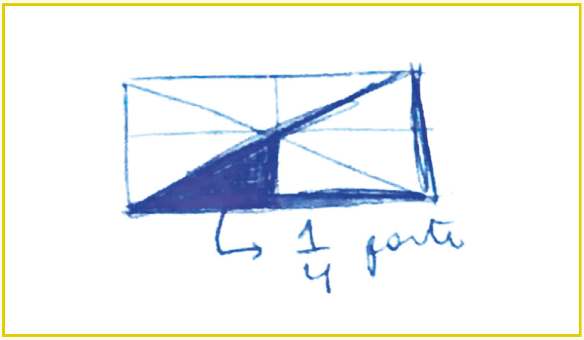


Construcción de una recta auxiliar y la diagonal $\overline{DB}$ para estudiar la partición del triángulo ABC en cuatro triángulos iguales.

la imagen 6, consideraron el cuadrilátero EBCF compuesto por tres triángulos iguales. Luego, calcularon el área de uno de ellos con la cuenta (4 × 3) ÷ 2, la multiplicaron por 3 y le restaron este valor al área del triángulo ABC.

En otra de las aulas, un grupo de estudiantes observó, sin hacer ninguna cuenta, que el área del triángulo AEF era la cuarta parte del triángulo ABC porque a la derecha del triángulo sombreado se podían poner tres triángulos iguales más (ver imagen 7).

7



Esta construcción, tomada de la carpeta de un estudiante, intenta mostrar la relación entre las áreas de los triángulos.

Al planificar la secuencia imaginamos distintas modalidades de gestión para discutir las resoluciones de los diferentes grupos de estudiantes. Cada docente decidirá qué modalidad de gestión considera más adecuada para llevar adelante con sus estudiantes.

Nos imaginamos una posible gestión en la que cada pareja o terna de estudiantes deberá escribir la respuesta a la que llegaron y una explicación de la misma. Estos escritos podrían ser leídos para comunicar al resto la producción del grupo. Si luego de la discusión el grupo considerara necesario hacer modificaciones a su respuesta, estas deberán quedar escritas en la misma hoja para luego ser entregada. Organizar una síntesis de la puesta en común en un nuevo escrito podría ser otra opción.

Por un lado, nos interesa que nuestrxs estudiantes avancen en la producción de un escrito que plasme algún tipo de argumentación matemática, con las particularidades que trae este ejemplo de la necesidad de nombrar objetos geométricos. En este caso se trata de afinar el discurso escrito para lograr mayor precisión a la hora de comunicar sus producciones. Por otro lado, con la doble escritura, nos interesa ver cómo se juega la relación entre la producción individual y la discusión colectiva y cómo esta puede producir modificaciones en las primeras ideas.

La manera en que vamos a producir con lxs estudiantes el gráfico de la función es a partir de la traza en la VG2 de un "punto dinámico" vinculado a la situación geométrica (trabajarán con esta herramienta en la actividad 5). Antes de eso, diseñamos una actividad (la número 4) con el objetivo de que lxs estudiantes elaboren algunas ideas sobre el gráfico cartesiano en dos direcciones distintas:

- Por un lado, queremos que se conciba la curva del gráfico compuesta por puntos cuyas coordenadas recogen valores de longitud y área de un triángulo de la familia. Es decir, queremos que entiendan qué representan las coordenadas de los puntos que están en el gráfico.
- Por otro lado, queremos que relacionen las características de la variación del área en la familia de triángulos con el aspecto que puede tener el gráfico. Por ejemplo:
  1. Que entiendan que cuanto mayor es la hipotenusa, mayor es el área, y relacionen eso con la propiedad del gráfico cartesiano: si un punto está más a la derecha que otro, deberá también estar más arriba.
  2. Que la medida de la hipotenusa (primera coordenada de los puntos del gráfico) puede tomar valores entre 0 y 10, y el área (correspondiente a la segunda coordenada), valores entre 0 y 24. Es decir, que hay zonas del plano cartesiano en que no puede haber puntos del gráfico.

Teniendo como objetivo lo que acabamos de enunciar, diseñamos la actividad 4. En ella se les propone a lxs estudiantes diferentes puntos marcados en el plano cartesiano y se les pide que decidan si esos puntos pueden pertenecer o no a la gráfica de la función en estudio. Para tomar esta decisión hay que apoyarse en los puntos que ya están marcados, el (0;0), (10;24) y (5;6), ya que podrían brindar algunas condiciones sobre los nuevos, si es que lxs estudiantes entienden la relación estrecha entre estos puntos y el modelo geométrico.

Para la siguiente actividad, proponemos que lx docente anuncie en forma oral que va a marcar puntos en la VG2 para que lxs estudiantes respondan la consigna.

ACTIVIDAD 4

Decidir si cada uno de los siguientes puntos podría estar en el gráfico de la función y dar argumentos de por qué:

a) Un punto que tenga abscisa 5 y ordenada mayor que 6.

b) Un punto con ordenada 6 y abscisa mayor que 5.

c) Un punto que tenga ordenada mayor a 24 o abscisa mayor que 10 o ambas condiciones.

d) Un punto con abscisa menor que 5 y ordenada mayor que 6.

Para la gestión de esta actividad pensamos en que lx docente dispondría de un proyector para mostrar a toda la clase los puntos que irá marcando. Primero presentará un punto que cumpla con las condiciones planteadas en el ítem a), pero sin que se hagan explícitas las coordenadas del mismo, para analizar con lxs estudiantes si puede o no pertenecer al gráfico de la función. Se pretende que esta discusión sirva de apoyo al analizar el siguiente punto que marcará y, de esta manera, podrá ir introduciendo los diferentes puntos que se proponen en los distintos ítems de la actividad. A partir de las primeras experiencias que hicimos en las aulas vimos que es necesario compartir con lxs estudiantes que *no* les estamos pidiendo que calculen el área para ciertos valores, sino que den argumentos para decidir.

Para cada uno de los puntos, a partir de las respuestas de lxs alumnxs, en forma colectiva se irá construyendo un modo de argumentar que incorpore relaciones identificadas en la situación geométrica de la VG1 (que cada pareja de estudiantes, en su computadora, podría manipular durante la actividad).

Planeamos que, cuando se concluya que un punto no está en la gráfica de la función, cambiaremos el formato del punto (por ejemplo poniendo una cruz roja), y cuando se concluya que es uno posible, se dejará como está.

Compartimos algunos argumentos que –imaginamos– podrían ser parte de las respuestas y, de hecho, fueron dichos por algunos grupos de estudiantes en las clases donde implementamos la secuencia:

a) Tal como esperábamos, lxs alumnxs no dudaron en descartar el punto de abscisa 5 y ordenada mayor que 6. Para eso, surgieron dos justificaciones:

- Algunos grupos de estudiantes, apoyados en la definición de función y teniendo en cuenta que ya saben que el punto (5;6) pertenece al gráfico, sostenían que el punto propuesto no servía pues no habría "unicidad en la imagen".[4]
- Otros grupos, centrados en la situación geométrica, dijeron que "es imposible que $\overline{AF}$ tenga dos superficies distintas". Esa referencia hizo pensar al resto de la clase que, en esta familia de triángulos que están estudiando, cada valor de hipotenusa genera un solo triángulo rectángulo, de ahí que definida la medida de $\overline{AF}$ se forma un único triángulo. Ese argumento les permitió descartar todo punto sobre la recta $x = 5$ que no tenga ordenada 6.

b) Para el punto con ordenada 6, y abscisa mayor que 5, es posible apoyarse ahora en el punto (5;6) que se encuentra en la misma horizontal. Esperamos que argumenten que no puede pertenecer al gráfico porque al aumentar la hipotenusa (respecto del triángulo con medida de $\overline{AF} = 5$), el área también debe aumentar. Para el punto con abscisa menor a 5 y ordenada mayor a 6, el del ítem d), anticipamos que de manera similar podrían argumentar que si el triángulo tuviera hipotenusa menor a 5, el área debería disminuir y no podría ser mayor a 6, por lo tanto el punto propuesto no podría pertenecer al gráfico de la función. Pensamos que este es un buen momento para que lx docente –si es que no es propuesto por lxs estudiantes– recurra a la figura dinámica para mostrar estas variaciones.

c) Para el punto que tenga ordenada mayor a 24 o abscisa mayor que 10, o ambas condiciones, se espera que aparezcan argumentos determinados por el

4. Aunque no era un requisito, en este curso la profesora había trabajado con los conceptos de dominio, imagen, existencia y unicidad en actividades previas a esta secuencia.

contexto. Así, por ejemplo, al recuperar lo ya estudiado, lxs alumnxs pueden identificar cuáles serían “los límites del gráfico”, ya que los triángulos analizados variaban su área entre 0 y 24, y esto ocurre para los valores de $\overline{AF}$ entre 0 y 10. Estas ideas permiten concluir que todos los puntos que no caen en ese rango se pueden descartar.

A partir de las discusiones en torno a cada punto propuesto, esperamos que lxs estudiantes puedan formular generalizaciones, por ejemplo, elaborando en forma conjunta una síntesis con todo lo estudiado (ver imagen 8).

8

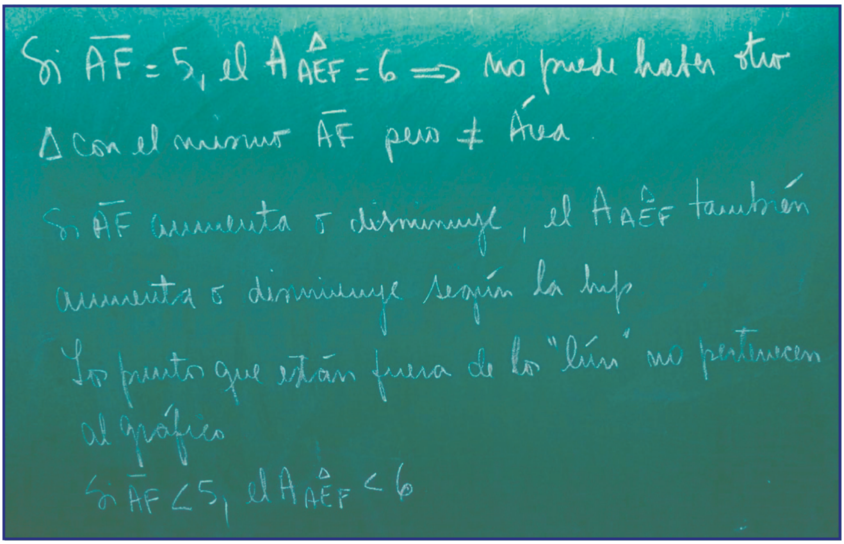
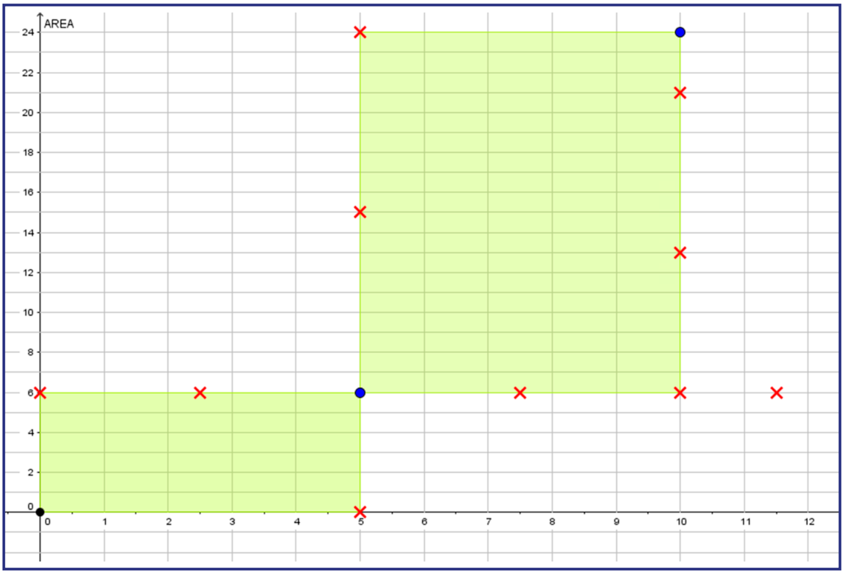


Foto del pizarrón con algunas conclusiones obtenidas en un aula.

Es interesante ver cómo las conclusiones elaboradas pueden estar ligadas a distintos registros de representación. Recordemos que nuestra intención con esta actividad es establecer nexos entre la situación geométrica (visible en la VG1) y las características del gráfico de la función que se empieza a vislumbrar en la VG2. En ese sentido, vemos que la primera afirmación de la imagen 8, centrada en la situación geométrica, permitiría reconocer en la VG2 que no puede haber dos puntos del gráfico en la misma vertical. De manera similar, la segunda afirmación permitiría asegurar que *si un punto está a la derecha (o a* *la izquierda) de otro en el gráfico, tiene que estar más arriba (o más abajo)*; y la cuarta es un caso particular de la segunda y permitiría decir que *si un punto está a la izquierda del (5;6), tiene que estar más abajo*. La tercera afirmación, que está centrada en la VG2, encuentra fundamento en la situación geométrica: la hipotenusa $\overline{AF}$ varía entre 0 y 10, mientras que el área del triángulo entre 0 y 24. De allí surge que podríamos ubicar el gráfico en un rectángulo grande, de 10 × 24; eso ocurrió de inmediato en una de las aulas, donde un alumno pasó al pizarrón y delimitó la región.

Más aún, apoyándose en las conclusiones acerca de la monotonía de la función estudiada, se podrían sombrear en el archivo las regiones en donde deben estar todos los puntos del gráfico (imagen 9) y ver cómo quedan determinados dos rectángulos más pequeños.

9



Determinación de zonas donde podría haber puntos del gráfico.

Luego de este trabajo la docente les propuso a lxs alumnxs que marcaran en sus pantallas puntos posibles para el gráfico, teniendo en cuenta que cumplieran con las propiedades enunciadas anteriormente. En la clase se reconocían estos puntos como posibles, pero no se contaba con herramientas para aceptarlos o rechazarlos. Ante esa situación, muchxs chicxs deseaban contar con una fórmula para calcular el área. Al momento de planificar habíamos anticipado que la actividad iba a generar incertidumbre. En las aulas, las docentes anunciaron que para continuar con el estudio de esta función no iban a trabajar con la fórmula, sino que construirían una herramienta con el programa que les iba a permitir, entre otras cosas, testear si esos puntos pertenecían o no a la gráfica.

La herramienta a la que se hace mención es el punto dinámico P. El punto P queda ligado a la figura geométrica dinámica por su definición: para cada posición del punto F, la abscisa de P corresponde a la medida de $\overline{AF}$ y su ordenada es el área del triángulo AEF (el programa calcula el área automáticamente y la llama “polígono1”). De esta manera, al mover el punto F en la VG1, el punto P actualizará sus coordenadas y se desplazará –ligado al movimiento de F– por el plano cartesiano de la VG2, haciendo visible los puntos del gráfico de la función.[5]

En nuestra secuencia proponemos que una vez que lxs alumnxs construyan el punto P, deslicen el punto F (en la VG1) para que se mueva P (en la VG2). Lxs estudiantes podrán corroborar que P pasa por los puntos (0;0), (5;6) y (10;24) marcados inicialmente y que se verifican las distintas propiedades enunciadas en el aula (“si se mueven a la derecha sube”, etc.). Mover el punto P también les permitirá controlar si el punto ingresado por ellxs pertenece o no a la gráfica. Por último, les proponemos activar el rastro del punto P a fin de visualizar más puntos de la misma gráfica.

Todo lo estudiado hasta el momento sin el punto P se revisita con esta herramienta, que es un medio para verificar, analizar y eventualmente proponer otros resultados y conclusiones sobre la función que se está estudiando.

La riqueza que introduce el punto P para el estudio de la función se centra en el hecho de que relaciona dinámicamente la situación geométrica de la VG1 con el gráfico de la función en la VG2, ligando cada punto del gráfico a

5. Sugerimos al lector realizar esta construcción en el archivo GeoGebra "Archivo con dos vistas gráficas", disponible para su descarga.

un triángulo específico, que se puede visualizar en el modelo geométrico, del cual el punto P recoge en sus coordenadas la medida de su hipotenusa y su área. Diseñamos las siguientes actividades para que lxs estudiantes puedan apropiarse de este sentido de la herramienta.

En particular, decidimos comenzar con una actividad en la cual el punto P permita, en un caso, determinar el valor del área para un cierto valor de hipotenusa dado, y en otro caso, buscar el valor de la hipotenusa para lograr determinada área. Este será el contenido de la actividad 5.

Antes de esto queremos señalar algunos hechos sucedidos en las aulas alrededor de la incorporación del punto P.

El movimiento inesperado de una representación

La ubicación del punto P en la VG2 dependía del triángulo particular que cada grupo tenía en la VG1, por eso para algunxs estudiantes P coincidió con (5,6) y para otrxs quedó próximo al punto que habían propuesto. En todos los casos observamos que lxs estudiantes no movían el punto F para lograr distintas posiciones de P. Cuando finalmente lo hicieron, invitados por las docentes o por alguno de sus pares, observamos que lxs estudiantes manifestaron asombro y entusiasmo ante ese movimiento inesperado.

Nos parece que ese asombro podría estar ligado a la novedad que introduce esta construcción del punto dinámico P, propia del GeoGebra: con lápiz y papel, los gráficos son representaciones "estáticas" tanto como las tablas o las fórmulas; en cambio, el punto P constituiría con su movimiento una nueva representación de la función íntimamente ligada al gráfico cartesiano convencional.

Que el movimiento de P no se logre con una acción directa sobre ese punto sino a partir del movimiento del punto F contribuye al asombro manifestado por lxs estudiantes. De hecho, pudimos observar que algunxs ubicaban el cursor sobre P intentando moverlo directamente. Por otro lado, esta dependencia entre los puntos P y F pone de manifiesto que cada triángulo obtenido en la VG1 determina una posición de P y por lo tanto un punto del gráfico. En las actividades anteriores de esta secuencia, lxs estudiantes quedaban a cargo de establecer esa relación.

Consideramos que la construcción del sentido del punto P y su relación con el punto F y la situación geométrica no son espontáneas sino que demandan la intervención de lx docente y el trabajo de lxs estudiantes en nuevas tareas que lo involucren.

El uso no previsto de una herramienta del programa

En un aula, mientras trascurría la actividad 4, algunxs estudiantes intentaron construir el gráfico completo de la función a partir de los tres puntos marcados hasta el momento: (0;0), (5;6) y (10;24). En ese intento utilizaron diferentes herramientas del GeoGebra como "Recta por dos puntos" (a partir del (0;0) y (10;24)), "Segmento por dos puntos" (en este caso trazando la poligonal determinada por esos tres puntos) y "Arco tres puntos". Respecto de esta última, un estudiante mencionó que era un "mejor gráfico" que el de "tramos rectos" porque era curva. Abajo (imagen 10) se muestra la pantalla de un grupo de estudiantes que usó las tres herramientas:

10

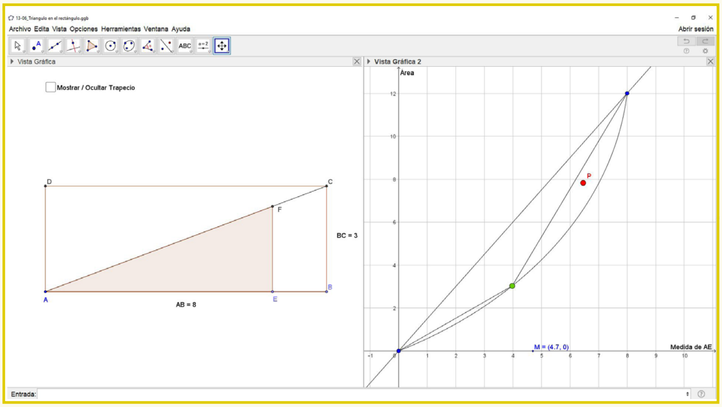


Imagen de la pantalla de un grupo de estudiantes al intentar producir el gráfico de la función.

Un grupo de estudiantes parecía muy convencido de que el gráfico obtenido con la herramienta "Arco tres puntos" era la curva que buscaban. Posiblemente, estaban poniendo en juego esquemas de acción importados de otros entornos tecnológicos: buscar entre las opciones que ofrece el programa hasta encontrar la herramienta que resuelve la tarea a realizar.

Cuando ingresaron el punto dinámico P, estxs alumnxs observaron que no pertenecía a la curva trazada por el uso de la herramienta "Arco Tres Puntos". Frente a eso, comenzaron a mover verticalmente el punto verde –ver imagen 10– que originalmente era el punto (5;6), esta acción modificó la curva que se visualizaba en la pantalla por ser este uno de los puntos que definía el "Arco Tres Puntos". Lxs alumnxs siguieron con ese movimiento hasta lograr que la nueva curva obtenida con esta herramienta pasara por la posición del punto P. Sin embargo, al hacer esto el punto verde ya no pertenecía al gráfico de la función, cuestión que parece no haber sido tenida en cuenta por estxs estudiantes.

Posteriormente, ante un pedido de la docente, movieron el punto F en la VG1 y lograron un cambio en la posición de P, que nuevamente se ubicó fuera del arco que aparecía en la pantalla. Por eso lxs estudiantes buscaron otro punto de abscisa 5 –moviendo el punto verde– para conseguir ajustar el arco a la nueva posición de P. Si bien este nuevo arco parecía contener tanto a los puntos fijos, (0;0) y (10;24), como a P y el punto verde, sabemos que si hubieran movido el punto F, la nueva posición de P no hubiera quedado sobre ese arco.

Hasta tal punto estxs estudiantes confiaban en que la herramienta que eligieron para graficar la curva es la correcta, que esa convicción pareció opacar las relaciones ya establecidas, redireccionando la tarea a la búsqueda de "un arco por tres puntos bueno", en el sentido de que contenga las distintas posiciones del punto P.

No perdamos de vista que la relación entre las variables de la figura dinámica y el punto P se irá construyendo a lo largo de las actividades. La irrupción de un punto cuyo movimiento en la pantalla depende de otro fue sorprendente y desestabilizó la relación ya construida entre el punto (5;6) y la situación geométrica en la VG1.

Esta secuencia de acciones fue observada por la docente C, que intervino para restituir el punto (5;6) como el único de abscisa 5 que pertenece al gráfico, tal como se había discutido en la actividad 4. También recuperó, en diálogo con lxs estudiantes, que la curva de la función debía contener a los tres puntos ya marcados y a cualquier posición del punto P. Finalmente, apoyándose en esta última condición, la docente reflexionó con lxs estudiantes que la herramienta "Arco Tres Puntos" no iba a permitir construir la curva buscada y que iban a aprender una manera de hacerlo con el programa.

UNA NUEVA TAREA USANDO EL PUNTO DINÁMICO P

Volviendo a las actividades de la secuencia planificada, como ya habíamos anunciado, la actividad 5 pondrá en juego la potencia del punto P para calcular valores de la función.[6]

ACTIVIDAD 5

Exploren en la VG2 por dónde pasa el punto P y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será, aproximadamente, el área del triángulo con hipotenusa $\overline{AF} = 3$?

b) ¿Cuál será la hipotenusa de un triángulo que tenga el área igual a 17?

En la planificación de esta actividad, decidimos presentar los ítems por separado a lxs alumnxs. Proponemos trabajar primero con el ítem a) y luego discutir su resolución en el espacio colectivo de la clase para compartir las diferentes respuestas de lxs estudiantes. Como es probable que se llegue a respuestas

6. Antes de hacer la actividad 5, les pedimos a lxs chicxs que guarden los cambios en el archivo con el punto P y puedan volver a esta versión más adelante. Después les proponemos que hagan un "guardar como" nombrando al nuevo archivo "Actividad 5" y que trabajen en este nuevo archivo para resolver la siguiente tarea. Así les quedará, en una versión separada, la resolución de esta actividad.

aproximadas y distintas, se les pide que respondan el próximo ítem con la mayor precisión posible. Luego, la discusión en el aula gira en torno a las respuestas obtenidas en el ítem b) y cómo llegaron a ese valor.

Para responder cada pregunta, lxs estudiantes deberán decidir si determinada posición del punto P en la VG2 –a la que llegan por arrastre del punto F en la VG1– cumple con el valor de la coordenada que se da como dato en cada ítem, y luego leer el valor de la otra coordenada. Para cada una de estas acciones, lxs alumnxs podrán apelar a diferentes herramientas del programa con el objetivo de lograr una respuesta.

En el ítem a), podrían ubicar el punto P de manera tal que el valor de su abscisa sea 3. En las aulas donde fue implementada la secuencia, algunxs estudiantes hicieron *zoom* utilizando las herramienta del programa "Aproximar" y "Alejar" en la VG2 para ajustar lo más posible la posición de P, moviendo F en la VG1, de manera tal que P se ubique sobre la línea vertical de la cuadrícula correspondiente a $x = 3$.

Señalemos que, si bien el movimiento del punto F parece ser continuo y recorrer todas las posiciones posibles sobre la hipotenusa, con el suficiente uso de la herramienta "Acercar" en la VG2 podemos observar que el punto P parece "dar saltos". Algunxs estudiantes que no lograban ubicar a P sobre la línea vertical de $x = 3$ utilizaron la herramienta "Acercar" también en la VG1 y de esta manera podían disminuir los "saltos" y lograr mayor precisión en esa tarea.

Una vez ubicado P, anticipamos que lxs estudiantes buscarían leer la ordenada de ese punto usando distintas herramientas del programa. En nuestras observaciones notamos que con frecuencia usaban la herramienta "Acercar" para poder obtener mayor cantidad de decimales en los valores que figuran en el eje y. Cuando se utiliza esa herramienta sobre el eje y se produce una ampliación de la imagen en la pantalla que, en algún momento, deja afuera de la misma al punto P. Eso obligó a lxs chicxs a trazar una recta paralela al eje x que pase por P, para sostener la visualización de la altura del punto y de esta manera poder leer en el eje y sus coordenadas. En el GeoGebra hay varias herramientas para trazar rectas y muchas de ellas fueron utilizadas por lxs estudiantes. En este sentido, nos parece importante discutir sobre las herramientas utilizadas ya que hemos observado que, en algunos casos, lxs chicxs trazan esa recta con la herramienta "recta por dos puntos" buscando "a ojo" el paralelismo con el eje *x*.

Como en el enunciado se pedía dar una respuesta aproximada, cada estudiante podría decidir hacer más o menos *zoom* y así dar valores con distinta cantidad de decimales. Otras formas de dar una respuesta aproximada podrían ser: afirmar que el área del triángulo con hipotenusa 3 es "un poquito mayor a 2", o decir "que está entre 2,1 y 2,2".

Teniendo presente que en el ítem b) vamos a pedirles a lxs chicxs que busquen la respuesta con la mayor precisión posible, y ante un escenario de respuestas tan variadas, pensamos que es propicio plantear en el espacio de discusión colectiva del ítem a) una nueva tarea: intentar obtener una respuesta lo más precisa posible.

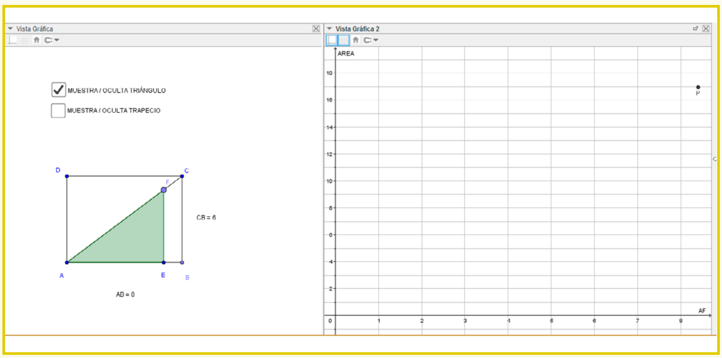
En la parte b), lxs estudiantes podrán reinvertir muchas de las estrategias y herramientas usadas en la parte a). Al haber compartido las distintas resoluciones del primer ítem durante la discusión colectiva, y al haber transitado las reflexiones sobre la precisión de las respuestas, darán mejores condiciones para abordar la tarea de ubicar, en el plano cartesiano, el punto P con la ordenada 17 y luego leer su abscisa.

A continuación, nos interesa compartir algunos episodios ligados al uso del *zoom* mediante las herramientas "Acercar" y "Alejar" que ocurrieron en nuestras aulas al resolver la actividad 5.

La interpretación de algunxs estudiantes acerca de la herramienta "Acercar"

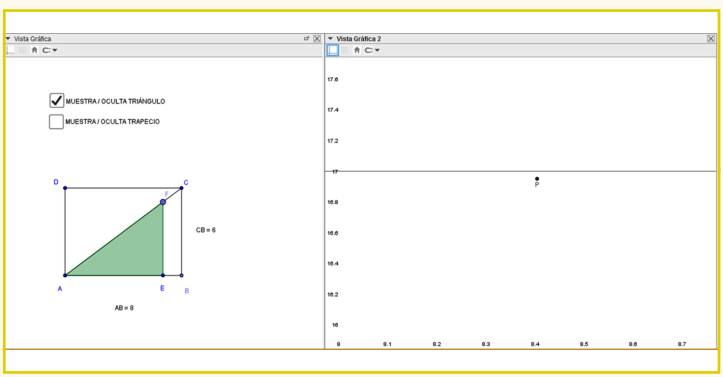
El análisis colectivo en las reuniones de nuestro grupo nos dio la posibilidad de reconstruir los hechos del aula y elaborar explicaciones acerca de ciertos comportamientos de lxs estudiantes que nos habían sorprendido en el transcurso de la clase. Más precisamente, durante el trabajo de un grupo de alumnas con el ítem b), pudimos observar que las estudiantes fueron moviendo el punto F hasta que lograron ver, en la VG2, que el punto P estaba ubicado sobre la recta horizontal $y = 17$, que era parte de la cuadrícula. De este modo garantizaron –visualmente– el cumplimiento de la condición que se daba como dato (ver imagen 11).

11



Luego, comenzaron a utilizar la herramienta "Acercar" y en la pantalla observaron que el punto P "se iba alejando" de la recta horizontal (imagen 12).

12



La siguiente acción de las estudiantes fue volver hacia atrás con la herramienta "Alejar" para llegar a la situación original, donde "se podía ver" que el punto quedaba nuevamente sobre la recta.

Dado nuestro conocimiento acerca del funcionamiento del programa, esperábamos que hacer *zoom* mediante las herramientas “Acercar” y “Alejar” mostrara a lxs estudiantes que el punto P no está sobre la recta horizontal $y = 17$. Por eso nos sorprendió –al analizar videos de la pantalla de la computadora[7] en la que trabajaron esas alumnas– que las estudiantes aparentemente despreciaban esa información y volvían hacia atrás con “Alejar”. El proceso de discusión en el grupo nos llevó a conjeturar que ellas podían creer que al hacer *zoom* modificaban la posición del punto, por lo que era mejor volver hacia atrás, y de ese modo lograr que nuevamente quede ubicado sobre la recta $y = 17$.

Nuestra conjetura la confirmamos al analizar otros videos de esa clase donde el mismo grupo, luego de llegar a una posición del punto P, tenía que determinar el valor de su abscisa. Para ello, las estudiantes trazaron una recta vertical por ese punto buscando leer el valor de la abscisa de P a partir de las marcas de la graduación del eje x cuyos valores numéricos eran visibles. Para lograr mayor precisión, aplicaron “Acercar” en la intersección de esa vertical con el eje x, y a medida que acercaban la imagen, el programa mostraba nuevas marcas y valores con más decimales en algunas de ellas. En determinado momento de este trabajo, las estudiantes “vieron” que la recta vertical coincidía con una de las marcas de la escala (imagen 13).

13

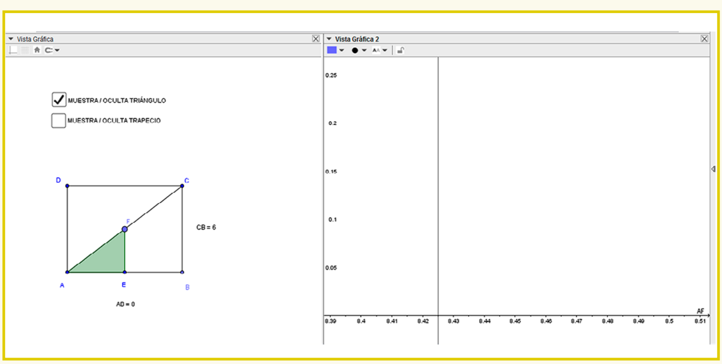


Imagen de la pantalla en el momento en que se visualiza la recta vertical sobre la marca correspondiente al valor 8,425.

7. Estos videos los obtuvimos por medio del programa Apowersoft. Este programa permite capturar en un video lo que se va viendo en la pantalla en tiempo real.

Frente a esta situación, una estudiante exclamó “lo logramos”: de ese modo podían leer el valor de la abscisa de P de manera “exacta”. Sin embargo, su compañera utilizó otra vez la herramienta “Acercar” y provocó que la vertical se separase visualmente de la marca (ver imagen 14). Pero la primera estudiante no estuvo de acuerdo con esa acción y manifestó: “¡Antes lo teníamos!”, e intentó volver al estado anterior mediante la herramienta “Alejar” (ver este episodio).[8]

14

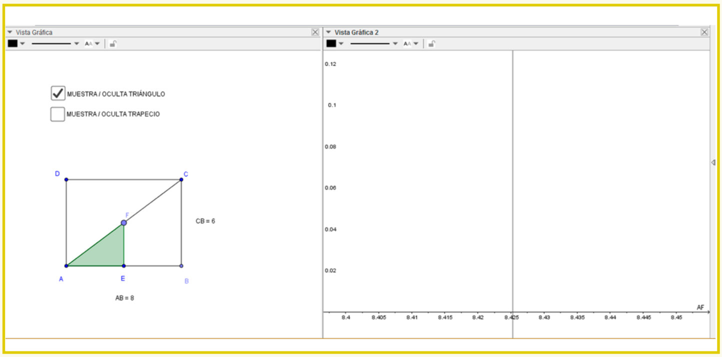


Imagen de la pantalla donde puede verse que la recta vertical no pasa por la marca en $x = 8{,}425$, valor numérico que ahora aparece en la pantalla y antes no.

Interpretamos que esas estudiantes consideraron de manera independiente la información visual disponible en cada pantalla, antes y después de hacer *zoom*. Para ellas, el uso de la herramienta “Acercar” habría cambiado la posición de la recta, cuando en realidad lo que se produjo fue un cambio de escala sobre el eje x que hizo visible que la intersección con la recta no estaba donde parecía. Ese es un ejemplo de una característica del uso del *zoom*: su aplicación no modifica los objetos matemáticos representados, sino que cambia la representación de esos objetos en la pantalla.

Más allá del ejemplo particular de esas dos estudiantes, es probable que para muchxs alumnxs todavía no sea claro que las diferentes imágenes que aparecen

8. Para ver con más detalle la pantalla de la computadora, les compartimos la grabación realizada con Apowersoft en este enlace.

en la pantalla –al hacer uso de las herramientas “Acercar” y “Alejar”– son representaciones del mismo objeto matemático. En nuestro ejemplo, la coordinación entre la información que proveen las dos vistas gráficas podría funcionar de control ya que, si no cambia el triángulo en la VG1, el punto P de la VG2 tampoco lo hará y, entonces, la recta vertical trazada seguirá siendo la misma. El episodio que acabamos de estudiar revela la necesidad de unx docente que, siendo consciente de la complejidad que encierra el uso de estas herramientas, proponga una tarea de coordinación como la que recién mencionamos.

Posibles conclusiones de la actividad 5 para hacer en el aula de secundario

Para finalizar esta actividad y la primera parte de la secuencia pensamos en generar dentro del aula un momento para elaborar conclusiones. Como parte de la discusión final del ítem b), lxs docentes podrían dar el valor exacto de la medida de $\overline{AF}$ buscado, $\frac{5 \times \sqrt{102}}{6}$, y acordar con lxs estudiantes que, por ser irracional, nunca lo vamos a encontrar con la computadora: siempre dará una aproximación. A partir de esto, para responder el ítem b), lxs estudiantes de uno de los cursos, entusiasmadxs por buscar esa aproximación, decidieron trabajar con quince decimales (la mayor cantidad de decimales que ofrece el programa), lo que les permitía diferenciar los valores obtenidos por cada grupo, que a priori parecían iguales.

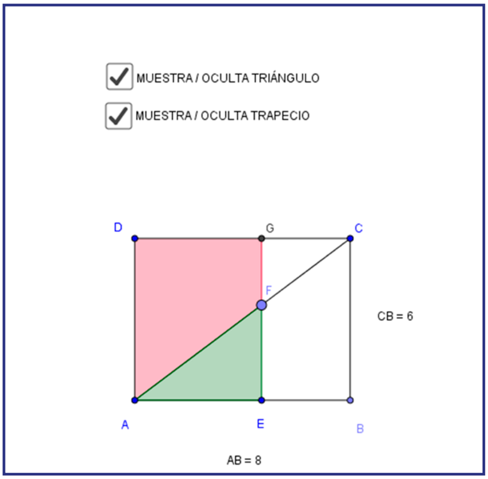
En la actividad 5 se quiso considerar el gráfico cartesiano como una fuente de información numérica (aunque aproximada) sobre el comportamiento de la función. Para terminar de construir el gráfico de la función estudiada hasta el momento, pensamos recurrir a la herramienta “Lugar geométrico”. La gráfica de la función por medio de esa herramienta reemplaza el trazo que aparece cuando se activa el “Rastro” del punto P.

Creemos que es necesario reflexionar con lxs estudiantes sobre el papel del gráfico cartesiano y cómo se vinculan las dos representaciones. Por un lado, con una mirada puntual, cada posición del punto F en la VG1 determina un triángulo sombreado y “genera” un punto en la gráfica de la VG2 –cuyas coordenadas *x* e *y* representan la medida de la hipotenusa y el área (respectivamente) de dicho triángulo–. Por otro lado, con una mirada global, el dinamismo del punto F permite visualizar la familia de triángulos y el punto P –que se mueve sobre el plano cartesiano representado en la VG2– recorre la gráfica de la función en estudio, permitiendo advertir algunas características del tipo de variación.

Estudio del área de una familia de trapecios a través de una función y la construcción de su gráfico cartesiano. Análisis comparativo de los gráficos de las dos funciones

En esta segunda parte se trata de estudiar una nueva función: la variación del área del trapecio ADGF (imagen 15) en función de la medida del segmento $\overline{AF}$. A lxs estudiantes les explicamos que vamos a trabajar con otra figura: el trapecio que queda por encima del triángulo. Les proponemos a lxs alumnxs volver al archivo que habíamos guardado antes de empezar la actividad 5. Para visualizar el trapecio debían cliquear en la casilla correspondiente (ver imagen 15).

15



Vista de las dos figuras sombreadas.

Una vez que han realizado esos ajustes en GeoGebra, les proponemos a lxs estudiantes trabajar con la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 6

Muevan el punto F para obtener distintos trapecios y respondan:

¿Entre qué valores varía la longitud de cada lado del trapecio ADGF?

¿Entre qué valores varía el área del trapecio ADGF?

Esta actividad tiene por objetivo lograr un primer encuentro de lxs estudiantes con la familia de trapecios. Entender que el lado $\overline{AD}$ permanece invariable para todos los miembros de la familia. Que la medida de $\overline{AF}$, como ya sabían, varía entre 0 y 10. La medida de $\overline{DG}$ varía entre 0 y 8, ya que es siempre parte del lado $\overline{DC}$, y la medida de $\overline{GF}$ varía entre 0 y 6. Una diferencia con respecto a lo estudiado en el triángulo es que ahora, al mover el punto F, mientras unas medidas aumentan otras disminuyen.

A continuación, se va a estudiar en el aula cómo cambia el área del trapecio en función de la medida de $\overline{AF}$. Pensamos que es importante que lx docente explicite esta cuestión con la clase antes de seguir el trabajo y que lo deje también escrito en el pizarrón.

Tal como hicimos con el triángulo, será conveniente acordar que, para estudiar la variación del área del trapecio, se aceptará como medida de $\overline{AF}$ el valor 0 (con área 0) y el valor 10 (con área 24) a pesar de que en un caso resulta un segmento y en el otro un triángulo.

A partir de lo trabajado en la actividad 6, se espera que los puntos (0;0) y (10;24) sean reconocidos como parte del gráfico de la función “Área del trapecio en función de la medida de $\overline{AF}$”.

Para continuar con el estudio de esta función se invita a lxs estudiantes a introducir el punto móvil Q = (AF, polígono 2). Se puede sugerir que lo pinten de otro color para diferenciarlo del punto P anterior.

Tal como hicimos con el triángulo y el punto P en la actividad 5, la primera tarea que deberán resolver con el punto Q tiene que ver con la determinación del área y la medida de $\overline{AF}$ a partir de una lectura sobre el gráfico de la función que va configurando el desplazamiento del punto Q.

ACTIVIDAD 7

Exploren en la vista gráfica 2 por dónde va pasando el punto Q y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será, aproximadamente, el área del trapecio cuando $\overline{AF} = 3$?

b) ¿Cuál será, aproximadamente, la medida de $\overline{AF}$ para que el trapecio tenga área igual a 21?

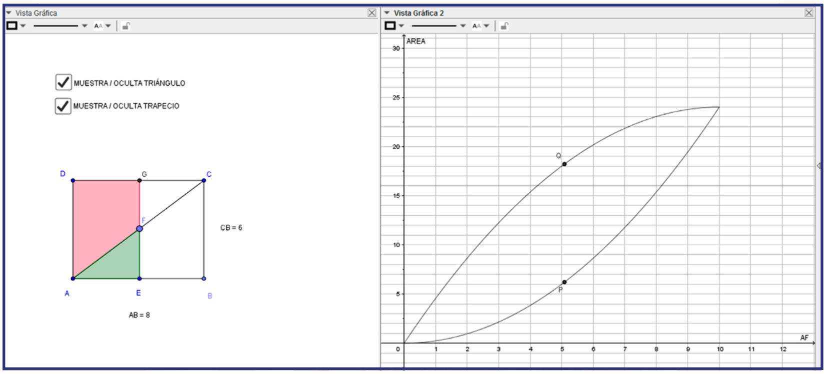
Anticipamos que al hacer esta actividad lxs estudiantes pueden reinvertir lo puesto en juego en la actividad 5 y, por lo tanto, es una oportunidad para volver a usar las técnicas que se desarrollaron allí.

A continuación proponemos tres actividades más en las que lxs estudiantes deben considerar, de manera conjunta, las dos funciones estudiadas.

- La primera de ellas, la actividad 8, apunta a poner en relación características del movimiento de los dos puntos móviles –P y Q– con la variación del área del triángulo y del trapecio, a medida que se mueve el punto F.
- La actividad 9 invita a usar los puntos P y Q –y las curvas por donde se desplazan esos puntos– para calcular valores particulares de una de las variables. Esta es una tarea similar a la realizada en la actividad 7, pero ahora genera la necesidad de poner en juego las dos funciones en estudio.
- Por último, la actividad 10 propone una búsqueda de argumentos geométricos para algunas características de las dos curvas estudiadas, con el objetivo de continuar estableciendo vínculos entre las dos representaciones dinámicas.

Para comenzar la actividad 8, planeamos que lx docente utilice un proyector para mostrar cómo al mover el punto F en la VG1 automáticamente se mueven los puntos P y Q en la VG2. Proponemos que en la pantalla donde se proyecta en el aula se vean las gráficas completas de las dos funciones que se pueden construir con la herramienta “Lugar geométrico”, como se hizo previamente (ver imagen 16).

16



Pantalla con la representación gráfica de las dos funciones y los puntos móviles P y Q ligados a la situación geométrica de la VG1.

En este primer momento de la actividad, se les pide a lxs estudiantes que reconozcan las características de las posiciones relativas de P y Q en la VG2. Con ello se busca que, con el acuerdo de lxs estudiantes –aunque esto requiera una importante participación de lx docente–, se lleguen a formular las siguientes propiedades:

Al mover el punto F, los puntos P y Q verifican:

- Que coinciden “al principio y al final del movimiento”.
- Que están siempre en la misma vertical.
- Que Q siempre está por encima de P (salvo al principio y al final).

La idea es que estas afirmaciones se escriban en el pizarrón a medida que surgen y se acompañen con verificaciones visuales de las mismas en la VG2. Recién después de hacer esto, se les propone a lxs estudiantes la siguiente tarea.

ACTIVIDAD 8

Apoyándose en las figuras (trapecio y triángulo) de la VG1, expliquen por qué pasa cada una de las afirmaciones escritas en el pizarrón.

Al planificar esta actividad, consideramos que es necesario organizar el trabajo en dos tiempos:

- En un primer momento, lx docente se centra –con lxs estudiantes– en la interpretación de las propiedades que se formulan sobre los puntos P y Q en términos de la situación geométrica estudiada.
- En un segundo momento, lxs estudiantes deben elaborar una justificación de por qué pasa eso, considerando las áreas de las figuras involucradas.

Por ejemplo, al respecto de la tercera afirmación –*Q siempre está por encima de P (salvo al principio y al final)*–, en un primer momento se trata de llegar a una formulación como: *decir que el punto Q siempre está por encima de P significa que, para cualquier medida de* $\overline{AF}$ *(salvo en los extremos), el área del trapecio será mayor que el área del triángulo.*

En cuanto al segundo momento, donde se requiere la elaboración de una justificación, en un aula algunxs estudiantes señalaron que "el área del trapecio es igual al triángulo AEF + la del rectángulo de base $\overline{DG}$ y lado vertical $\overline{GF}$. Por lo que el área del trapecio es mayor o igual a la del triángulo".

Decidimos poner en común las explicaciones en forma oral porque anticipamos que para lxs estudiantes sería engorroso escribir estos argumentos. La dinámica que diseñamos para trabajar en el espacio colectivo con las respuestas individuales consiste en que lx docente tome la respuesta de algún grupo de estudiantes y pregunte al resto de la clase si está de acuerdo o no con los argumentos dados. La idea es que con los aportes del resto de la clase se complete cada explicación. Finalmente, queremos que queden escritos en el pizarrón los distintos argumentos.

En un aula a cargo de la docente C,[1] quedaron escritas dos argumentaciones diferentes respecto de la tercera afirmación. Para seguir estas explicaciones, recomendamos ver la imagen 17:

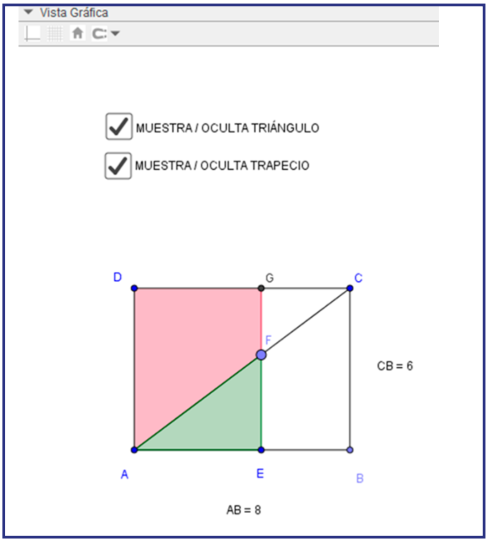
- Las figuras forman un rectángulo, y $\overline{AF}$ no es diagonal de ese rectángulo sino que está por debajo de ella, y como la diagonal divide al

1. En la Introducción a este libro, mencionamos los nombres de las docentes y otros datos de esta implementación.

rectángulo en dos triángulos iguales, el triángulo AEF que se forma aquí tiene menor área que el trapecio.

- Si se forma un rectángulo de base $\overline{DG}$ y altura $\overline{GF}$, el trapecio se forma con ese rectángulo y un triángulo igual al que estamos comparando.

17



En otra de las aulas, donde se realizó la experiencia a cargo de la docente L, ella decidió presentar la actividad 8 de un modo más abierto, dando lugar a otras miradas de lxs estudiantes. Comenzó mostrando una pantalla como la de la imagen 16 en la que movió el punto F y afirmó: "Cuando muevo el punto F de la VG1, los puntos P y Q también se mueven en la VG2". Luego les propuso la siguiente tarea:

ACTIVIDAD 8 EN EL AULA DE LA DOCENTE L

Escriban al menos tres afirmaciones referidas a la relación entre P y Q.

Después de que la docente L dio la consigna, una integrante de nuestro equipo que estaba como observadora –a la que llamaremos docente S– se acercó a una pareja de estudiantes (Víctor y Esteban) que estaban trabajando con la misma computadora. En ese grupo surgieron ideas muy distantes de las que habíamos anticipado. Víctor comenzó afirmando que veía “el ala de un avión” en la figura que encerraba las dos gráficas y comenzó a caracterizarla, mencionando también su interés por la aerodinámica. En su descripción indicaba partes rectas y otras curvas “como un círculo”. Esteban, por el contrario, se centró en las dos figuras geométricas de la VG1. Apoyado en esas figuras, intentó explicar las diferencias entre las formas de las curvas asociadas a cada función.

En cierto momento la docente L redireccionó la tarea y compartió con toda la clase el hecho de que los puntos P y Q estaban siempre en la misma vertical, uno arriba del otro, y pidió a lxs estudiantes que buscaran una explicación de eso que se veía.

Fue allí donde la interacción entre Víctor y Esteban continuó a propósito de esta tarea y, si bien en las primeras explicaciones los estudiantes parecían referirse a objetos diferentes, la interacción entre ambos continuó, sostenida por la docente S, y los argumentos de los dos se fueron enlazando para explicar con otras palabras las observaciones iniciales de cada uno.

En el grupo que estamos estudiando se dio el siguiente diálogo:

> DOCENTE. ¿Está siempre el punto Q arriba del punto P?
>
> VÍCTOR. No, acá debajo de todo, en el 0, cambia.
>
> DOCENTE. ¿Qué le pasa ahí?
>
> VÍCTOR. Pasa que queda P arriba del Q [con esto se refiere a que están superpuestos].
>
> ESTEBAN. Lo que pasa… al principio, son iguales. Después va tomando mayor, mayor área el trapecio.
>
> DOCENTE. ¿Siempre mayor área? ¿Por qué?
>
> ESTEBAN. Sí… lo que pasa es que él va comiendo de a mucho y él de a poco.
>
> DOCENTE. ¿Quiénes son él y él? ¿Quién es el que va comiendo de a mucho?
>
> ESTEBAN. El trapecio.

DOCENTE. ¿Qué quiere decir con que "va comiendo de a mucho"?

ESTEBAN. (*Superponiéndose con la docente*) Pero también tienen un límite…

DOCENTE. Esperá… no avances. Yo no entendí bien "él va comiendo de a mucho". ¿Vos entendiste? (*dirigiéndose a Víctor*)

VÍCTOR. No.

ESTEBAN. Porque esto al principio va comiendo de a mucho (*señala el trapecio en la VG 1*).

VÍCTOR. ¿Cómo "comiendo"? (*lo dice bajito, casi no se lo oye*)

DOCENTE. Él te pregunta cómo "comiendo".

ESTEBAN. ¿Cómo? Porque… (*duda*)

DOCENTE. ¿Qué querés decir con "comiendo"?

VÍCTOR. Porque crece.

ESTEBAN. Crece de área.

VÍCTOR. Aumenta el área.

ESTEBAN. De manera exagerada.

En esos intercambios los estudiantes se separan de la pregunta inicial de la docente L para hilvanar una explicación referida a la manera en que crece el área de cada figura. Esteban comienza con expresiones muy personales que Víctor no comprende. Frente a un pedido de mayor explicación, es Víctor mismo el que aporta términos que permiten precisar la idea de Esteban. Los últimos cuatro intercambios, que se producen muy rápidamente, muestran una sintonía entre ellos, se completan en sus decires.

A continuación de ese diálogo, Esteban comienza a mover el punto F en la pantalla desde una posición en el punto medio de la diagonal hasta el extremo C.

ESTEBAN. Hay un punto en que el triángulo empieza a exagerarse, vuelve a comer la parte que le queda (*señalando con el mouse la región EFCB de la VG1, ver imagen 16*) y vuelve a exagerarse de

> manera tan rápida que… lo hace tanto que hay un punto en que se van juntando
> DOCENTE. ¿Eso tiene que ver con lo que vos decías al principio, que acá va recto, acá curvo? (*La docente se dirige a Víctor y señala en la pantalla la imagen de las dos curva*s)
> VÍCTOR. Sí. En uno como que se acelera y en el otro…
> ESTEBAN. Es verdad, tiene razón él… ¡también! Los dos apuntamos igual.

A continuación, Víctor vuelve a sus primeras afirmaciones sobre la forma de la figura. La docente S hace una síntesis y recupera los dichos de Esteban, donde hablaba de que el trapecio iba comiendo área:

> VÍCTOR. Como que el trapecio aumentaba más rápido de área. Como que este (*señala el trapecio*) va creciendo tanto que este (*señala el triángulo*) se tiene que apurar.
> ESTEBAN. Y este, con lo pequeño que le quedaba, empieza a subir de manera exagerada acá (*señala el triángulo con el punto F cerca del extremo C*).

En todos los intercambios de ese episodio aparecen argumentos matemáticos y no matemáticos, algunos centrados en la situación geométrica y otros en el gráfico de las funciones que modelizan el crecimiento de las dos áreas. Los estudiantes se mueven con fluidez entre las ventanas gráficas, apoyando sus argumentos en la visualización de estas representaciones múltiples, dinámicas y ligadas.

Detenernos en las voces de los estudiantes nos permite acercarnos a la trama de relaciones que van construyendo y entender cómo, partiendo de recortes y formas de expresarse muy diferentes, llegan a elaborar un discurso común que le permite a cada uno ir completando las ideas del otro. En los tramos finales, cuando la docente restituye las primeras ideas de cada uno, ambos estudiantes las aceptan rápido y entablan diálogos fluidos que permiten profundizarlas y precisarlas.

En la siguiente actividad, las preguntas apuntan a que lxs estudiantes utilicen los gráficos de las funciones para responder.

ACTIVIDAD 9

Resolver las siguientes tareas trabajando en la VG2:

a) Buscar cuál tiene que ser la medida aproximada de $\overline{AF}$ para que el triángulo tenga área 8 y cuál tiene que ser la medida aproximada de $\overline{AF}$ para que el trapecio tenga área 8.

b) Calcular aproximadamente la medida de $\overline{AF}$ para que el trapecio tenga la misma área que el triángulo de hipotenusa 7,2.

En esta actividad, las preguntas apuntan a reforzar el hecho de que si un triángulo y un trapecio tienen la misma área, los puntos correspondientes en los gráficos de ambas funciones se ubican en la misma recta horizontal.

En el ítem a) buscamos que lxs estudiantes puedan reutilizar algunas de las estrategias de lectura de las etiquetas de los puntos móviles, desplegadas en la actividad 5. Una de las estrategias que anticipamos es que lxs estudiantes tracen la recta $y = 8$, determinen los puntos de intersección de esa recta con las dos curvas y luego lean el valor de la abscisa correspondiente a cada punto. Esta acción se podría completar trazando la vertical por cada uno de esos puntos y, eventualmente, haciendo *zoom* con la herramienta “Acercar” en la zona donde se corta esa vertical con el eje x para leer el valor con mayor precisión. Determinar varios puntos de igual ordenada trazando una recta horizontal es un recurso que usualmente se trabaja en las primeras actividades de lectura de gráficos, en general sobre una sola función. Cabe destacar que en esta oportunidad se estaría realizando simultáneamente sobre dos funciones representadas sobre un mismo sistema de ejes cartesianos.

Otra estrategia que observamos en las aulas donde se implementó la secuencia fue la habilitación de la etiqueta de los puntos móviles P y Q, de manera que muestren los valores de las coordenadas, y luego mover el punto F hasta lograr que el valor de ordenada sea 8 para cada uno de los puntos. Como este objetivo no se puede alcanzar para una sola posición del punto F, lxs estudiantes debieron realizarlo en dos etapas: primero movieron F hasta que el punto P tuviera ordenada 8, para leer allí el valor de la primera coordenada y luego volvieron a mover el punto F para hacer lo mismo con Q.

Como en el ítem b) no se ofrece el dato del área del trapecio buscado, consideramos que la resolución de este ítem presenta una complejidad mayor que el ítem a). Teniendo en cuenta eso, decidimos realizar una puesta en común donde se compartan las estrategias de resolución del primer ítem, con el objetivo de favorecer la comprensión de esta nueva consigna y para abordar su resolución en mejores condiciones.

En algunas aulas donde se implementó la secuencia, esta dificultad que anticipamos con el ítem b) no quedó saldada con la puesta en común ya que muchxs estudiantes interpretaron y manifestaron que lo que se buscaba era obtener un trapecio y un triángulo con igual área "al mismo tiempo", y eso no era posible.

Esa imposibilidad es consecuencia de las características del modelo dinámico con el que están trabajando, en el cual se utiliza solo el punto F para modificar las dos figuras en estudio –el trapecio y el triángulo–. En cada posición del mismo, el área del trapecio es mayor que el área del triángulo, tal como se concluyó a partir de la actividad 8. Al dialogar con lxs estudiantes sobre cómo responder a este ítem, algunxs planteaban la necesidad de disponer de dos puntos móviles que permitieran cambiar las dos figuras de manera independiente. Incluso, algunos grupos intentaron incorporar ese nuevo punto a la construcción sin lograr el efecto deseado.

Fue necesario discutir la consigna con el curso para aclarar que no se pretendía lograr la misma área en ambas figuras para un único valor de $\overline{AF}$ (como decían lxs estudiantes, "al mismo tiempo") sino que, a partir de conocer el área del triángulo con hipotenusa 7,2 se debe buscar una nueva medida de $\overline{AF}$ para un trapecio cuya área sea igual a la de ese triángulo. En una de las aulas se utilizó un esquema como el de la imagen 18 para acompañar la explicación de la consigna.

18

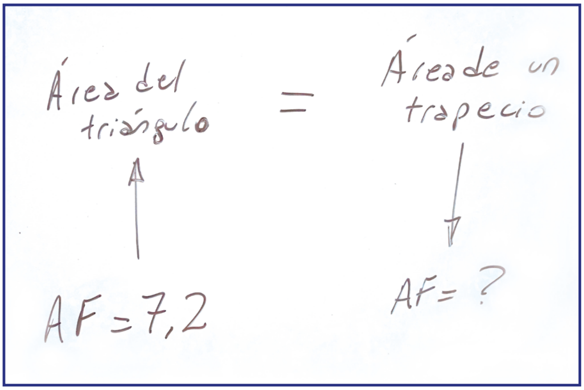


Imagen del pizarrón con el esquema realizado
por la docente.

Con respecto a las estrategias de resolución de este ítem, anticipamos que lxs estudiantes podrían trazar rectas verticales y horizontales, como se ve en la imagen 19.

19

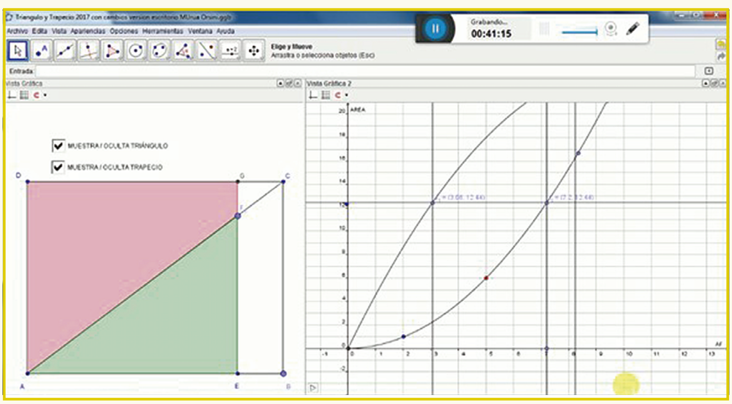


Imagen obtenida del video Apowersoft tomado en una
de las computadoras de un grupo de estudiantes.

Esta estrategia –que fue utilizada por uno de los grupos– no pone en juego los puntos móviles y es análoga a la que se podría realizar en lápiz y papel.

Otras resoluciones que anticipamos y que con algunas variantes observamos en las aulas utilizan los gráficos de las funciones y los puntos móviles P y Q.

Por ejemplo, un grupo de estudiantes –que no tenían habilitadas las etiquetas de los puntos P y Q con sus coordenadas– trazaron una recta vertical por el punto P y movieron F hasta que esa recta cortara al eje x en 7,2. Luego trazaron una horizontal por P y crearon un nuevo punto (llamado D) en la intersección de esa horizontal y la gráfica del área del trapecio.[2] Por último, trazaron una vertical por Q, movieron el punto F hasta que ese punto coincidiera visualmente con el punto D y leyeron el valor de su abscisa en el eje x.

Por último queremos compartir una estrategia tomada por varios de los grupos observados donde solo se utilizan los puntos móviles P y Q. La misma consiste en mover el punto F hasta que P tenga abscisa 7,2, leer el valor de la segunda coordenada (en este caso 12,44), luego mover nuevamente F hasta que la ordenada del punto Q sea 12,44 y observar en la primera coordenada de Q el valor de $\overline{AF}$ buscado.

Las actividades 8 y 9 apuntaron a comparar el comportamiento de las dos funciones, aprovechando la visualización de los dos gráficos en la misma pantalla. En la actividad 8 se trabajó en torno a la posición de los puntos P y Q, que se encuentran siempre en la misma vertical. Esto permitió considerar de manera conjunta los puntos de los dos gráficos que corresponden al mismo valor de la hipotenusa $\overline{AF}$. En la actividad 9 se estudió, en un caso particular, los puntos de las gráficas ubicados a la misma altura, en la misma horizontal. Se trata ahora, en la actividad 10, de considerar en forma general esa situación donde una recta horizontal corta a cada gráfica.

ACTIVIDAD 10

Si trazamos una línea horizontal y la vamos moviendo entre $y = 0$ e $y = 12$, veremos que cruza las dos gráficas y que la intersección con la gráfica del área triángulo está siempre a la derecha de la intersección con la gráfica del área trapecio.

continúa en p. 62 >>

2. Una pequeña variante de esta parte de la resolución, que observamos en un grupo, es leer en las coordenadas de P el valor del área del triángulo con la medida de $\overline{AF}$ igual a 7,2 y trazar una horizontal por ese valor de y para determinar el punto de intersección con el gráfico del área del trapecio.

Apoyándose en las figuras (trapecio y triángulo) de la VG1, den argumentos de por qué pasa esto.

Esta actividad solo se realizó en una de las aulas donde implementamos esta propuesta. Allí la docente leyó este enunciado mientras mostraba con el proyector lo que expresa la consigna. Notemos que para lograr explicar lo que se pide, lxs estudiantes deberán considerar un triángulo y un trapecio de la situación geométrica de la VG1 que tengan la misma área. Como ya dijimos, el modelo dinámico no va a permitir atrapar al mismo tiempo estas dos figuras.

Nuevamente, eso fue problemático para muchxs estudiantes en el aula. Sin embargo se lograron realizar varios acuerdos:

- En primer término, todxs lxs estudiantes entendieron que si las figuras iban a dar puntos sobre la misma horizontal debían tener igual área.
- Con el modelo dinámico todxs lograron contestar que las dos figuras solo tienen igual área cuando la medida de $\overline{AF}$ es igual a 0 y cuando es igual a 10.
- Algunxs estudiantes lograron ir más allá del modelo para llegar a formular que si pudiéramos mover por separado los puntos P y Q, logrando que queden en la misma recta horizontal, eso significaría que las dos figuras en la VG1 tienen igual área.
- P está siempre a la derecha de Q porque, para que las dos figuras tengan igual área, la medida de $\overline{AF}$ para el triángulo debe ser mayor que la medida de $\overline{AF}$ para el trapecio.

Esto último fue enunciado por un grupo y hubo que trabajar en el aula para que todxs lxs estudiantes lo comprendieran y acordaran.

Reflexiones finales

En esta secuencia nos propusimos trabajar en torno a la relación entre una situación geométrica dinámica, las funciones que pueden definirse a partir de ella y sus gráficos cartesianos. Por un lado, se puso en juego un sentido de la función como herramienta modelizadora de situaciones con magnitudes variables. Por otro lado, se puso de relieve la representación en gráficos cartesianos como soporte que permite no solo leer información –puntual y global– sobre cada función sino también estudiar comparativamente los modos en los que varía cada una de ellas.

Nos interesa hacer énfasis en que, a medida que se avanza con las actividades en la secuencia, se produce un incremento en la complejidad de las representaciones con las que lxs estudiantes deben interactuar. Se comienza con una figura geométrica dinámica en una sola vista gráfica (uno de cuyos estados se muestra en la imagen 1) y en las últimas actividades lxs estudiantes deben interactuar con una sofisticada pantalla como la que se observa en la imagen 16.

Las actividades de la secuencia requieren ineludiblemente un juego entre el marco funcional y el geométrico. Este juego se plasma a través de representaciones con características solo posibles en el entorno informático: el dinamismo de las figuras geométricas y la manera de ligar mediante puntos móviles las representaciones de las dos vistas gráficas. Estas dos características enriquecen la tarea de coordinación entre esos registros, y permiten una mayor comprensión de la noción de función. A propósito de eso, queremos mencionar que algunxs estudiantes que participaron de esta experiencia rescatan que les ayudó a "entender mejor la idea de dependencia entre variables", noción constitutiva del concepto de función.

Desde el punto de vista de la enseñanza, las tres docentes que implementaron la secuencia valoraron el clima de trabajo que se generó en el aula y el compromiso de sus estudiantes con las tareas realizadas a través del software GeoGebra.

Una de ellas, la docente L, manifestó que "el trabajo sobre modelos dinámicos resultó muy atractivo y eficaz a la hora de analizar los gráficos cartesianos y sus variaciones". El relato sobre cómo dos de sus estudiantes resolvieron la actividad 8 es un ejemplo de cómo ellos pueden abordar, con sus propias palabras y en interacción con una pantalla, la problemática del estudio comparativo de la velocidad de crecimiento de las dos funciones. Entendemos que la docente L valora su experiencia con esta secuencia como una forma de abordar esta cuestión muchas veces compleja de trabajar en el aula.

Esperamos que la secuencia que compartimos y los episodios presentados se constituyan en un aporte para pensar la enseñanza de la introducción al concepto de función en un aula enriquecida con computadoras.

Sobre lxs autorxs

LAURA MARINA ACOSTA es profesora en Disciplinas Industriales, especialidad Matemática y Matemática Aplicada, por el Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN). Realizó la Especialización Superior en Enseñanza de la Matemática para Profesores de Nivel Medio en la Escuela de Maestros de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA). Se desempeña principalmente como profesora de escuelas secundarias. Forma parte del Grupo de los Lunes desde 2016.

MARINA ANDRÉS es profesora de Matemática recibida en el Instituto de Enseñanza Superior Nº 1, actualmente jubilada. Se desempeñó como profesora de Matemática en escuelas secundarias e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Es coautora de documentos y artículos relacionados con la enseñanza de la matemática y de textos escolares.

MARÍA NIEVES BRUNAND es profesora de Matemática recibida en el Instituto Superior de Formación Docente Nº 17. Se especializó en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Se desempeñó como tutora del curso virtual a distancia "Reflexiones, en torno al álgebra y las funciones y su enseñanza" en el Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD). En la actualidad, se desempeña como docente en escuelas secundarias de La Plata y en la licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE.

MILAGROS M. CERVIO es profesora de Educación Superior en Matemática recibida en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente se desempeña como docente en el nivel secundario en escuelas de la Provincia de Buenos Aires.

MARÍA TERESA CORONEL es profesora de Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente Nº 34 "Profesor Héctor J. Médici". Enseña en la Escuela de Educación Secundaria Nº 20 "Estados Unidos de América". Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios.

ENRIQUE DI RICO es integrante del equipo docente de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integrante del equipo de investigación en el área de Matemática para el Nivel Secundario de la misma universidad. Es docente del bloque pedagógico de la Comisión de Carreras de Profesorado de Enseñanza Media y Superior (CCPEMS) y del Instituto de Investigaciones en Didáctica de las Ciencias Naturales y la Matemática (CEFIEC) de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Es miembro del Equipo Técnico Regional en el área de Matemática para el Nivel Secundario en la Dirección del Formación Continua (DFC) de la Provincia de Buenos Aires.

GEMA FIORITI es magíster en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. Dirige el Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) de la Universidad Nacional de San Martín (Unsam). Se desempeña como profesora titular de Didáctica de la Matemática en la Especialización y Maestría en Enseñanza de las Ciencias (orientación matemática) de la misma universidad. Es coautora de artículos sobre enseñanza de la matemática, documentos para docentes y textos escolares de matemática.

ROMINA FLORES es profesora de Matemática por el Instituto "Padre Elizalde". Enseña en la escuela secundaria Instituto María Ana Mogas y en el Instituto Barrio Marina. Se encuentra en proceso de finalización de la Licenciatura en Matemática Aplicada (UNLaM) y de la Especialización en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Integra el Grupo de los Lunes desde 2017.

CLAUDIA KERLAKIAN es profesora de Matemática y Cosmografía, actualmente jubilada. También es licenciada en Educación con orientación en Didáctica de la Matemática y en Diseño, Coordinación y Evaluación de Proyectos por la Universidad Nacional de Quilmes (UNQ). Se especializó en la enseñanza de la Matemática para el nivel primario en el Centro de Estudios de Pedagogía Avanzada (CePA) e integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios.

JUAN PABLO LUNA es profesor de Matemática por la Universidad de Buenos Aires (UBA) y está cursando la Maestría en Formación Docente en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). Forma parte del Grupo de los Lunes desde sus inicios. Se desempeñó como docente de escuelas secundarias hasta 2019 y como formador docente en escuelas primarias, en CePA (la actual Escuela de Maestros de CABA) y en cursos del INFoD, entre otros. Desde 2013 trabaja en la UNIPE, donde realiza tareas de docencia en dos carreras destinadas a profesores de matemática e investiga en temas de enseñanza.

CECILIA SILVINA PINEDA es profesora de Matemática (ISFD N° 41 de Almirante Brown). Estudió, además, en el Profesorado de Educación Media y Superior en Matemática (UBA) y realizó la Especialización en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Se desempeña como docente de escuelas secundarias de la Provincia de Buenos Aires y en el nivel superior en la UNIPE y en la UBA. Forma parte del Grupo de los Lunes desde 2017.

GERMÁN OMAR PUGLIESE es profesor de Matemática y especialista en Enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria por la UNIPE. Actualmente trabaja como docente en escuelas secundarias y en el nivel superior. En la Universidad Nacional Arturo Jauretche (UNAJ) dicta el Curso de Preparación Universitaria de Matemática y Matemática Inicial. En el campo de la formación docente, es profesor en el Ciclo de Complementación Curricular de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Secundaria Virtual de la UNIPE. Integra el Grupo de los Lunes con el propósito de pensar en conjunto con otros docente la enseñanza de la matemática. Participa en comunicaciones y talleres de diferentes congresos, jornadas y encuentros a propósito de la enseñanza de la matemática.

VALERIA RICCI es profesora de Educación Superior en Matemática (Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González") y especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Se desempeña como docente en el nivel secundario en escuelas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y en el nivel superior en el ISP "Dr. Joaquín V. González" y en la UNIPE. Es coautora de documentos curriculares para la enseñanza de la matemática. Forma parte del Grupo de los Lunes desde el 2017.

ESTEBAN IGNACIO ROMAÑUK es profesor de Matemática (Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 17 La Plata). Cursó la Especialización en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Actualmente es docente de escuelas secundarias públicas de la Provincia de Buenos Aires, en el Instituto Superior de Formación Técnica Nº 12 y desempeña el cargo de jefe del departamento de Ciencias Exactas y Naturales en la Escuela secundaria Nº 22. Participó del Grupo de los Lunes durante el desarrollo de este material.

CARMEN SESSA integra el Grupo de los Lunes desde sus inicios. De formación inicial en Matemática, se especializó en Didáctica de la Matemática desde 1991 y trabaja en formación e investigación en el área. Es profesora titular en la UNIPE y dirige la carrera de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas para la Escuela Secundaria. También es docente en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA.

MARINA ESTHER TORRESI es profesora de Matemática egresada del Instituto Superior de Formación Docente Nº 41 de Almirante Brown. Se desempeña como profesora en diferentes escuelas de educación secundaria, ciclo básico y superior, desde hace veintitrés años. Cursó la Especialización en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria en la UNIPE en el año 2013 e integra el Grupo de los Lunes desde 2015.

unipe editorial universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

OEI

Al igual que en libros anteriores, el Grupo de los Lunes –un colectivo que reúne a investigadores y docentes de matemática– se propone aquí enriquecer el trabajo en las aulas del secundario incorporando programas informáticos como GeoGebra. En este caso, se trata de una secuencia de diez actividades que aborda la noción de función mediante la experimentación con figuras geométricas dinámicas. La propuesta es indagar en la relación entre una situación geométrica dinámica (cuya visualización facilitan las herramientas informáticas) y los gráficos cartesianos de algunas funciones que pueden definirse a partir de ella. Por un lado, se pone en juego un sentido de la función como herramienta modelizadora de situaciones con magnitudes variables. Por otro, la representación en gráficos cartesianos como soporte para leer información acerca de distintas funciones y para estudiarlas comparativamente. Este libro incorpora relatos sobre la implementación de la secuencia en las aulas de tres escuelas secundarias. Esas producciones de estudiantes e intercambios en el aula tienen la intención de enriquecer las ideas que sustentan la secuencia y transmitir el clima de trabajo y el compromiso con las tareas realizadas a través del software.

ISBN 978-987-3805-83-7

9 789873 805837

editorial.unipe.edu.ar