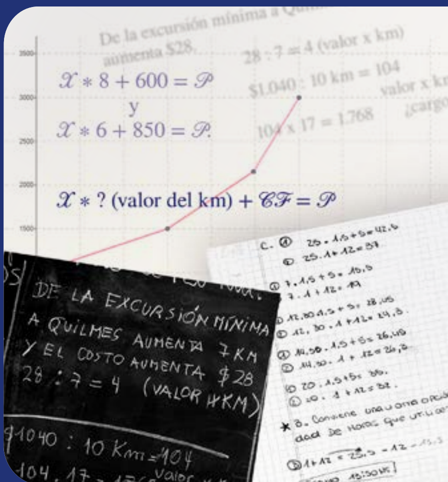


PENSAR CON OTROS LA CLASE DE MATEMÁTICA

Una experiencia de trabajo colaborativo

Patricia Sadovsky y Ana María Espinoza

Suteba Sindicato Unificado de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires

u: unipe EDITORIAL UNIVERSITARIA

HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA

>>

Pensar con otros
la clase de matemática

Pensar con otros la clase de matemática

Una experiencia de trabajo colaborativo

Patricia Sadovsky y Ana María Espinoza

unipe
EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA
Suteba
Sindicato Unificado de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires

Sadovsky, Patricia
Pensar con otros la clase de matemática: una experiencia de trabajo colaborativo / Patricia Sadovsky; Ana María Espinoza - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria; Sindicato Unificado de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires, 2020.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-52-3

1. Matemática. 2. Medios de Enseñanza. 3. Docentes de Escuela Secundaria.
I. Espinoza, Ana María. II. Título.
CDD 510.712

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA

Adrián Cannellotto
Rector

Carlos G.A. Rodríguez
Vicerrector

UNIPE: EDITORIAL UNIVERSITARIA

María Teresa D'Meza
Directora editorial

Edición y corrección
Juan Manuel Bordón

Diagramación
Diana Cricelli

Piedras 1080 (C1070AAV), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

SUTEBA: SINDICATO UNIFICADO DE TRABAJADORES DE LA EDUCACIÓN DE BUENOS AIRES

Roberto Baradel
Secretario general

María Laura Torre
Secretaria general adjunta

Silvia Almazán
Secretaria general adjunta

Sandra Ramal
Secretaría de Educación y Cultura

Piedras 740 (C1070AAP), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.suteba.org.ar

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, octubre de 2020

ISBN 978-987-3805-52-3

Índice

Presentación

La publicación de este libro es motivo de enorme orgullo para Suteba. Expresa, en primer lugar, la continuidad y consolidación de un camino común transitado junto a la UNIPE en la defensa de la educación pública, el derecho social a la educación y el trabajo docente. Desde los mismos comienzos de la universidad se fue gestando un comprometido vínculo que se desplegó, y se sigue desplegando hoy, en múltiples iniciativas de trabajo conjunto.

Hace tres años, con la publicación en la colección *Herramientas* del libro *Leer para aprender historia. Una investigación colaborativa protagonizada por equipos de docentes*, de Delia Lerner, se abría un nuevo espacio de articulación entre la organización de lxs trabajadorxs de la educación y la universidad, con eje en el conocimiento pedagógico.

Como en el caso de aquel libro, este que hoy estamos presentando –*Pensar con otros la clase de matemática. Una experiencia de trabajo colaborativo*, de Patricia Sadovsky y Ana María Espinoza– da cuenta de una investigación desarrollada en el marco del Sindicato y direccionada a producir conocimiento sobre posibilidades y condiciones de cambio en la escuela secundaria. Esta investigación, coordinada por las autoras y llevada adelante por un colectivo de docentes, estuvo centrada en explorar la potencialidad del trabajo colaborativo para desarrollar la enseñanza.

No fue por azar que Suteba tomó a la escuela secundaria como una de las líneas prioritarias en sus estrategias de investigación. Las políticas neoliberales que en los noventa, de la mano de la tristemente recordada Ley Federal de Educación, asolaron el campo educativo, tuvieron al nivel medio como una de sus víctimas centrales. La firme oposición del Sindicato al literal desguace de la secundaria, con la implementación del tercer ciclo de la Educación General Básica (EGB), estuvo ya en ese momento acompañada de iniciativas de investigación que, aun con los modestos recursos que el Sindicato disponía, produjeron información y conceptualizaciones que se constituyeron en importantes herramientas de lucha para denunciar las graves consecuencias que ese desguace estaba teniendo en la educación de adolescentes y jóvenes.

La tenaz resistencia de la docencia bonaerense a la llamada "reforma educativa", de la cual el "tercer ciclo" era una de sus manifestaciones más dramáticas, unida a la del conjunto de lxs trabajadorxs de la educación del país, simbolizada en los 1003 días de lucha de la CTERA en la Carpa Blanca, fue minando el consenso que las políticas neoliberales habían logrado en vastos sectores de la población.

En paralelo a aquellas denuncias y a aquella resistencia, desde Suteba y CTERA se impulsaron diversas iniciativas que buscaban relevar, socializar y sistematizar los nuevos conocimientos que al calor de esas luchas estaban produciendo los equipos docentes y las escuelas. Se defendía el sentido público, popular y democrático de la escuela, al mismo tiempo que se luchaba por sacar a lxs docentes del lugar de mero "objeto" de las reformas y, en cambio, al decir de nuestra compañera Vilma Pantolini, "iniciar un camino de recuperación de la condición de trabajador/a creativo/a, de intelectual, de autor/a, de investigador/a del trabajo".

La nueva correlación de fuerzas, que la articulación de estas luchas con las de otros sectores del campo popular fue construyendo, permitió en los primeros años de este siglo el surgimiento de un nuevo proyecto político con rasgos emancipatorios. En el campo educativo, la derogación de la Ley Federal –estandarte del neoliberalismo educativo– representó el contundente triunfo de aquellas luchas de los noventa y abrió, fundamentalmente, la posibilidad de que el acumulado de posicionamientos, saberes y prácticas generados en esa larga resistencia pudiesen transformarse en letra de la Ley de Educación Nacional Nº 26206 y de la Ley de Educación Provincial Nº 13688, así como en fundamentación de muchas de las nuevas políticas educativas.

Reconocer la educación como un derecho social y definir al Estado como indelegable garante del cumplimiento de ese derecho constituyeron logros centrales que se plasmaron en la obligatoriedad de la escuela secundaria. Sin embargo, la universalización y democratización de una escuela que históricamente había sido pensada y organizada en función de un proyecto de país con exclusión de las mayorías populares, supuso enormes desafíos. Máxime cuando se venía del profundo deterioro que le habían infringido en los noventa.

Fue en ese contexto que en 2006, desde la Secretaría de Educación y Cultura del Sindicato,[1] se convocó a Patricia y Ana, dos compañeras pedagogas e investigadoras de reconocido compromiso con la escuela pública que desde los comienzos del Suteba habían acompañado muchas de nuestras acciones de formación, para coordinar el proyecto de investigación "Producir Conocimiento para Transformar la Escuela". Considerando el trabajo colectivo y la producción de conocimiento como ejes del proceso de trabajo docente, la investigación tomó cuerpo en un potente equipo de profesorxs de distintas escuelas secundarias de la provincia, cuyo rico y compartido trayecto de experiencias, reflexiones y elaboración de propuestas da cuenta este libro.

A todxs ellxs, y a Patricia y Ana, queremos hacerles llegar el reconocimiento de la organización sindical. Su comprometido trabajo no solo aporta conocimientos que serán, seguramente, de enorme valor para el hacer cotidiano de profesoras y profesores de nuestras escuelas secundarias. Además, los encuentros e intercambios que se generaron a lo largo del proyecto en escuelas,

1. Durante el desarrollo del proyecto y la elaboración posterior del libro, la conducción de la Secretaría de Educación y Cultura estuvo a cargo de las compañeras Silvia Almazán, Rosana Merlos y Sandra Ramal como Secretarias, mientras que fueron Subsecretarias las compañeras Vilma Pantolini, Mariana Cattaneo y Fabiana Guerrero.

seccionales y jornadas sindicales han movilizado y enriquecido los debates entre compañerxs y, con ello, han fortalecido esta construcción colectiva que es el Suteba.

Aspiramos a que este libro –y estamos convencidxs de ello– sea una más de las herramientas de lucha político-pedagógica con las que lxs trabajadorxs de la educación organizadxs defendemos el sentido y el valor de nuestro trabajo, así como el derecho a una educación emancipadora para nuestrxs pibxs.

Consejo Ejecutivo Provincial de Suteba

Nota de las autoras

Las reflexiones incluidas en este libro se basan en una investigación sobre trabajo docente y enseñanza llevada adelante por un equipo constituido por profesores de matemática, mayoritariamente del distrito de Florencio Varela, convocados por esa seccional del Suteba y coordinado por las autoras. Participaron los siguientes docentes: Silvia Caro, Josefa Carrizo, Norma Cingolani, Silvia Colacelli, Miriam Conte, Silvia Galanti, Patricia García, Sergio Gauto, Mercedes Gil, Damian Gomiz, Sandra Jaurena, Milena Lizardo, Víctor Lozowski, Alicia Marfil, Gustavo Mollo, Ricardo Prodan, Irene Suñol, Omar Segovia y Carlos Varela. Todos estos profesores se desempeñaban en ese momento en diferentes escuelas secundarias y contaban con autorización de su institución para asistir a las reuniones de trabajo, que ocupaban una jornada mensual. En las primeras etapas de este trabajo, el compromiso entusiasta de Gladys Bravo, integrante de la Secretaría de Cultura de Suteba, fue determinante para la puesta en marcha del proyecto.

Introducción

Este libro habla de profesores de matemática, de trabajo colaborativo y de proyectos de enseñanza. Relata las ideas que surgieron a lo largo de tres años de trabajo sostenido en los cuales, junto con un grupo de docentes convocados por Suteba (Sindicato Unificado de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires), nos empecinamos en querer encontrarle alguna vuelta a la tan mentada cuestión del sentido (de la enseñanza, del aprendizaje, del conocimiento, de la escuela). Y *la vuelta* la encontramos en el trabajo compartido, en la oportunidad de pensar con otros, en la riqueza que supuso poner en discusión los modos de conocer de los estudiantes, en el sostén que implicó llevar adelante propuestas elaboradas –discutidas, peleadas, amasadas– en conjunto, en la producción de nuevas interpretaciones para algunas cuestiones problemáticas que desde tiempos remotos se clausuran en las salas de profesores mucho antes de imaginar caminos que impriman vitalidad a la práctica cotidiana de enseñar.

LOS ACTORES DE ESTA HISTORIA

Es probable –es casi seguro– que no haya una única manera de construir una escuela que despierte en los jóvenes el deseo de conocer. Muchísimos grupos de docentes en diferentes lugares han desarrollado experiencias a través de las cuales ha sido posible constatar que los alumnos son capaces de involucrarse –de gratificarse, de interesarse, de sorprenderse– con el trabajo intelectual que comporta aprender. Todas tienen el sello de la producción colaborativa, una manera de entender el trabajo docente que el Suteba[1] viene impulsando y construyendo desde prácticamente el momento de su constitución. En ese camino, el sindicato ha librado numerosas batallas en el terreno gremial, ha promovido la realización de actividades que involucraron a maestros y profesores de diferentes escuelas, ha planteado debates en diferentes foros. Instalar como tema –en todas estas dimensiones– la condición colaborativa del trabajo docente ha sido una cuestión central. Las autoras, que veníamos desarrollando nuestro accionar en el campo de las didácticas específicas, fuimos convocadas a sumarnos a esta causa en 2007, cuando la Secretaría de

1. En 1988, Suteba propuso poner en discusión, junto con la conducción educativa de la Provincia de Buenos Aires, las características del trabajo docente, deteniéndose particularmente en el análisis crítico de tareas de tipo burocrático que obstaculizaban la enseñanza. Desde ese momento, el sindicato viene reivindicando la participación de los docentes en el contenido de su trabajo y ofreciendo de forma sostenida argumentos para fundamentar esta postura.

Cultura de Suteba reunió a un grupo de educadores para abrir un espacio de investigación sobre trabajo colaborativo. La propuesta del sindicato apuntaba a comprender en qué sentido el intercambio sistemático entre los docentes sobre la enseñanza afecta el trabajo con el conocimiento en las aulas. Esta temática viene siendo objeto de indagación desde hace más de quince años por parte de equipos de diferentes países que plantean la necesidad de buscar con los docentes condiciones para modificar las prácticas de enseñanza en un sentido que contemple simultáneamente la formación crítica y la plena inclusión educativa (Desgagné *et al.*, 2001; Fernández y Clot, 2007; Perrin-Glorian, 2011; Robert, 2003).

Como resultado de las discusiones sostenidas en la Secretaría de Cultura del sindicato, y teniendo en cuenta las referencias anteriores, convocamos a un grupo de profesores de matemática con el propósito de analizar juntos los vínculos entre trabajo colaborativo de los docentes y concepciones de conocimiento escolar. Lo hicimos tomando como asunto de reflexión el caso de la matemática en la escuela: ¿qué posibilidades abre la elaboración compartida de un proyecto de enseñanza para concebir el aula como un espacio de producción? ¿Qué relaciones se pueden establecer entre esta perspectiva del conocimiento y el involucramiento de los alumnos? ¿Y entre el involucramiento y la inclusión? En el camino de aproximar respuestas a estos interrogantes fuimos implicándonos en la tarea de debatir, elaborar, implementar, registrar y analizar el funcionamiento de una secuencia didáctica. De esa experiencia habla este libro.

Con los compañeros que constituimos el equipo teníamos de entrada ciertos acuerdos básicos: todos deseábamos una escuela más democrática, más confortable, con alumnos y profesores más gratificados estableciendo vínculos de mutuo respeto y haciendo circular conocimientos relevantes. Había una lectura compartida de la crisis y un reconocimiento de la desprotección, tanto de los docentes que no tienen recursos para convocar a los chicos, como de los chicos que son estigmatizados y, de alguna manera, abandonados. No nos propusimos compartir necesariamente una misma postura didáctica; antes bien, pensábamos que lo más probable era que tuviéramos posiciones diferentes y que la discusión –incluso la confrontación– enriquecería la posibilidad de ir elaborando un marco de análisis común al exigirnos fundamentar cada punto de vista.

Tomar como idea central la perspectiva de que los alumnos y docentes son productores de conocimiento –en contraste a la concepción socialmente instalada según la cual la función de la escuela es principalmente la de reproductora de conocimiento– nos obligaba a explorar las condiciones que la hicieran posible. Sabíamos que el sentido de esas nociones de alumno y docente productor se iría precisando en el contexto de la investigación colaborativa.

Elaboramos colectivamente una propuesta de enseñanza en la que estuvieron presentes dos aspectos fundamentales: el análisis crítico de los conocimientos a enseñar y el análisis de condiciones de implementación para favorecer el involucramiento de los alumnos en las situaciones propuestas. Asumimos como hipótesis el vínculo estrecho entre estos dos componentes (Chevallard, 1997), que por lo tanto constituyeron uno de los focos de debate. Tal como lo iremos desplegando, esto permitió vislumbrar nuevas relaciones entre *docente productor* y *alumno productor*, entre *conocimiento* e *inclusión educativa*.

Una vez construida entre todos, la propuesta se implementó en cuatro aulas diferentes y de modo más o menos simultáneo. A cada aula asistió un equipo formado por el docente del curso y otros compañeros que, además de observar y registrar el desarrollo de la secuencia, interactuaron con los chicos. La presencia de varios compañeros favoreció la posibilidad de analizar sobre el terreno la marcha de la propuesta y ajustarla a cada contexto. Esta alternativa de ir realizando modificaciones en función de lo que iba sucediendo fue acordada explícitamente y es desde nuestro punto de vista una condición ineludible para la constitución del docente como productor.

LA ORGANIZACIÓN DE ESTE LIBRO

Este libro está organizado en tres partes. En la primera –*La elaboración grupal de una secuencia didáctica*– relatamos el proceso de producción del proyecto de enseñanza e intentamos dar cuenta de las discusiones abiertas al problematizar el conocimiento que queríamos enseñar. En esa instancia tomamos conciencia de la gran cantidad de decisiones implicadas en la elaboración de una secuencia que muchas veces pasan inadvertidas cuando el docente no dispone de un colectivo con quien confrontar. En efecto, los análisis hicieron visible que las opciones relativas a la contextualización que se ofrece para trabajar (el problema elegido, los datos, la forma en que se representa...) permiten realizar diversas hipótesis sobre el desarrollo de las clases teniendo como referencia permanente la actividad intelectual de los alumnos. En esos debates pudimos imaginar los recursos con los que contarían los estudiantes, los caminos posibles que podrían tomar, las interacciones que se podrían favorecer, las rupturas que se provocarían. Para esta etapa resultó fértil la referencia a la problematización del conocimiento matemático propuesta por Brousseau (2007), en cuanto que contribuyó a seleccionar y dar relevancia a las dimensiones que orientaron los análisis. Esta experiencia mostró, además, la potencia de la discusión compartida para imaginar una escena de clase en la que los alumnos reales puedan involucrarse y aprender.

En la segunda parte –*La secuencia en las aulas: desarrollos, debates, interrogantes*– comunicamos aspectos de la implementación efectiva y de las ideas que fuimos elaborando al analizarla. Es en esta etapa que se logra dar más cuerpo a la idea de un alumno que produce en la clase y donde realmente se alcanza a tener una representación de las posibilidades que habilita un proyecto fortalecido por el hecho de haber sido modificado una y otra vez a raíz de los intercambios grupales. Asimismo, la confrontación entre diferentes implementaciones desarrolladas por los compañeros hizo visible decisiones didácticas que afectan los procesos intelectuales de los alumnos (Clot y Faïta, 2000). Retomaremos esta idea a lo largo del análisis.

En la tercera parte –*Conclusiones*– las voces de los compañeros que participaron en este proyecto son convocadas para imaginar cómo comunicaríamos a otros docentes aquello que esta experiencia tuvo de conmovedor, de enriquecedor, de vital.

Vale aclarar que los enunciados de varios de los problemas trabajados en este libro incluyen precios que han quedado muy desactualizados respecto a los posibles valores actuales. No obstante, se decidió mantenerlos tal como figuraban en los enunciados originales.

Parte I

La elaboración grupal de una secuencia didáctica

PRIMERAS APROXIMACIONES: DEFINICIÓN DE UN CONTENIDO DE ENSEÑANZA Y ALGUNOS PUNTOS DE PARTIDA

Una vez decidido que planificaríamos un proyecto de manera compartida, debíamos elegir un tema. Fue bastante fácil ponernos de acuerdo: la idea de trabajar sobre función lineal prendió rápidamente. Por un lado, todos los profesores nos enfrentamos de una u otra manera a la enseñanza de este tema en diferentes años y experimentamos cierta fatiga al ver que muchas propuestas insisten en quedarse en un tratamiento formal que no entra en los asuntos esenciales. Por otro, reconocemos que se trata de una zona relevante de la matemática, ya que permite poner en juego procesos de modelización accesibles a los chicos dada la enorme cantidad de fenómenos que responden a un comportamiento lineal y, además, porque dialoga con muchos conceptos (funciones, ecuaciones, números, sistemas de medidas) y con diversas formas de representación como la algebraica, la gráfica, la numérica o la geométrica (Douady, 1986; Arcavi, 1994; Lacasta, 1998). Planificar de manera compartida una secuencia que implicara para los estudiantes un primer contacto con lo lineal se nos presentaba como una experiencia rica. ¿Cómo iniciar, entonces, un recorrido común a partir de las trayectorias de cada uno?

Parecía que casi todos estábamos apoyando una entrada a la enseñanza del tema en la que se pusieran en juego fenómenos que se comportan linealmente. Esta primera aproximación nos distanciaba de las propuestas que empiezan definiendo función lineal como algo de la forma $f(x) = ax + b$, y luego plantean ejemplos para que los alumnos confeccionen tablas de valores que a la vez son soporte de una representación cartesiana. Pero –lo sabemos bien– tener claridad acerca de lo que no queremos no alcanza para definir lo que sí queremos.

Un montón de preguntas se amontonaban de manera desordenada en nuestras primeras discusiones: ¿empezamos planteando gráficos?, ¿proponemos la ley que describe un fenómeno para que los alumnos completen valores particulares del mismo?, ¿presentamos datos que corresponden a un proceso lineal para que los chicos establezcan los parámetros?, ¿será sensato comenzar planteando un problema de encuentro?[1] Aunque la experiencia de cada uno constituía sin duda una referencia sustancial, en realidad no teníamos todavía un criterio compartido que permitiera construir una secuencia de manera fundamentada. Para avanzar,

1. Llamamos *problema de encuentro* a una situación en la que se comparan dos procesos, en este caso lineales.

nos apoyamos en una idea potente que atraviesa las producciones del campo de la didáctica de la matemática según la cual un eje fundamental de análisis consiste en desentrañar las relaciones matemáticas que están en juego en las resoluciones posibles de un cierto problema. Pensar cada posibilidad en términos de relaciones matemáticas que se pondrían en juego orientó nuestras discusiones. Esta idea inicial –incipiente todavía– iría cobrando forma a lo largo del trabajo.

MOTORES EN MARCHA

Para comenzar a elaborar concepciones compartidas, para construir un lenguaje común, para precisar nuestras ideas al confrontarlas con propuestas concretas, analizamos los planteos de algunos libros de texto cuyos autores se ubican –eso pensábamos sin haber discutido mucho– en una posición próxima a las que el grupo estaba barajando. Nos acercamos a esa lectura teniendo en mente nuestras preguntas y la discusión sobre la misma nos abrió otras que inicialmente no habíamos concebido. Los textos funcionaron como oponentes con los que entablamos un diálogo que nos exigía fundamentar por qué ciertas ideas nos convencían o no.

Un asunto principal que se instaló en estas discusiones se refirió a la calidad del trabajo intelectual al que se verían confrontados los alumnos y la necesidad de realizar un proyecto que significara un desafío viable para los chicos. Constatamos, por ejemplo, que en muchos textos la actividad del alumno queda reducida a aplicar a casos particulares una ley que se enuncia. Esto nos dejaba una sensación de insatisfacción que si bien no alcanzaba para tener claridad respecto de lo que haríamos, sí nos ponía en la ruta de buscar situaciones cuya resolución supusiera una exigencia para los estudiantes. El tema de la *dificultad adecuada* –que iremos desplegando a lo largo del libro– fue objeto de intensos debates, foco de incertidumbres, acuerdos y desacuerdos.

El análisis de los textos escolares abrió también otra discusión que se sostuvo en el tiempo y que iremos delineando con mayor precisión: la necesidad de diferenciar dos planos de producción del trabajo, el de las relaciones que elaboran los alumnos al resolver un problema y el que realizan cuando se reflexiona en el espacio público de la clase sobre dichas resoluciones (Sadovsky, 2005). ¿Por qué el análisis de los libros nos remitió a esta cuestión? En muchos casos los autores de los textos, previendo posibles dificultades o *errores* de los alumnos –por ejemplo la indiscriminación entre linealidad y proporcionalidad directa– proponen de entrada preguntas específicas para tratar esas cuestiones. Ahora bien, la posibilidad de que un trabajo sobre la validez de las relaciones genere un diálogo auténtico con las ideas de los estudiantes se basa en que ellos las hayan producido efectivamente al abordar los problemas. En la medida en que no pueden asomarse a la clase para regularla en función de las ideas que los alumnos desplegaron –esa es una tarea insustituible del docente–, los libros proponen muchas veces todas las preguntas juntas sin tener la posibilidad de diferenciar los planos a los que hacíamos mención recién. Esta discusión realza el papel del profesor como conductor de una trayectoria de trabajo en el aula que se termina de plasmar al considerar las producciones de los estudiantes, sus dudas, sus contradicciones, el alcance de las relaciones que elaboran... en fin, aquello que efectivamente ocurre en clase.

La reflexión sobre las propuestas de los textos habilitó también un análisis sobre distintas ideas que configuran la linealidad. Tras realizar un pequeño inventario –variación uniforme, proporcionalidad directa (muy vinculada a variación uniforme), ecuación de la recta, pendiente y ordenada al origen– nos preguntamos qué relaciones se podrían establecer entre dichos conceptos. Para algunos de nosotros esas ideas formaban parte del paisaje de *lo lineal*, sin que nos hubiéramos puesto a pensar en filiaciones y jerarquías entre las mismas al concebirlas como asuntos de enseñanza. Nos preguntamos, por ejemplo, qué relación hay entre la idea de variación uniforme y el hecho de que la representación gráfica de una función lineal sea una recta. Podríamos pensar que la representación *recta* es una consecuencia de la variación uniforme, pero también podríamos pensarlo al revés. Es decir, estas dos ideas no son independientes entre sí y esto nos confrontaba con la necesidad de decidir cómo tomar en cuenta la relación entre ellas en el momento de definir nuestro proyecto.

Para ello, analizamos el tratamiento que se hace de la representación gráfica en los libros. En general, hay una apelación a pasar de la tabla al gráfico sin que necesariamente ese pasaje implique que los alumnos se vayan a contestar algo nuevo. A partir de esto nos preguntamos en qué casos se hace relevante el pasaje de una forma de representación a otra, o qué preguntas permite responder ese pasaje. Nuevamente, de la discusión van surgiendo interrogantes, condiciones, cuestiones que considerábamos fundamental tener en cuenta.

Revolviendo entre las páginas de los libros encontramos en el fondo de un capítulo –más precisamente en la sección de *Ejercicios de aplicación*– un problema que nos parecía interesante como situación inicial. Se refería a un auto que marcha a velocidad constante y que parte desde una cierta posición, pero no se explicitaba ni la velocidad de marcha ni la posición inicial; solamente se daban algunos valores para ciertos tiempos de marcha y se pedía hallar otros. ¿Cuál es la diferencia entre proponer este problema como situación inicial para que los alumnos exploren relaciones entre los datos y ofrecerlo como aplicación cuando ya se han establecido recursos para hallar una fórmula a partir de algunos valores dados? ¿Qué aporta confrontar a los alumnos con la tarea de analizar los datos respecto de proponerles aplicar una determinada ley, que en este caso sería hallar posiciones del auto para tiempos de marcha dados? Hoy, con el recorrido ya realizado, estamos en condiciones de decir que en estas discusiones estaba el germen de la secuencia que íbamos a producir.

En síntesis, más allá de la apreciación de cada uno de los libros, valoramos la potencia de esta actividad en la medida en que nos permitió desgajar diferentes aspectos que íbamos a considerar. Específicamente, pudimos:

- discutir sobre la calidad de la actividad intelectual que esperábamos promover en los alumnos a través de nuestro proyecto de enseñanza;

- distinguir diferentes planos de análisis en las discusiones del aula (resolución, reflexión sobre las resoluciones);
- considerar las relaciones entre diferentes conceptos que configuran la linealidad;
- discutir sobre el valor de producción que puede jugar para los alumnos el pasaje de una forma de representación a otra;
- analizar posibles vías de entrada al tema.

LA SECUENCIA EMPIEZA A DELINEARSE: PRIMEROS BORRADORES

Una primera idea que discutimos en el grupo fue la de proponer a los alumnos analizar una factura de gas o de luz. Le dimos vueltas al asunto hasta llegar a la conclusión de que la cantidad de variables en juego para construir el importe de una factura planteaba una complejidad que difícilmente los alumnos podrían abordar. La descartamos por esa razón. Con la intención de promover que los chicos coordinaran diferentes formas de representación, abordamos una segunda posibilidad: proponer un problema de encuentro en el que uno de los procesos se describía a través de su representación en coordenadas cartesianas y el otro mediante una tabla de valores. Discutimos y discutimos hasta darnos cuenta de que en este caso también nos estábamos pasando de la raya en cuanto a la exigencia que los chicos deberían enfrentar. Aunque el trabajo con un problema de este tipo fue diferido para un momento posterior de la secuencia,[2] las discusiones que se generaron al analizarlo ("¿planteamos de entrada la comparación o pedimos por valores para cada una de las funciones?", "¿ponemos en evidencia a través de los datos que los procesos se cruzan, es decir que a partir de un cierto valor cambia el sentido de la comparación?", "¿conviene poner muchos datos o más bien poquitos?") fueron riquísimas y nos hicieron tomar contacto con la gran cantidad de alternativas que existen al proponer un trabajo para los chicos. Tras definir que no empezaríamos con un problema de encuentro, nos ubicamos otra vez en la vía de promover la noción de variación uniforme como característica fundante de lo lineal.

LA NOCIÓN DE VARIACIÓN UNIFORME EN PRIMER PLANO

Nos quedó resonando la idea –que habíamos empezado a discutir a raíz del problema del libro que acabamos de comentar– de comenzar planteando

2. El análisis del desarrollo de estas clases –lo veremos en la Parte II de este libro– nos reafirma que posponer el problema fue una decisión acertada ya que aun en el momento en que lo abordaron, con bastantes elementos elaborados previamente, los estudiantes se encontraron con una situación exigente.

algunos pares de valores correspondientes a un fenómeno de comportamiento lineal y preguntar por otros sin dar explícitamente la velocidad de crecimiento, para que sean los alumnos los que la infieran de los datos. Nos entusiasmaba el hecho de que, al verse exigidos a relacionar entre sí los datos del enunciado, los chicos de una u otra manera se encontrarían con relaciones vinculadas a la idea de variación uniforme que caracteriza un proceso lineal. Y lo harían sin definiciones previas, sin fórmulas de antemano, apoyados en sus conocimientos de proporcionalidad directa y en la comprensión del funcionamiento del contexto (que en este caso se refirió al costo de viajes en función de la distancia recorrida). Es así como, sobre la base del problema que tomamos del texto, comenzamos a garabatear propuestas. Tras algunas discusiones e intercambios por *mail* –el grupo seguía funcionando más allá de los encuentros–, llegamos al siguiente enunciado:

PROBLEMA 1

Una empresa de turismo de Florencio Varela realiza excursiones escolares. Cobran un cierto valor por cada kilómetro que recorren y además un cargo fijo por excursión. Tanto el valor por kilómetro como el cargo fijo es el mismo para cualquier destino. La siguiente tabla muestra el importe para diferentes trayectos.

Destino	Distancia	Precio
Excursión mínima	10 km	$1.040
Punta Lara	27 km	$1.108
Capital Federal	40 km	$1.160
La Plata	54 km	$1.216
Tigre	80 km	$1.320
Laguna Ranchos	97 km	$1.388
Chapadmalal	410 km	$2.640

· *Analizando la tabla, ¿pueden establecer cuánto costará una excursión a Temaikèn, que está a 120 km de Florencio Varela?*

Este problema dio lugar a un análisis profundo que alimentó la elaboración de toda la secuencia. Remarquemos que no informa cuál es el precio por kilómetro ni cuál es el cargo fijo, se dan algunos importes en función de la cantidad de kilómetros que comprende el recorrido. Quienes abordan un problema de este tipo por primera vez, y no disponen de las estrategias generales que permiten obtener una función lineal a partir de pares de valores, necesitan maniobrar con los datos y establecer relaciones que les permitan inferir importes que no están informados. Pensábamos que esta exigencia de relacionar los datos entre sí no se pondría en primer plano si ofreciéramos la información en un gráfico. Efectivamente, en ese caso se podrían "leer" los valores buscados (por ejemplo Temaikèn) directamente en el gráfico, aunque sea en forma aproximada.[3] Si hubiéramos dado los valores del cargo fijo y del precio por kilómetro, el trabajo de los alumnos se hubiera restringido a resolver un típico problema aritmético a través de una suma y una multiplicación.

No esperábamos que se establecieran de entrada las relaciones correctas.[4] En efecto, elaborar qué podíamos esperar fue objeto de intensos debates que nos ayudaron a configurar el proyecto finalmente realizado. Veamos algunos registros de las discusiones que sostuvimos en nuestras reuniones sobre las posibles estrategias que desplegarían los chicos:[5]

> –Van a usar proporcionalidad directa, casi seguro.
>
> –*¿Qué hacemos si todos usan proporcionalidad directa?*
>
> –Lo más probable es que se apoyen en diferentes pares para hacer proporcionalidad directa. Les va a dar distinto, *ahí se puede marcar una contradicción.* Ese es un buen motivo para poner en la tabla varios pares de valores.
>
> –Seguramente va a haber una diversidad de respuestas, eso va a ser interesante para plantear la discusión: ¿cómo sabemos cuál es válida?
>
> –Si usan proporcionalidad directa... imaginemos este escenario: dos chicos usan regla de tres, pero apoyados en diferentes valores. Van a dar distintos resultados. ¿Cómo se dirime*? O sea, la interacción entre ellos va a ser fundamental.*
>
> –La primera cosa que va a haber que discutir es si es razonable que obtengan para un mismo viaje importes diferentes. *Hay ahí un conocimiento que no necesariamente todos tienen.* Algunos chicos pueden llegar a aceptar que como se partió de un valor diferente se obtuvo un importe diferente.

3. Es razonable pensar que no para todos los alumnos será evidente cómo hacerlo. Durante el desarrollo de nuestra experiencia se puso de manifiesto que el tratamiento con los gráficos resulta más complejo de lo que inicialmente suponíamos. Más allá de esto, queda claro que potencialmente el gráfico ofrece la posibilidad de lectura directa de cualquier par de valores.

4. En lugar de analizar si una idea es correcta o incorrecta preferimos preguntarnos cómo ayudar a que los alumnos modifiquen una idea –en principio incorrecta– para que responda al problema que se estaba tratando. Analizando ese proceso, se relativizan los términos *correcto* o *incorrecto* porque las relaciones que establecen los alumnos son tratadas como ideas que dan lugar a nuevas ideas. Volveremos sobre esta cuestión al analizar el trabajo en las clases.

5. Decidimos preservar el sentido de los diálogos pero no hacer una transcripción textual porque la misma –es inevitable– está sujeta a los vaivenes de la oralidad y resulta difícil de seguir en un escrito.

–Tampoco es seguro que porque obtengan valores diferentes digan "ah, entonces no es de proporcionalidad". Aun reconociendo que no puede ser que haya dos importes distintos para el mismo viaje, es probable que no sepan de dónde proviene el error.

–Según los valores en los que se apoyen para usar alguna propiedad de la proporcionalidad directa pueden obtener resultados inconsistentes con los datos. Por ejemplo si toman como base el par (40, 1.160), un viaje de 120 kilómetros costaría 3.480 pesos, que es mucho más que lo que cuesta el viaje de 410 kilómetros. *Creo que los chicos no aceptarían esto. O sea, el contexto ayuda a descartar ciertos resultados.*

–Como les estamos preguntando por un viaje de 120 kilómetros, algunos van a sumar el precio del viaje a Tigre [80 km] con el precio del viaje a Capital Federal [40 km].

–Estarían aplicando una propiedad de la proporcionalidad directa.

–Pero eso no necesariamente lo saben: suman porque les viene bien, no porque usan la proporcionalidad directa.

Hemos destacado en bastardilla algunas partes del diálogo anterior para subrayar la relación entre las discusiones y la elaboración de un conjunto de condiciones para la secuencia que planificaríamos. Es así como surge la necesidad de pensar un modo posible de interactuar con los alumnos frente a la probabilidad –alta– de que, de una u otra manera, usen la proporcionalidad directa para responder la pregunta (Vergnaud, 1990). Subyace a esta idea la intención de lograr que los alumnos modifiquen las relaciones que no son ajustadas. Esta modificación es entendida como una producción de ellos para la cual necesitan puntos de apoyo. Veamos con más detalle los distintos matices que se ponen en juego.

Para empezar, se hace clara la conveniencia de proponer varios datos: al tomar diferentes valores como base, los alumnos llegarán a resultados diferentes para un mismo viaje. Aunque algunos chicos no percibieran esto como contradictorio –otros, seguramente sí–, encontramos en esta divergencia buenas condiciones para plantear una discusión que tarde o temprano conducirá a poner en cuestión la proporcionalidad directa. Digamos además que en algunos casos los alumnos podrían obtener resultados inconsistentes con los datos. Por ejemplo, si encontraran que para un viaje más corto que los informados en el problema el costo resulta mayor.

Por otro lado, con estos intercambios en nuestro grupo se empezó a poner de manifiesto la distancia entre las relaciones que están en condiciones de hacer los alumnos y las que nosotros –docentes– les atribuimos a veces, al suponerlas como obvias porque las tenemos tan elaboradas que se nos vuelven naturales. Efectivamente, el hecho de que los alumnos sumen dos valores para obtener un tercero no quiere decir que hayan aplicado conscientemente una propiedad de la proporcionalidad directa ("a la suma, la suma", por decirlo brevemente) sino que más bien utilizan localmente una relación que "les conviene". De manera análoga, tampoco objetarán el uso de la proporcionalidad porque nosotros les mostremos que, en los datos dados, doble de kilómetros no implica doble de importe ni triple implica triple, etc. Rechazar la proporcionalidad directa porque no se verifica la relación "a doble de kilómetros, doble de importe" supone saber que esa relación se cumple solo en situaciones de proporcionalidad directa, lo cual en principio no estamos en condiciones de atribuirles. Veamos un tramo de nuestra reunión donde hablábamos de esto:

–El que dice proporcionalidad directa está diciendo también: "a doble, doble*;* a triple, triple"*,* y podemos mostrar que eso no se cumple.

–Eso funcionaría si supieran que la proporcionalidad directa incluye esa propiedad, pero no es tan probable que la tengan incorporada como vos decís. Para ellos no necesariamente es el mismo paquete "hacer regla de tres" que hacer "a doble, doble", no necesariamente esas dos estrategias para ellos provienen del mismo tipo de relación.

–Habría que insistir con cuál es el cargo fijo.

–¿Por?

–Porque los que hacen proporcionalidad directa no tienen en cuenta el cargo fijo.

–¿Pero ellos saben que no lo están teniendo en cuenta?

–Yo creo que es mejor preguntar cuál es el precio por kilómetro.

–Sí, para calcular precio por kilómetro van a hacer importe sobre cantidad de kilómetros y eso, para dos pares diferentes, va a dar diferente.

–Ahí sí podríamos marcar la contradicción. Podríamos decir: según este resultado, ¿cuánto sale el kilómetro? ¿Y según este? Estarían basándose en dos precios distintos por kilómetros*,* cosa que no puede ser.

–Claro, al preguntar el precio por kilómetro salta más la contradicción, pero si vos le decís que no está usando el cargo fijo, ¿cómo hace para entenderte si él, un alumno cualquiera, piensa que sí lo está usando?

–Sí, que el mismo viaje no puede salir dos importes diferentes es algo que van a aceptar. A partir de esta aceptación se puede resaltar que están usando precios por kilómetro diferentes.

La conversación anterior muestra todo lo que tuvimos que desarmar para darnos cuenta de que muchas veces nos manejamos con el supuesto de que los alumnos disponen de relaciones entre diferentes propiedades cuyo vínculo, justamente, es lo que deberían aprender a partir del trabajo en la secuencia. En ese marco pudimos distinguir entre distintas intervenciones docentes que apuntarían a poner en cuestión relaciones erróneas hechas por los alumnos. Todo este intercambio nos ayudó a entender que los valores que pondríamos en el problema como datos alentarían o no la producción de ciertas relaciones. Esta toma de conciencia constituyó para nosotros un momento importante de nuestra producción: todos queríamos proponer, todos queríamos explicar por qué pondríamos uno u otro valor. De manera desordenada fuimos yendo y viniendo al tiempo que elaborábamos un criterio para decidir:

–Pueden sumar valores.

–¿Vos querrías poner un valor para que pase eso [para que sumen]?

–Sería inducir el error.

–Algunos van a sumar.

–Pero ella de alguna manera *estaría a favor de promover, a partir de los datos propuestos, que sumen para que se discuta si es válido sumar.*

–No, eso no, *¿por qué les haríamos pisar el palito?*

–No es para que pisen el palito, es para discutir sobre la validez de una relación.

–¿Cuál sería el problema de poner valores que promuevan que los chicos sumen?

–Podríamos poner el valor correspondiente a 27 y el correspondiente a 54 para mostrar que aunque 54 es el doble de 27, el importe de 54 kilómetros no es el doble del de 27.

–Estaría bueno ver qué pasa con esto.

–Estamos imaginando que los chicos tienen un supuesto de generalidad que no sabemos si tienen.

–Si damos 27 y 54, no sé si se van a dar cuenta de que 54 es el doble de 27.

–Decidamos qué criterios queremos usar.

–Uno y su doble, uno que sea suma de otros dos dados.

–Si damos el importe correspondiente a 300 kilómetros y el correspondiente a 400 kilómetros y preguntamos por el importe de un viaje de 700 kilómetros estamos induciendo a que sumen, no les estamos dando libertad.

–Para mí está bien.

–No. Para mí no está bueno.

–Pero *si pedimos valores que no tienen relación con los datos, ¿en qué se van a apoyar para saber que no funciona?* Si preguntamos por un valor que sea doble de otro dado y además en la tabla de datos tenemos dos viajes cuyos kilómetros son uno doble de otro, me puedo apoyar en eso para hacerles ver que no funciona.

–Pero si vos en la tabla tenés el valor que corresponde a un viaje de 80 kilómetros y le preguntás por el importe de un viaje de 800, *estás induciendo a que multipliquen por 10 sin pensar mucho, estás cerrando en lugar de abrir. Es como si en lugar de querer inducir la respuesta correcta quisiéramos inducir lo erróneo.* Podemos plantear primero para que hagan muchas relaciones y una discusión como esta la podemos dejar para después.

La reflexión sobre el diálogo anterior nos suscita varios comentarios. En primer lugar, los chicos están presentes en la discusión, son nuestros interlocutores implícitos en el momento de tomar decisiones. Efectivamente, se instala un lazo entre el problema que vamos a proponer y los recursos que los alumnos pondrían en juego para resolverlo. De manera implícita, una pregunta básica comanda la discusión: "¿Cómo van a hacer esto?". El diálogo imaginario con nuestros alumnos, la anticipación acerca de sus posibilidades, nos ayudó a configurar *un estudiante que va pudiendo*, un estudiante que se involucra en un recorrido a partir de su participación en los intercambios que se sostienen en el aula, capaz de hacer algunas relaciones a partir de las cuales podrá elaborar otras en el juego de la clase. A la vez, en este diálogo pudimos vernos a nosotros mismos, con nuestras intervenciones posibles durante el recorrido.

En segundo lugar, y muy ligado a lo anterior, el análisis abarca no solo qué van a hacer los alumnos sino también cómo lo van a validar, cuáles serán sus puntos de apoyo para reconocer si algo está bien o no. En este contexto se hace observable que los números propuestos condicionan el establecimiento de diversas relaciones entre los datos y las incógnitas.

En tercer lugar nos interesa resaltar que, aun compartiendo la idea de que es interesante –y necesario– discutir con los alumnos sobre la validez de sus producciones, no estábamos inicialmente de acuerdo respecto de qué tipo de relaciones promover. En tanto que algunos pensaban en favorecer la emergencia de relaciones erróneas para ponerlas como asunto de debate en la clase, otros consideraban que eso, por ejercer un fuerte condicionamiento, restringía la libertad de los chicos para pensar. Estos compañeros marcaban la diferencia entre trabajar a partir de relaciones erróneas propuestas por los alumnos e inducirlas nosotros, señalando que esta última actitud es restrictiva. Se trata de una discusión interesante porque advierte sobre la tergiversación que puede implicar tomar de manera esquemática ciertos criterios que en principio favorecen el aprendizaje. Efectivamente, entre ofrecer datos relacionados entre sí para que los alumnos dispongan de diversos puntos de apoyo para validar su trabajo y proponer datos que "lleven como por un carril" a un resultado –correcto o erróneo, no importa– hay una diferencia sustancial que nos obliga a analizar y a fundamentar con cuidado lo que finalmente propongamos. Este intercambio de ideas quedó abierto y tal vez en eso radique su mayor riqueza: no hay recetas que indiquen un modo de proceder que siempre funcionará, no hay fórmulas contundentes, todo invita a examinar las decisiones desde los distintos puntos de vista que lleguemos a reconocer.[6]

En cuarto lugar, la anticipación que realizábamos nos generaba alguna incertidumbre acerca de cómo sucederían realmente las cosas en la clase ("estaría bueno ver qué pasa con esto"), lo cual transformaba al aula en un ámbito al que iríamos no solo a enseñar sino también a explorar el funcionamiento de nuevas alternativas.

Como analizaremos a continuación, estos intercambios referidos a las relaciones entre los datos de un problema y las posibles estrategias de los alumnos nos condujeron a revisar la propuesta inicial.

6. A propósito del análisis del Problema 2, se verá que nos pusimos de acuerdo en promover la producción de una estrategia "errónea". Reafirmamos en ese momento la necesidad de analizar caso por caso y por lo tanto no construir tan rápidamente reglas generales.

LAS DISCUSIONES DEL GRUPO: UN CONTEXTO PARA REFORMULAR LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La pregunta acerca de cómo emergerían relaciones que son características de la linealidad llevó a modificar los datos del problema. Veamos:

> –¿Y cómo se juega en este problema la idea de variación uniforme?
> –Por ejemplo, algunos pueden darse cuenta de que entre el viaje a Tigre y el viaje a Capital hay 40 kilómetros de diferencia y que por 40 kilómetros más cobran 160 pesos más, lo cual habilita a establecer que el precio por kilómetro es 4 pesos.
> –Sí, esa relación la pueden establecer con diferentes pares, pero ¿por qué no ponemos valores que la hagan más disponible?
> –¿Cómo?
> –Claro, podemos poner dos intervalos que tengan entre sí la misma diferencia en kilómetros, por ejemplo, si agregamos Quilmes a 17 kilómetros y... qué sé yo, Glew a 24 kilómetros, tendríamos un aumento de 7 kilómetros entre la excursión mínima y Quilmes, y un aumento de 7 kilómetros entre Quilmes y Glew. Esto facilitaría que algunos analicen la variación uniforme: cuando se incrementa 7 kilómetros el viaje, el precio aumenta 28 pesos, o sea que el kilómetro cuesta 4 pesos.
> –¿Compran, los demás?
> –Sí, compramos.

Como veremos al analizar el desarrollo de la secuencia en las aulas, fue importante que los alumnos dispusieran de datos en los que la variable *recorrido del viaje* estuviera distribuida a intervalos de la misma longitud. En algunas clases, esto provocó discusiones que nos llevaron a revisar una vez más, *a posteriori*, los valores propuestos.[7]

Coordinando todas las ideas que surgieron en la discusión llegamos a la siguiente síntesis, un telón de fondo que fortaleció el marco de todos y, en particular, el de aquellos docentes que tendrían la responsabilidad de conducir la clase:

- sería interesante promover la producción de diferentes relaciones, sean estas correctas o no. Comprender una situación supone poder analizar tanto las relaciones que son válidas como las que no lo son;
- los datos dados deberían favorecer la producción de relaciones. No resulta interesante esperar que estos datos sobredeterminen procedimientos que uno espera ver aparecer, sino más bien constituir puntos de apoyo para validar o rechazar los resultados que se vayan produciendo;

7. Aunque el concepto de *variable didáctica* –condiciones de un problema cuya modificación incide en las estrategias de los alumnos (Brousseau, 2007)– no fue abordado de forma explícita en las discusiones, claramente alimentó las decisiones que se fueron tomando.

- para poner en cuestión la proporcionalidad directa puede resultar fértil preguntar por el precio por kilómetro apoyándose en diferentes pares de datos;
- según los valores que usen al aplicar proporcionalidad directa, se pueden obtener resultados inconsistentes con los datos (un viaje más corto que otro, cuyo importe se conoce, a un precio más caro). En estos casos la comprensión que los alumnos tengan del contexto cumple una importante función en tanto ayuda a descartar un resultado;
- el hecho de que los alumnos usen ciertas relaciones como: a la suma, la suma; al doble, el doble; al triple, el triple, etc., no significa que tengan conciencia de estar aplicando la proporcionalidad directa. En ese sentido, mostrar que esas relaciones no se cumplen con los datos dados no sería suficiente para que ellos rechacen la proporcionalidad.

A partir de esta síntesis modificamos los datos del problema y propusimos la siguiente tabla:

Destino	Distancia	Precio
Excursión mínima	10 km	$1.040
Quilmes	17 km	$1.068
Glew	24 km	$1.096
Capital Federal	40 km	$1.160
Tigre	80 km	$1.320
Laguna Ranchos	97 km	$1.388
Chapadmalal	410 km	$2.640

Al preguntar por un viaje a un lugar a 120 km, los alumnos tenían la posibilidad de:

- aplicar proporcionalidad directa apoyados en algún par de valores. Según los valores que se tomaran como punto de apoyo, se podrían obtener resultados inconsistentes, lo cual ayudaría a descartarlos;
- sumar los importes de los viajes correspondientes a Tigre y a Capital Federal. En ese caso, el resultado también daría un importe casi igual al costo de un viaje a Chapadmalal para un recorrido mucho menor;
- multiplicar por 12 el importe correspondiente a la excursión mínima (resultado absurdo);
- analizar que al aumentar 7 km, el importe aumenta $28, con lo cual el precio por km es de $4. A partir de ese cálculo, obtener el cargo fijo de $1.000.

La discusión nos permitió reconocer que en todas estas estrategias hay conocimientos en juego, lo cual nos llevó a valorar con igual estatuto tanto las *erróneas* como las *correctas.* Estas anticipaciones no tuvieron un carácter predictivo, más bien apuntaron a realizar un trabajo analítico que nos diera mayor disponibilidad para interactuar con los alumnos. Algunas estrategias de los chicos nos sorprendieron por su originalidad y nos hicieron pensar que el entusiasmo y la producción que luego vimos en las aulas estuvieron muy ligadas al entusiasmo que pudimos –que supimos– fabricar durante nuestro propio proceso de producción.

LOS VALORES PROPUESTOS HABILITAN UNA ESTRATEGIA UN POCO AZAROSA: ¿OBSTÁCULO O PUNTO DE APOYO?

En el marco de los intercambios, un compañero plantea que los datos facilitan la posibilidad de que los chicos obtengan al tanteo el cargo fijo. Esto para algunos parece ser un inconveniente y para otros un punto de apoyo:

> –Sacando el 1 de los precios, las últimas cifras funcionan como proporcionalidad directa. Ellos podrían descartar el 1.000 y van a observar que cuando de 40 km pasa a 80 km, se duplica el precio.
> –Uy, no, ¡entonces cambiemos!
> –No, ¿por qué? ¡Tal vez para algunos sea el único recurso que encuentran! Es bueno que todos puedan hacer algo.
> –Se los estamos regalando un poco, ¿no?
> –Pero *si después ponemos otro problema parecido con otros valores, esa estrategia no va a ser posible,* solo que *los chicos* ya *estarán en otras condiciones.*
> –Si obtuvieron el cargo fijo al tanteo, lo podrán verificar y al verificar van a entender mejor cómo funciona la relación. En esta operación podremos empezar a subrayar que una única relación engloba todos los datos de la tabla.

El diálogo da cuenta de nuestras tensiones: mientras unos aspiraban a que los chicos propusieran estrategias más elaboradas y pensaban que la posibilidad de resolver con procedimientos de tanteo evitaba esa experiencia, otros consideraban que la sola oportunidad de responder es un modo de involucrarse. Todos acordábamos que serían los chicos más “flojos” quienes más probabilidad tendrían de usar la estrategia de tachar el 1.[8] Tomamos de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1993) la denominación de alumnos “flojos” para referirnos a

8. Como veremos en la Parte II de este libro, el desarrollo efectivo muestra la insuficiencia de un análisis en términos de “flojos” y “avanzados”: las razones por las que los chicos ponen en juego una estrategia menos elaborada son diversas y no necesariamente son la prueba de que tienen más dificultades, como tiende a pensarse.

aquellos estudiantes que parecen situarse de manera ajena a su propio aprendizaje. Señalemos que la opción que se esboza en el diálogo de volver a plantear un problema similar con otros valores, es decir *hacer durar más tiempo* el problema renovando las exigencias pero sosteniendo las relaciones que implica, abre una alternativa para que alumnos ubicados en diferentes posiciones con relación al conocimiento se vayan sumando al proyecto en momentos diferentes. Volveremos sobre este asunto.

LO VISIBLE Y LO INVISIBLE A PROPÓSITO DE LAS INTERACCIONES ENTRE LOS ALUMNOS

Aunque en el momento de la planificación todos veíamos con buenos ojos promover los intercambios entre los chicos, recién pudimos apreciar toda la potencia de las interacciones entre los estudiantes al realizar el análisis de la implementación efectiva de las clases, como veremos en la Parte II de este libro. Cuando empezamos a hablar de la posibilidad de promover un modo de producción cooperativo entre los alumnos, reconocimos las dificultades que existen para lograrlo:

> –Siempre pasa que los dos o tres que entienden todo rápidamente tapan la producción de los otros porque vociferan los resultados y desalientan al resto. Es por eso que muchas veces se hace difícil conseguir que discutan.
>
> –Cuesta trabajo que los chicos hagan el esfuerzo de entender lo de los otros.
>
> –Estaría bueno que les aclaráramos que esperamos distintos modos de resolver y que va a resultar interesante que discutamos sobre los mismos.

Estas intervenciones ponen de relieve aspectos que empiezan a tomar cuerpo en el proyecto: sabiendo que es difícil lograr que los alumnos tomen en cuenta los puntos de vista de sus compañeros, ¿cómo generar buenas condiciones para que interactúen de verdad? ¿Y qué significa interactuar "de verdad"? ¿Cómo intervenir para que los estudiantes valoren positivamente la diversidad de producciones y la tomen como base para participar en debates que los involucren?

Luego de marchas y contramarchas en las discusiones dentro del equipo, consensuamos una modalidad que tomamos de un grupo de investigadores que ha explorado condiciones para el intercambio de los alumnos en las aulas (Arsac, Chapiron, Colonna *et al.*, 1992):[9] los chicos trabajarían en grupos para elaborar una respuesta a la pregunta por el costo de un viaje de 120 km, luego cada grupo escribiría su resolución en un papel afiche (o en el pizarrón), los afiches se expondrían y se otorgaría un tiempo para que todos los alumnos

9. Se trata de una modalidad que ha sido relatada en diversos trabajos didácticos en los que se da cuenta de su fertilidad.

lean las producciones y las analicen. Consideramos fundamental este tiempo para jerarquizar el análisis que los integrantes de cada grupo podrían hacer respecto de la producción de sus compañeros. Recién después se plantearía un debate en toda la clase.

Siempre resaltamos que aunque llegáramos a ciertos acuerdos, los profesores de un aula[10] decidirían con toda libertad si seguirían o no la estrategia convenida, si la modificarían total o parcialmente. Es decir, las discusiones que sosteníamos actuaban como un marco que alimentaba el proyecto de cada equipo de profesores pero estos –en principio– no quedaban comprometidos a seguir de forma estricta todo lo acordado. Es interesante resaltar que en todas las aulas se llevó adelante la estrategia de los afiches, aun cuando todos reconocían que fue laboriosa para los docentes. Los compañeros subrayaron que en este caso –y en muchos otros– el grupo colaborativo de docentes operó como un interlocutor implícito que ayudó a sostener la implementación concreta del trabajo, sobre todo en aquellos aspectos que se mostraban más arduos. De todos modos, hubo distintas interpretaciones de cómo llevar adelante esta modalidad. Veremos más adelante que el análisis colectivo del funcionamiento de los afiches en las diferentes aulas nos ayudó a conocer mejor algunas condiciones en las cuales se favorece una interacción productiva entre los alumnos.

LA COMPRENSIÓN DE LAS CONSIGNAS: UNA CUESTIÓN QUE DA PARA HABLAR

Cuando pensábamos que ya teníamos todo decidido, alguien preguntó cómo íbamos a plantear la consigna:

> –¿Lo ponemos por escrito? ¿Lo decimos? ¿Hacemos aclaraciones si los chicos lo preguntan?
>
> –Es fundamental que los chicos entiendan cómo se cobra el viaje, sino, no van a poder trabajar.
>
> –Sí, hagamos una pequeña discusión oral para asegurarnos, no confiemos en que basta con la consigna escrita.
>
> –Si hacemos eso ya empezamos a decir cosas y tienen que resolver solos.

Este último intercambio trajo el famoso tema de la comprensión de las consignas. En el grupo ya habíamos mencionado que la referencia al contexto resultaba fundamental para que los alumnos pudieran trabajar. Llegamos a discutir

10. Recordemos que en cada curso, además del profesor correspondiente, asistió por lo menos otro compañero que registraba la clase. Profesor y observadores constituyeron un equipo de trabajo que fue tomando decisiones en función del desarrollo particular de la secuencia en su curso.

posturas sobre una distinción interesante: *decir* cómo funciona el contexto no equivale a *decir* cuáles son las relaciones matemáticas que permiten tratarlo. Aparentemente, esto nos tranquilizaba respecto de la pertinencia de hacer todas las aclaraciones que fueran necesarias. Sin embargo, a pesar de haber acordado respecto de la legitimidad –y la necesidad– de brindar información sobre el funcionamiento del contexto en el que plantearíamos el problema, puestos en acción muchos compañeros no pudieron superar la sensación de incomodidad que les generaba tener que explicar qué es un cargo fijo y cómo se cobra la tarifa de los viajes. Esto constituyó *a posteriori* una oportunidad de volver sobre un viejo malentendido: para que el trabajo sea genuino, los alumnos deben hacerlo *solos*.

Pero, ¿qué es construir conocimiento? ¿Qué papel juega el docente en la construcción que realiza el alumno? ¿Qué es un alumno autónomo? ¿Cuáles son los aspectos que los chicos pueden saldar por sí mismos y cuáles requieren que el docente aporte información? Estos interrogantes plantean asuntos relevantes sobre los que seguimos trabajando una y otra vez en el intento de superar la confusión instalada entre formar un alumno intelectualmente autónomo y dejarlo intelectualmente desamparado.

EL DOCENTE COMO PROMOTOR DE LAS DISCUSIONES EN CLASE

A esta altura todos coincidíamos en que se podrían proponer otras preguntas a raíz del problema de los viajes: averiguar por los importes correspondientes a otros viajes y, de manera inversa, conocido el importe de un viaje, establecer su kilometraje. Imaginamos, a título de ejemplo, algunos casos que elegimos para ciertas reflexiones.

PROBLEMA 1 (CONTINUACIÓN)

- *¿Cuánto costará hacer un viaje con esta agencia a una ciudad que está a 205 km? ¿Y a una que está a 700 km?*
- *¿Cuál es el precio para 800 km? ¿Para 57 km? ¿Y para 345 km?*
- *¿Podemos saber el precio por kilómetro? ¿Podemos saber el cargo fijo?*
- *¿Podemos encontrar una cuenta genérica que nos sirva para calcular el precio de un viaje, cualquiera sea la cantidad de kilómetros?*
- *Si un grupo pagó $1.340, ¿de cuántos kilómetros habrá sido el viaje? ¿Si pagó $2.520? ¿Y si pagó $5.800?*

Estos números –se podrá inferir– tienen *intención*: 205 es la mitad de 410, la distancia del viaje a Chapadmalal; 800 es diez veces el kilometraje del viaje a Tigre; 57 puede pensarse como 40 + 17, pero también como 97 − 40, lo cual da margen para que los alumnos establezcan varias relaciones.

Analizamos en el grupo que algunos chicos calcularían el precio por kilómetro y el cargo fijo, en tanto que otros maniobrarían con los datos. La intención al proponer estos valores era estimular la producción de relaciones en el camino de encontrar la cuenta genérica. También vimos que la pregunta referida a la existencia de una cuenta genérica apuntaba a consolidar una idea que no todos los alumnos tendrían elaborada a esa altura: todos los pares (distancia del viaje, importe) responden a un mismo tipo de cálculo. Efectivamente, la experiencia de enseñanza de muchos compañeros nos hacía saber que es significativa la cantidad de chicos que tratan cada par aislado de sus vecinos, como si fueran independientes unos de otros. En este sentido, dicha pregunta apunta a un primer nivel de generalización. Nuestra hipótesis era que el cálculo genérico es un antecedente importante para la elaboración de la fórmula.

La última pregunta cambia el lugar de la incógnita. Pensábamos que los alumnos podrían invertir la relación (restar el cargo fijo y dividir por el precio por kilómetro) o ir tanteando y ajustando "al derecho", en función de los resultados que fueran obteniendo. Promover la confrontación entre quienes *tantean* y quienes *invierten* podía hacer visible que en ambos casos se estaba usando la misma relación, solo que vista de maneras diferentes.

Todos conocemos un hábito instalado en las clases de matemática, el de proponer un problema y muchas preguntas que normalmente se plantean todas juntas para que los alumnos las vayan resolviendo. En ese caso, se pierde la posibilidad de plantear nuevas preguntas que surgen del trabajo en clase, ya sea al poner en relación dos procedimientos diferentes, al recoger la opinión de unos alumnos sobre los dichos o escritos de otros o al reflexionar sobre los modos de proceder a raíz de la tarea que se llevó a cabo. Como ya mencionamos antes, hemos diferenciado dos momentos que dan lugar a la producción de diferentes tipos de conocimientos: el de resolución del problema y el de reflexión sobre la resolución. Es en este contexto que decidimos no dar todas las preguntas por escrito para ir regulando la propuesta sobre la base de lo que sucediera en el aula.

LA FRONTERA ENTRE VIEJOS Y NUEVOS SABERES: ALGUNOS REPAROS A LA NOCIÓN DE *IDEA PREVIA*

Los compañeros de nuestro grupo provenían de escuelas diferentes, con alumnos y culturas distintas. Todo el tiempo flotaba en el aire cierta preocupación por esa diversidad. ¿Lo que estábamos concibiendo sería posible para todos los cursos en los que se iría a desarrollar? Como hemos dicho, desde un principio teníamos claro que, a partir de la planificación compartida, en cada escuela se seguirían las opciones que los respectivos profesores consideraran más adecuadas. Para nosotros, la cuestión era poder fundamentar esas opciones. En ningún momento tuvimos en el horizonte la posibilidad de que en todos los grupos se hiciera exactamente lo mismo, asumíamos que una parte del recorrido se plasmaría a partir de las producciones de los alumnos y estas iban a ser diferentes –muy probablemente– en cada lugar. En ese contexto de reconocida diversidad, una y otra vez nos preguntábamos qué deberían saber los estudiantes para estar en condiciones de abordar la secuencia.

Resultaba muy difícil responder esta pregunta: ¿qué es lo *inmediatamente anterior* a función lineal que los alumnos *ineludiblemente* deberían saber? ¿Se responde de la misma manera esta pregunta, cualquiera sea la experiencia matemática de los chicos? ¿Cómo juegan, en la posibilidad de abordar los problemas, su vínculo con la matemática, sus creencias, su racionalidad, las posibilidades que tienen de interactuar con sus compañeros, la disponibilidad para lanzarse a resolver? ¿Tiene sentido hablar de conocimientos previos independientemente de la propuesta efectiva de enseñanza? Cuando se piensa que es toda esta complejidad la que condiciona un proceso de producción en clase, ¿es realmente posible delimitar lo que *debe* saber un alumno para enfrentar una problemática? ¿Existe verdaderamente una frontera entre lo *viejo* que se sabe y lo *nuevo* que se va a aprender?[11]

DESPUÉS DEL PRIMER PROBLEMA: LA NECESIDAD DE SOSTENER LAS RELACIONES PRODUCIDAS

> Cuando se abre el juego a la producción de los alumnos,
> aflora en la clase una gran diversidad de ideas.
> *Profesor integrante del equipo*

Y sí... Al alentar a los chicos a que aborden los problemas con recursos propios, se favorece la emergencia de distintas estrategias que se despliegan en plazos diferentes. Una vieja tradición escolar, según la cual todos los alumnos hacen lo mismo en el mismo momento, pierde sentido. ¿Es esto bueno o malo? Desde nuestra perspectiva es bueno. Y difícil de coordinar. Es bueno básicamente por dos razones: porque la diversidad de estrategias puede ser fuente de nuevos –y productivos– problemas para la clase y porque todas las ideas de los alumnos –aun las menos elaboradas– pueden tener un lugar en el espacio colectivo. En otros términos, concebir que los problemas pueden ser abordados legítimamente con diferentes recursos resulta al mismo tiempo inclusivo y enriquecedor.

Esta misma diversidad a la que acabamos de hacer referencia permite pensar que los alumnos necesitan tiempos diferentes para comprender, para abordar, para resolver, para concluir... ¿Cómo albergar esa diversidad? ¿Cómo generar condiciones para que todos avancen pero se respeten los recorridos

11. Esta relación *viejo-nuevo*, ligada al funcionamiento temporal de los saberes en la escuela, fue abordada por numerosos autores del campo de la didáctica de la matemática. Citamos entre otros a Chevallard (1997), Sensevy (2007) y Perrin Glorian (1993).

particulares en la elaboración de las ideas? Sostener los problemas que se proponen es un modo de fabricar tiempo y dar oportunidad a los alumnos para que amasen esas ideas, cada uno según su realidad. Propusimos entonces un segundo problema similar al primero. El objetivo era que los chicos pudieran reutilizar, resignificar o incluso comenzar a comprender –según el caso– las relaciones producidas en el primer problema.

PROBLEMA 2

Otro grupo de 2º averigua en una agencia de turismo diferente, Florencio Bus. El empleado les comenta que la empresa cobra un cargo fijo por viaje y un cierto precio por cada km recorrido para cualquier destino. Además les entrega el siguiente folleto:

Te llevamos a...
· Quilmes, un lugar para descansar, por $736.
· Vamos a Capital Federal, donde podrás recorrer los bosques de Palermo, el planetario y mucho más. Nuestro viaje, solamente $920.
· Ranchos, una laguna con toda la onda. El viaje, solo $1.376
· Recorré La Plata, sus plazas, la catedral, los museos y sus diagonales, te llevamos por $1.032.
· Visitá El Tigre, podrás pasear en catamarán, pescar, recorrer la reserva ecológica. El costo del viaje es $1.240.
· Y muchas opciones más...

· *¿Cuánto costará un viaje a Chapadmalal, que queda a 410 km?*

Como dijimos, con la idea de "hacer durar" el trabajo propuesto planteamos un problema casi igual, aunque con otros datos. Pensábamos que esto les permitiría a algunos profundizar, confirmar o generalizar las ideas elaboradas. Otros podrían terminar de entender por qué ciertas relaciones, que son siempre candidatas favoritas a ser utilizadas, no funcionan en este caso. En general, creíamos que todos podrían usar lo ya realizado y discutido como marco para pensar la nueva tarea. Si bien el análisis minucioso de lo que sucedió en las aulas constituye el objeto de la Parte II de este libro, apelaremos a partir de ahora a algunos registros de clase para ilustrar aspectos de la potencialidad de las tareas propuestas. Veamos en una escena de clase cómo el Problema 1 se constituye en referencia para la realización del Problema 2:[12]

12. La numeración de las intervenciones citadas a continuación no corresponde a la transcripción original de la clase. Optamos por numerar a partir del segmento seleccionado. Las intervenciones de la docente están especificadas, las demás corresponden a las iniciales de alumnos.

1. B. ¿El kilómetro vale lo mismo que en la otra empresa?
2. PROFESORA. Eso habrá que averiguarlo, Bárbara pregunta si el kilómetro vale lo mismo que en la otra empresa.
[...]
3. BR. Hay que averiguar el cargo fijo.
4. G. *En la otra* el cargo fijo era 1.000 pesos y 4 pesos el kilómetro, *ahora* tenemos que averiguar si los kilómetros valen igual.
5. M. Para sacar el kilómetro, *en la otra clase habíamos buscado*, habían buscado ellas, la diferencia entre los dos mínimos, acá sería Quilmes y Capital, que son los más baratos: 920 menos 736 es 184 pesos.
[...]
6. M. *Lo que habían hecho* [se refiere a un procedimiento realizado por unas compañeras para el problema anterior] fue el precio por kilómetro, más el cargo fijo, que era 1.000.
7. BR. Acá no sale 1.000, sale más barato y eso es lo que hay que averiguar.
8. G. Acá la plata ¿habría que dividirla también?
9. F. ¿Qué es lo que querés hacer?
10. G. Dividir todo.
11. F. ¿Cómo sería el cálculo? Escribilo en una hoja.

Como se puede apreciar en la intervención 1, los chicos comienzan de una manera imprecisa, preguntándose por posibles relaciones entre los valores de una y otra empresa. Luego recuperan los cálculos utilizados (intervenciones 4, 5 y 6), evocando la función que cumplen los números. Así, logran tanto profundizar una mirada sobre el problema anterior como preparar la estrategia para abordar este.

Estos episodios ilustran la potencia de sostener una problemática durante bastante tiempo (Sensevy, 2007). Efectivamente, apelar a que se revise lo anterior a raíz de una situación similar, así como proponer reutilizar las ideas producidas, son estrategias que configuran una historia de producción en la clase donde se promueve que cada vez más alumnos se vayan incluyendo en la propuesta.

LOS DATOS DEL SEGUNDO PROBLEMA

Nuevamente, acá las decisiones sobre los valores que incluiríamos fueron objeto de discusión. Así como en el caso anterior habíamos propuesto datos correspondientes a un cargo fijo de $1.000, sabiendo que muchos chicos podrían resolver al tanteo, en este caso quisimos obstaculizar esa posibilidad. El nuevo cargo fijo –que habrá que inferir de los datos– es $600 y el precio por kilómetro, $8. Los importes que incluimos para los viajes de esta segunda empresa son más baratos que los correspondientes de la primera, lo cual podría llevar a algunos chicos a anticipar que en esta segunda empresa todos los viajes serían más baratos. Tarde o temprano los alumnos constatarían que aquello que habían anticipado es verdad solo para un intervalo de valores, fuera del cual las cosas cambian. ¿Por qué esto resulta interesante? Porque la anticipación se apoya en la producción de ciertas relaciones que, al no verificarse, le hacen saber al alumno que las cosas son diferentes de lo que creía. Esto genera perplejidad –o puede contribuir a generarla– y por eso mismo favorecer la búsqueda de explicaciones para esa contradicción. Por otro lado, analizar por intervalos el proceso que se estudia, y no solamente a partir de valores puntuales, pone en juego la noción de variación. En ese sentido, se trata de una tarea constitutiva del concepto de función; movilizarla acá parecía entonces una oportunidad.

MÁS PREGUNTAS CON RELACIÓN AL SEGUNDO PROBLEMA

Como ya comentamos a raíz del problema anterior, propusimos una serie de preguntas cuya formulación efectiva se iría regulando en las diferentes aulas en función de la apreciación que cada grupo de profesores tuviera acerca de las necesidades de la clase. Es así como previmos que los estudiantes calcularían los importes correspondientes a diferentes distancias e, inversamente, las establecerían una vez conocidos los importes.

Con la intención de poner de relieve que todas las preguntas se engloban en una única relación, pensamos en preguntar:

· *¿Habrá también en este caso una cuenta genérica que sirva para calcular el precio de un viaje, cualquiera sea la cantidad de kilómetros?*

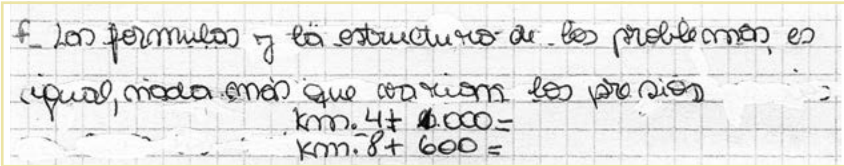
Para profundizar el proceso de generalización de lo lineal a través de la comparación de los dos problemas, propusimos discutir:

· *¿Se parece el cálculo genérico que planteamos para este problema al que hicimos en la situación anterior? ¿En qué se parece y en qué se diferencia?*

Estas últimas preguntas apuntaban a visibilizar dos niveles de generalización: la relación que engloba a todos los cálculos de este problema y la relación entre los dos problemas. De esta manera se podría percibir que se trata de cuentas del mismo tipo, solo que con parámetros diferentes.[13] Además, nos proponíamos identificar que, en ambas situaciones, a un determinado incremento de la cantidad de kilómetros le corresponde siempre el mismo incremento del importe, cuestión que también supone avanzar en el proceso de generalización.

La siguiente escritura, realizada por dos alumnas, permite apreciar la potencia de la pregunta anterior, mostrando cómo en el proceso de comparación logran abstraer la estructura común a las dos fórmulas:

13. Usamos el término *parámetro* en diálogo con el lector, pero preferimos no introducirlo en las clases.


f_ los formulas y la estructura de los problemas es igual, nada más que varían los precios :
km. 4+ 1.000=
km. 8+ 600=

Las fórmulas y la estructura de los problemas es igual, nada más que varían los precios [*sic*][14]
Km. 4 + 1.000 =
Km. 8 + 600 =

Un tercer problema cierra –en principio– la primera etapa de la secuencia y apunta a estabilizar las relaciones producidas. Ahora se ofrecen como datos el cargo fijo y el precio por kilómetro. Los alumnos deben calcular el importe de un viaje o la distancia que implica. Como veremos luego, y con una intención generalizadora, se propone como cierre buscar una cuenta genérica.

PROBLEMA 3

En cierta agencia nos informan que cobran $850 de cargo fijo y $6 por kilómetro recorrido. ¿Cuánto cuesta un viaje de 1.000 km? ¿Qué distancia se recorre si el importe es de $3.850?[15]

Realizado este tercer problema, anticipamos en el grupo que podríamos establecer una comparación entre las tres situaciones. A partir de la misma se podrían alcanzar conclusiones del siguiente tipo:

- En los tres problemas ocurre que por cada kilómetro que se agrega se aumenta lo mismo ($4 en el primer caso, $8 en el segundo y $6 en el tercero). Como consecuencia, a un cierto incremento en los kilómetros corresponde, para cada viaje, un cierto incremento en el importe.
- En los tres problemas el precio de un viaje se calcula por una cuenta del mismo tipo: precio del viaje = precio por kilómetro ∗ cantidad de kilómetros + cargo fijo.
- En los dos primeros problemas, a partir de algunos datos, hallamos el precio por kilómetro y el cargo fijo sabiendo que por kilómetro se paga lo mismo; en el tercer problema, esos datos fueron dados y hubo que calcular ciertos importes o distancias.

14. Transcribimos textualmente el escrito de las alumnas con el propósito de facilitar su lectura.

15. Para orientar al lector, incluimos dos preguntas, pero cada grupo de profesores eligió varios pares, a su criterio.

Si bien estas conclusiones pueden obtenerse del trabajo con los problemas, entendimos que no surgirían de manera natural: subrayar estas ideas entre el conjunto de relaciones posibles que los alumnos podrían realizar es del ámbito de la actuación del docente.

Apelamos de nuevo a un registro de clase, aportado por una de las integrantes del grupo, para ver cómo en la discusión colectiva los estudiantes van armando la fórmula correspondiente a los tres problemas y precisando el significado de variables y parámetros. Se trata de una clase en la que se está reflexionando sobre los Problemas 2 y 3. Para cada uno de ellos la profesora pide que propongan una fórmula y colectivamente las ponen a prueba con diferentes valores. Las fórmulas propuestas son:

$$\mathscr{X} * 8 + 600 = \mathscr{P}$$

y

$$\mathscr{X} * 6 + 850 = \mathscr{P}.$$

Veamos el diálogo:

> PROFESORA. Miren lo que dice Jonatan: esta fórmula *(se refiere al Problema 2)* es *la misma* que está acá *(correspondiente al Problema 3)*.[16]
> MARIANO. Sí.
> JONATAN. Es lo que vale, más el cargo fijo.
> BRENDA. *$\mathscr{X}$ equivale a los kilómetros.*
> PROFESORA. Jonatan, volvelo a decir, vos dijiste que *esta cuenta es la misma que esta*.
> ALAN: $\mathscr{X}$, por tanto, más el cargo fijo.
> JONATAN: Sí, esa fórmula es como para sacar cuánto sale el viaje. *$\mathscr{X}$ por el valor del kilómetro, más el cargo fijo*. Es esa la fórmula.

La profesora, luego de una discusión sobre el significado de parámetros y variables, reformula la escritura a partir de los aportes de los alumnos y anota en el pizarrón:

$$\mathscr{X} * \text{? (valor del km)} + \mathscr{CF} = \mathscr{P}$$

El diálogo continúa:

> PROFESORA. La empresa del otro día ¿también respondía a esta fórmula?
> VARIOS. Sí, todas.
> PROFESORA. O sea que los tres nos quedaron con el mismo tipo de fórmula.

16. Notemos que la expresión *la misma* –que la profesora retoma a partir de la propuesta de un alumno–, aplicada a dos escrituras que no son exactamente iguales, convoca al conjunto a abstraer los rasgos comunes de ambas expresiones.

La profesora sigue desplegando una intención que las discusiones del grupo habían permitido concebir: lograr que los tres problemas realizados queden aglutinados bajo una única expresión a partir del análisis realizado.

Considerábamos que una vez producida la fórmula existirían condiciones para reinterpretar el significado de los parámetros que los alumnos ya habían elaborado previamente, cuando abordaron la situación contextualizada. Esto implica profundizar el nivel de generalización alcanzado.

Veamos una escena de clase en la que la profesora promueve un intercambio que apunta a dicha reinterpretación, ya que apela a que los alumnos actualicen las fórmulas de la clase anterior:

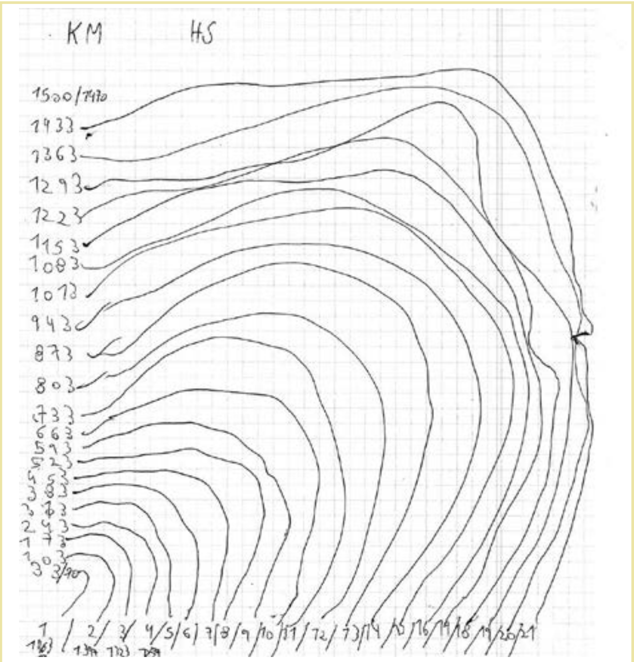
PROFESORA. *Si en la primera empresa yo recorro 1 kilómetro, me cuesta...*
VARIOS. 1.004.
PROFESORA. *Si recorro 2 kilómetros...*
VARIOS. 1.008.
PROFESORA. Si recorro 3 kilómetros...
VARIOS. 1.012.
PROFESORA. *O sea que cada kilómetro que agrego, ¿cuánto aumenta?*
B. 4 pesos.
PROFESORA. *En esta, por cada kilómetro que agrego, ¿cuánto aumenta?*
LUIS. 8 pesos.
PROFESORA. *¿Y en la tercera?*
AYRTON. 6 pesos.
PROFESORA. Ustedes dijeron que en esta empresa, por cada kilómetro que agrego, aumenta 4 pesos. Si agrego 2 kilómetros, ¿cuánto aumenta?
LUIS. 8 pesos.
PROFESORA. ¿Está bien? *Siempre aumenta lo mismo, porque el kilómetro costaba siempre lo mismo.*

La profesora propone analizar el aumento de precio por kilómetro para cada empresa. Las preguntas que plantea son un modo de plasmar una relación que le interesa reafirmar, que ya había sido tratada en las resoluciones de cada problema y que ahora aparece englobando a los tres. Está claro que esta relación entre la idea de variación uniforme y la representación de esa idea en la fórmula, lejos de ser espontánea, es promovida por la discusión que propone la docente.

ELEGIR, ANALIZAR, CONSTRUIR: DISTINTAS TAREAS, DISTINTAS COMPLEJIDADES CON RELACIÓN AL TRATAMIENTO DE LOS GRÁFICOS

Los tres primeros problemas de la secuencia que acabamos de analizar movilizaban, con relación a las formas de representación, el marco verbal (a través del enunciado que se propone inicialmente de manera escrita y cuyo significado se precisa en la oralidad), el numérico (a través de la tabla de valores) y el algebraico (a través de la producción de una fórmula).[17] Parecía lógico pensar que le tocaba el turno al trabajo con gráficos. Ahora bien, al discutir distintas posibilidades encontramos numerosos matices que nos llevaron a detenernos en las condiciones en las que lo plantearíamos.

En primer lugar, analizamos la clásica tarea de proponer la representación en un gráfico cartesiano de alguna de las situaciones tratadas. En general se considera que esta opción no genera grandes dificultades, aunque para los alumnos que se están aproximando al tema no siempre es accesible su finalidad (ellos aún no saben que el gráfico es portador de informaciones sobre el problema). Sin embargo, la idea de que el gráfico es fácil –o que la representación cartesiana tiene algo de natural– quedó puesta en cuestión cuando tomamos contacto con la producción de un alumno aportada por un compañero del grupo (realizada a raíz de otra situación didáctica que no formaba parte de nuestras elaboraciones):



Pasada la sorpresa, reconocimos coherencia en el modo en que este estudiante, al unir las componentes a través de una línea, representó los pares ordenados. Veíamos también que está centrado en una representación punto a punto de la cual es difícil extraer información sobre la variación en un intervalo. Esto nos llevó a problematizar dos cuestiones:

17. El término *marco*, aunque pasible de interpretación intuitiva, remite a la teoría de Duval (1995), según la cual la interacción entre registros o marcos de representación es fuente de producción de conocimientos.

- La propuesta del alumno, en tanto existe, ayuda a desnudar la artificialidad de la representación cartesiana.
- Hay una diferencia conceptual entre concebir los puntos como *los* representantes de la relación y verlos solo como *algunos puntos* a partir de los cuales se puede inferir el comportamiento de un intervalo.

En la búsqueda de otras posibilidades, surgió la siguiente idea: presentar varios gráficos para que los chicos elijan cuál o cuáles pueden representar una situación ya tratada y cuáles no (en nuestro caso trabajaríamos sobre alguno de los tres problemas). Los intercambios que se produjeron en el grupo fueron configurando una situación que mostraba el potencial de esta idea para que los alumnos entraran al tema:

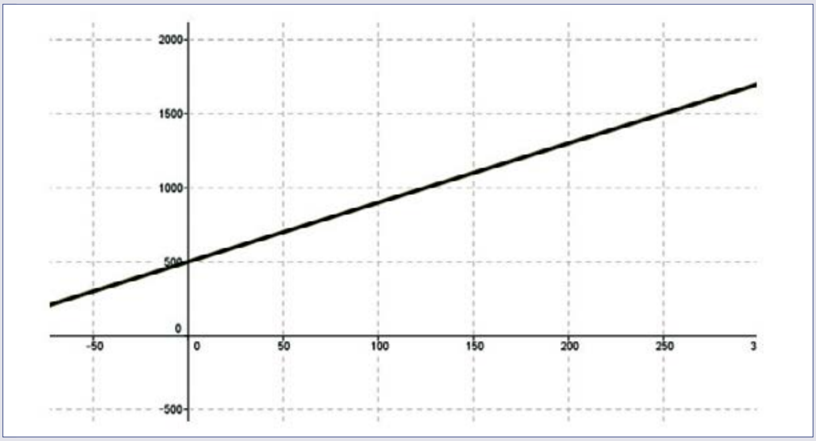
> –La ventaja que le veo a esto es que los chicos tienen que decidir y tienen que justificar por qué elijen o descartan cada gráfico, para eso algún argumento van a tener que elaborar.
> –Sí, hay que meterse adentro del gráfico, no alcanza con mirar.
> –El hecho de que tengan que elegir obliga a una coordinación entre el gráfico y la situación, de modo que ellos busquen claves que se cumplan o no en el gráfico y que lo tengan que argumentar. Es un modo de convocarlos a que se metan en el gráfico un poco más profundamente.

Después de discutir un rato, esta idea empezó a tener aceptación. Decidimos proponer los siguientes gráficos, referidos al Problema 1, para que los alumnos elijan y argumenten por qué optan o por qué descartan una cierta alternativa.

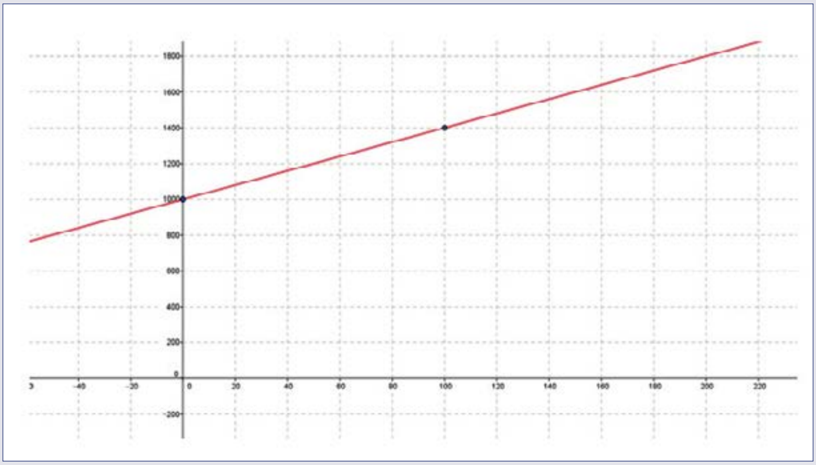
PROBLEMA 4

¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos representan la propuesta de la agencia de viajes que se trabajó en el Problema 1?

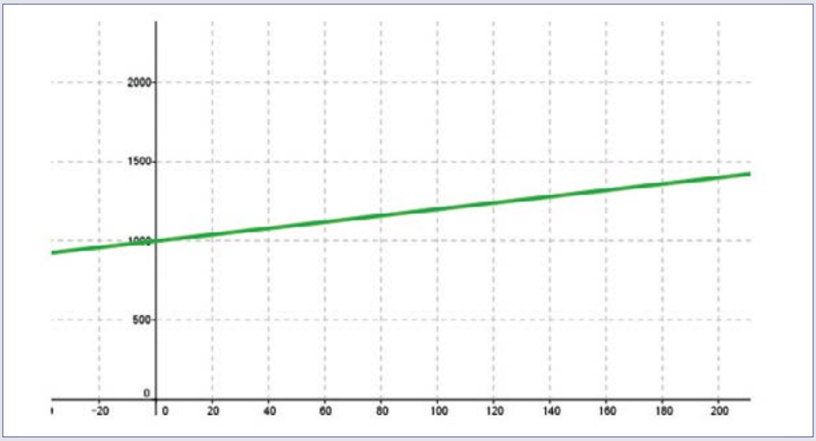
A



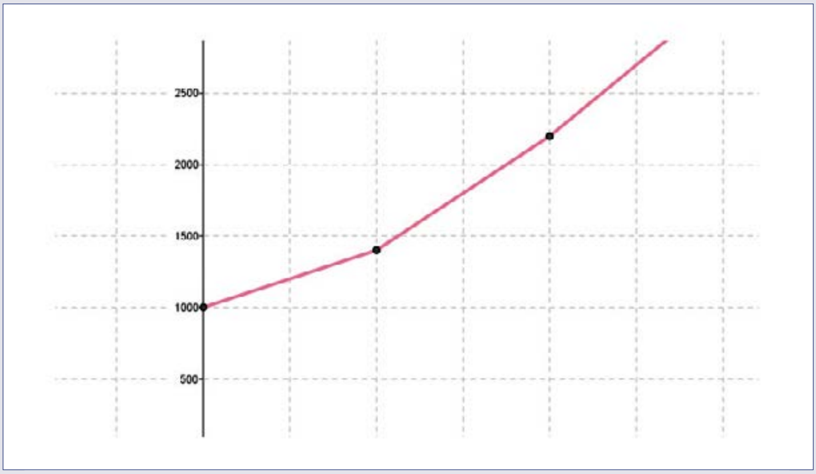
B


1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-200
-40
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220

C


2000
1500
1000
500
0
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

D


2500
2000
1500
1000
500

Cada gráfico tiene su razón de ser. Uno de ellos es el que representa la situación, otro es una recta que respeta la pendiente pero no el cargo fijo que se informaba en el problema, un tercero respeta el cargo fijo pero no la pendiente y hay un último gráfico que no es lineal pero está armado de tal manera que respeta el cargo fijo y otro valor. Este último posibilitará discutir que en dicho caso no se respeta el hecho de que, a incrementos iguales en la cantidad de kilómetros, corresponden incrementos iguales en el importe. Es decir que esta actividad tendría entre otros propósitos establecer una relación –nueva para los alumnos– entre *variación uniforme* y representación gráfica *recta*. En tanto el problema da lugar a la producción de ideas, encontramos acá una oportunidad para que la propuesta adquiera sentido para los chicos.

Como venimos analizando a lo largo de este material, el trabajo de anticipación sobre las posibles producciones de los estudiantes ayudó a visibilizar ideas que, por estar muy arraigadas, nos parecen obvias pero implican elaboraciones para quienes están aprendiendo. Veamos:

> –En realidad la situación no es compleja porque se fijan en dos renglones de la tabla y ya sea que coincidan o no con puntos del gráfico, van a saber...
>
> –No, porque no saben que tiene que ser una recta, no saben que con dos valores alcanza.
>
> –Justamente, hay que aprovechar la actividad para eso, eso es lo que tienen que aprender.
>
> –Lo tenemos tan incorporado que se nos mezcla lo que ellos saben con lo que sabemos nosotros. Esta confusión ya nos pasó cuando discutimos la relación entre linealidad y proporcionalidad.[18]
>
> –Volviendo a lo que estábamos diciendo antes, en realidad la actividad apunta a que los chicos construyan criterios suficientes para tomar decisiones.

Los diálogos anteriores muestran cómo la discusión nos iba internando en la complejidad de la actividad. Veamos los supuestos que asumimos:

- En primer lugar, a través de la actividad los chicos se encuentran con la posibilidad de elaborar que el gráfico es un modo de expresar las soluciones del problema. Necesitan adaptar ideas pensadas en el marco numérico a otra forma de representación. Esta adaptación no puede concebirse como una simple traducción, requiere de una elaboración que incluso los llevará a resignificar lo aprendido (Duval, 1995).
- En segundo lugar, tanto el cargo fijo como el precio por kilómetro, asuntos que estuvieron en el centro de las elaboraciones del Problema 1, carecen de la misma visibilidad en el gráfico: en tanto el cargo fijo corresponde

18. Ver diálogo en las pp. 26-27 de este libro.

a un punto de la recta, para determinar el precio por kilómetro –la pendiente– es necesario considerar lo*s* intervalos. Tomar conciencia de que la lectura de aspectos relevantes del gráfico requiere un análisis (y que esa lectura no resulta tan evidente como parece estar implícito en las actividades típicas de representar una determinada tabla) fue una *ganancia* de estas discusiones. Como veremos luego en el análisis de las clases, localizar en el gráfico el cargo fijo resulta más costoso de lo que inicialmente previmos.

- En tercer lugar, los chicos deben construir criterios de suficiencia para decidir –y argumentar– sobre la elección del gráfico. En otros términos, deben resolver qué elementos del gráfico son clave para caracterizar la situación tratada. Estos criterios no solo suponen avances en sus conocimientos sobre las representaciones gráficas sino que constituyen una oportunidad para profundizar en la comprensión del comportamiento lineal. Es el caso de la relación –ya comentada– entre representación recta y variación uniforme.

UNA BREVE REFLEXIÓN SOBRE EL ANÁLISIS DE GRÁFICOS Y LAS CONDICIONES EN LAS QUE SE ABORDA LO DIFÍCIL

En el momento de la planificación, no llegábamos a vislumbrar toda la complejidad que finalmente tuvo el trabajo con gráficos que propusimos. Las consideraciones que acabamos de realizar no son estrictamente las que habíamos llegado a hacer en la planificación, están afectadas por las producciones en el aula, un asunto que terminaremos de ver en la Parte II del libro. Este análisis nos llevó a valorar la fertilidad de que los estudiantes pusieran en relación la representación gráfica con las otras formas de representación ya tratadas: texto, tabla, fórmula.

La relación tabla-gráfico puede pensarse punto a punto y en ese sentido podríamos considerar que, en general, se muestra accesible para los alumnos: hay una correspondencia biunívoca entre un *objeto* en la tabla (el par) y su *correspondiente* en el gráfico (el punto, que también es un par).

Trabajar sobre la tabla tomando en consideración el contexto en el que se presentó el problema hace posible que los alumnos establezcan los parámetros y esto, a su vez, constituye un punto de apoyo para la producción de la fórmula. Además, la formula contiene información sobre los parámetros: en esta secuencia se propone un trabajo de discusión que permita explicitar el significado que estos adoptan en la fórmula y con relación al contexto.

Cuando pensamos en la relación fórmula-gráfico, las cosas cambian sustancialmente porque la información de la pendiente no se visualiza de manera directa en el gráfico y requiere de un análisis en términos de intervalos. En otras palabras, la información punto a punto no “muestra” la pendiente.

A raíz de las conclusiones anteriores nos contactamos con la cuestión tantas veces visitada en nuestros intercambios acerca de *lo fácil* y *lo difícil*

(Sadovsky, 2005). Tener conciencia de la complejidad de una situación cuyo sentido queda justificado por los asuntos que permite problematizar con los alumnos, transforma esa situación. En otras palabras, cuando se ponen de relieve las dificultades que los alumnos tendrán que enfrentar y se construye la convicción de que el esfuerzo vale lo que cuesta, el docente adquiere una intención que le genera buenas condiciones para sostener discusiones sustantivas en la clase. En cambio, si la dificultad aparece sin que se la haya podido anticipar, resultará mucho más costoso sostener a los alumnos en la propuesta de trabajo. En resumen, la situación no solo se configura a partir del problema que se plantea a los alumnos. Aquello que el docente conoce –o no conoce– de la tarea también condiciona fuertemente sus intervenciones y modifica los posibles recorridos en la clase.

LA COMPARACIÓN COMO VÍA PARA LA GENERALIZACIÓN

A esta altura de la secuencia, los estudiantes han tenido oportunidad de relacionar el funcionamiento de un contexto particular (el de los viajes) con ciertas ideas vinculadas a lo lineal: precio por kilómetro con variación uniforme y pendiente; cargo fijo con ordenada al origen y ruptura de la proporcionalidad. A su vez, han trabajado sobre semejanzas entre distintas situaciones particulares y las han representado a través de diferentes formas, lo cual le ha permitido a cada alumno avanzar en su proceso de generalización. ¿Cómo seguir? La comparación –operación que lleva a diferenciar elementos singulares y a seleccionar rasgos comunes– está en el corazón del trabajo de generalización, y la generalización está en el corazón del trabajo matemático. En aras de que los alumnos lograran abstraer las características del comportamiento lineal, los confrontamos en la primera etapa a encontrar descripciones abarcativas de las diferentes situaciones. Para profundizar el trabajo de comparación era necesario centrarse ahora en las diferencias. Hacia ahí fuimos con el siguiente problema.

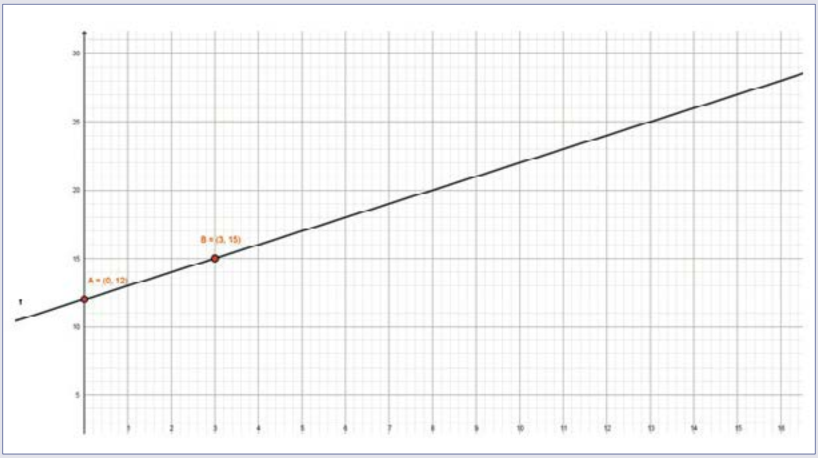
PROBLEMA 5

Un cíber tiene en sus máquinas un reloj que mide el tiempo de uso de cada cliente. Ofrece dos opciones de pago.

Opción 1. Pagar una inscripción y un costo por cada hora, de acuerdo con los datos que figuran en la siguiente tabla:

Tiempo en el cíber (horas)	5	10	20	23
Precio ($)	12,50	20	35	39,50

Opción 2. Pagar de acuerdo con los datos que proporciona el siguiente gráfico:



a) ¿Cuál de las dos opciones conviene? ¿Por qué?
b) En la segunda opción, ¿se paga una inscripción y un costo por cada hora? ¿Podemos escribir para esta opción una cuenta que nos permita calcular el precio que se paga por un tiempo determinado en el cíber?

Para algunos compañeros era riesgoso plantear de entrada la comparación y consideraban conveniente proponer previamente otras preguntas que visibilizaran más relaciones a la manera de "ablande". Como siempre, hubo acuerdos y desacuerdos. En cada caso los compañeros tomaron la discusión como referencia para resolver, finalmente, lo que consideraban pertinente. A continuación analizaremos la complejidad de la pregunta por la comparación, cuestión que profundizaremos luego a raíz del análisis de las trayectorias efectivas.

Las dos opciones se presentan en diferentes formas de representación, lo cual plantea la exigencia –no menor– de reconocer la necesidad de hacer algún tipo de traducción que favorezca la comparación. Como vimos a raíz del problema anterior, estas traducciones requieren movilizar conceptos, establecer relaciones, reinterpretar los datos; en otros términos, suponen producción de ideas.

Analicemos las cosas más detalladamente. ¿Qué operaciones requiere pasar del formato-tabla a un gráfico, para así establecer la comparación? En primer lugar, será necesario poner en juego convenciones relativas a la representación gráfica con la que los chicos tendrán distintos grados de familiaridad: elección de ejes para las variables y de escalas en ambos ejes, identificación de los pares de la tabla como puntos del gráfico.[19] Más costoso será que los estudiantes acepten que con esos cuatro pares que aporta la tabla pueden obtener un continuo de

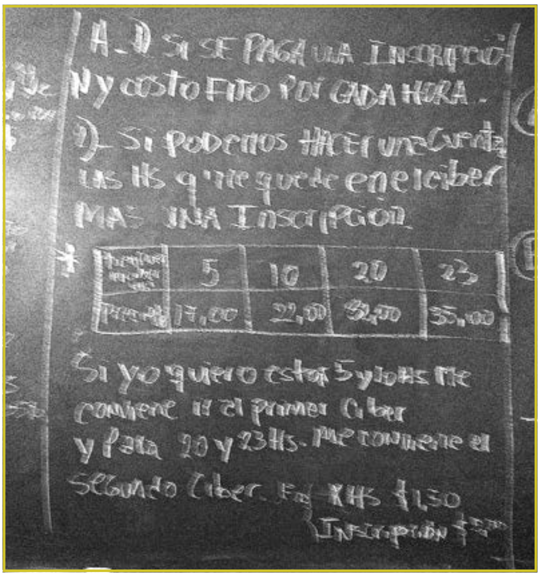
19. Aunque no los incluimos en esta experiencia, la disponibilidad de graficadores que traducen tablas a gráficos, presentes en distintos programas de computación, probablemente modifique esta apreciación.

<< >>

valores sin hacer ningún cálculo. Es difícil que reconozcan la legitimidad de este procedimiento si no tienen experiencia con él.

Potencialmente, el pasaje de gráfico a tabla requeriría decidir qué valores seleccionar dentro de un continuo. Sin embargo, en nuestra experiencia los alumnos no se preguntaron qué valores considerar y dieron por obvio que se trataba de tomar los que ya figuraban en la primera fila de la tabla dada para la opción 1. Así pudieron leer pares en el gráfico sin mostrar mucha dificultad, pero en el camino abandonaron la idea de continuo –o la retuvieron muy parcialmente– y solo se referenciaron en los que habían seleccionado. Veamos dos ejemplos.

Primer ejemplo:[20]



a) Sí, se paga una inscripción y costo fijo por cada hora.
Sí, podemos hacer una cuenta. Las horas que me quedé en el cíber más una inscripción.

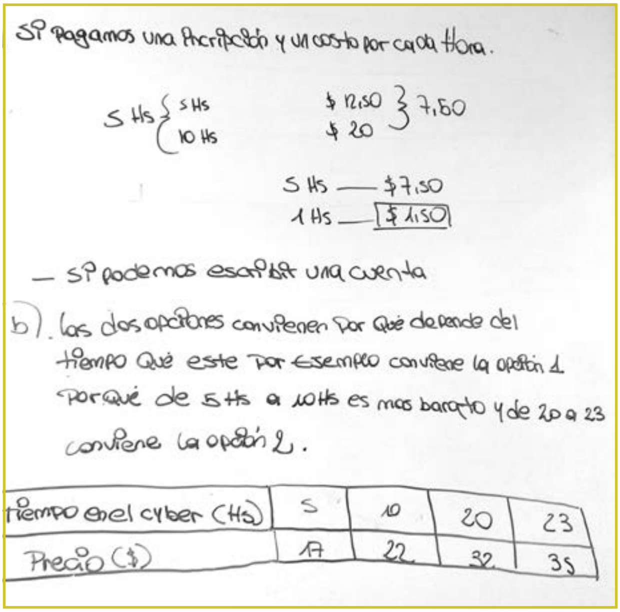
Tiempo en el cíber (hs)	5	10	20	23
Precios	17,00	22,00	32,00	35,00

b) Si yo quiero estar 5 y 10 horas, me conviene ir al primer cíber, y para 20 y 23 horas, me conviene el segundo cíber.

20. Incluimos las imágenes de los pizarrones (transcritas a continuación) aunque somos conscientes de la dificultad de su lectura. Tiene la intención de mostrar una documentación recogida como parte del trabajo.

Primer cíber { Por horas $1,50 / Inscripción $5,00 }

Segundo ejemplo:


Sí pagamos una inscripción y un costo por cada hora.

5 Hs { 5 Hs / 10 Hs } $ 12,50 / $ 20 } 7,50

5 Hs ___ $7,50
1 Hs ___ $ 1,50

— sí podemos escribir una cuenta

b). las dos opciones convienen por qué depende del tiempo qué este por ejemplo conviene la opción 1 porqué de 5 Hs a 10 Hs es mas barato y de 20 a 23 conviene la opción 2.

tiempo en el cyber (Hs)	5	10	20	23
Precio ($)	17	22	32	35

a) Sí, pagamos una inscripción y un costo por cada hora.

5 hs. { 5 hs — $12,50 / 10 hs — $20 } $7,50

5 hs ________ $7,50
1 hs ________ $1,50

Sí, podemos escribir una cuenta.

b) Las dos opciones convienen porque depende del tiempo que esté, por ejemplo conviene la opción 1 porque de 5 horas a 10 es más barato y de 20 a 23 conviene la opción 2.

Tiempo en el cíber (hs)	5	10	20	23
Precios	17,00	22,00	32,00	35,00

En ambos casos los alumnos respondieron en función de los datos que figuran en la tabla, sin hacer inferencias más allá de estos valores. En el primer caso responden estrictamente en términos de los tiempos volcados en la tabla (5, 10, 20 y 23), en el segundo leen dos intervalos (de 5 a 10 y de 20 a 23) pero no se pronuncian fuera de los mismos. Aunque los alumnos podrían reconocer que se trata de fenómenos crecientes y continuos, no usan estos conceptos para responder por la totalidad del dominio, lo cual permite pensar que todavía están elaborando estas ideas, sustanciales para comprender el concepto de función y de linealidad. Problematizar las respuestas de los estudiantes, forzándolos a pronunciarse más allá de los datos de la tabla, podría constituir un modo de colaborar en la elaboración de esos conceptos.

Con relación a la segunda pregunta, nuestra intención era forzar la lectura de los parámetros en el gráfico, asunto que –ya lo habíamos analizado para el problema anterior– era un hueso duro de roer. Esta lectura sería el insumo necesario para que los chicos pudieran producir una fórmula. Como hemos dicho, establecer el precio por hora requiere movilizar el concepto de variación uniforme en el gráfico, y esto exige tratar no solo con puntos sino también con intervalos. Aunque los alumnos abordaron esta complejidad en el problema anterior, pensábamos que era necesario ofrecer la oportunidad de seguir trabajando con estas ideas. Recordemos que uno de los aspectos centrales de nuestra propuesta es sostener las problemáticas durante bastante tiempo –en varias clases y a través de diversos problemas–, de manera que distintos alumnos vayan entendiendo en diferentes momentos mientras todos van profundizando su comprensión.

UNA NUEVA VUELTA EN TORNO A LO FÁCIL Y LO DIFÍCIL

Notemos que la recta de la opción 2 tiene pendiente 1, algo que no nos detuvimos a analizar en el momento de la planificación. Por eso nos sorprendió cuando ese 1 fue motivo de conflicto para un grupo de alumnos que venían usando con comodidad el cociente de incrementos para obtener el precio por hora. Efectivamente, cuando intentaron operar de manera similar, llamaron a la profesora:

> ALUMNOS. Profe, acá *(refiriéndose a la opción 1)* la diferencia era de 7,5 y la de acá 5, entonces lo dividimos, pero acá *(refiriéndose a la opción 2)* no sabemos cómo hacer porque acá la diferencia es de un peso y acá de una hora, entonces no sabemos cómo hacerlo, *porque no podés dividir.*

Forzados a producir una interpretación, reparamos en que 1:1 es un caso trivial de división y que reconocerlo en tanto tal implica una generalización cuya complejidad no tiene nada que ver con la dificultad del cálculo sino con la posibilidad de asimilar *lo raro* (1:1, operación que no requiere de la realización de la cuenta) a lo *común* (cualquier caso en el que el cálculo tiene la función de obtener un resultado numérico). Pareciera que estos alumnos se ven trabados por no encontrar sentido para realizar 1:1. Nos preguntamos, frente a este caso, qué habría pasado en otros cursos. Al revisar los diferentes registros, fue interesante encontrar que en una de las escuelas las profesoras habían cambiado los datos de este problema porque consideraron que era demasiado fácil proponer cociente incremental 1.

Las producciones de los chicos volvieron a interpelar aquello que consideramos fácil o difícil: si nos centramos en el cálculo, consideraremos que 1:1 es fácil; sin embargo, aceptar que 1:1 es una división resultó difícil para algunos de nuestros alumnos. Aceptada esta consideración podremos suponer que si hubiéramos iniciado la secuencia con un problema en el que el cociente incremental fuera 1, probablemente los alumnos habrían establecido ese valor sin hacer ninguna cuenta. Al enfrentar otros problemas con otras pendientes habrían tenido que movilizar la idea de cociente de incrementos, pero el caso del 1 hubiera quedado *separado* de la generalidad. Aunque la secuencia salió así por azar, una vez transitada apreciamos el interés de plantear el cociente incremental 1 como caso particular y, por lo tanto, no proponerlo como problema inicial.

PROBLEMA 6

Supongamos que nuestra división decide contratar un micro para ir a Tigre: ¿cuánto va a pagar cada chico?

La pregunta está abierta. Se espera que los alumnos se den cuenta de que esto depende de la cantidad de personas que viajan y de que requiere tomar en cuenta la capacidad del micro. O sea, no les damos las dos variables, tienen que decidir ellos. Asimismo, el problema introduce una relación no lineal (*cantidad de chicos que viajan-precio que paga cada uno*), cuestión que, entendimos, era necesaria para profundizar la comprensión de lo lineal.

Lo primero que discutimos fue si aceptábamos viajes de más de 40 chicos (se acordó, en un cierto momento, que esta fuera la capacidad máxima de cada micro) o planteábamos que, a lo sumo, viajen 40. Como siempre, estábamos repartidos. Algunos compañeros entraron en pánico cuando tomaron conciencia de que aceptar viajes de más de 40 chicos transformaba sustancialmente el problema en uno mucho más difícil: no sólo perdíamos la linealidad sino que tendríamos una función discontinua por partes, cuyo gráfico sería un conjunto de hipérbolas cada vez más petisas.[21] Finalmente, optamos por considerar el problema con 40 chicos como máximo.

21. Al lector no matemático tal vez no le resulte familiar esta afirmación. Lo invitamos a omitirla porque no afecta sustancialmente el sentido que queremos comunicar.

Si bien en el mundo real habría un mínimo de personas razonable, ya que no se va a alquilar un micro para un único pasajero, aquí no tenía sentido imponer esta restricción: la función se propone como una modelización y el modelo –ya lo sabemos– no es ni pretende ser una copia fiel de la realidad.

Notemos que en el mismo contexto de los viajes tratamos una función no lineal. Esto habilita la discusión sobre la pertinencia de estudiar diferentes relaciones referidas a dicho contexto, relaciones que quedan caracterizadas por las variables que se seleccionan. En otros términos, el contexto no determina una única función.

Todo esto nos ayuda a profundizar el papel didáctico del contexto en la elaboración de ideas matemáticas: por un lado aporta referencias para la resolución, por otro contribuye a comprender la noción de modelo matemático en tanto recorte de una realidad y no copia de la misma. Claro que si esto último ha de tener lugar, será necesario que el docente intervenga específicamente para hacer visible esta relación.

Luego, propusimos un problema con dos variantes posibles:

PROBLEMA 7

Variante 1. El tanque del micro –se refiere al micro de la excursión– tiene 200 litros de combustible y gasta 10 litros cada 100 km. Parte con el tanque lleno. Describir la variación de la cantidad de combustible en el tanque a medida que avanza el viaje.

Variante 2. El micro gasta una cierta cantidad de combustible por kilómetro. Parte con el tanque lleno. La tabla muestra cuántos litros de combustible van quedando en el tanque luego de haber recorrido cierta cantidad de kilómetros:

Kilómetros recorridos desde el inicio del viaje	20	40	90	150
Cantidad de combustible en el tanque (en litros)	198	196	191	185

¿Cuánto combustible habrá en el tanque después de que el micro recorrió 5 km? ¿Y 54 km? ¿Y luego de que recorrió 170 km?

Los problemas recién enunciados surgen a partir de una pregunta que se introduce en el grupo: ¿las ideas trabajadas hasta el momento serán suficientes o consideramos viable, necesario y rico introducir, en esta etapa del tratamiento de lo lineal, las funciones con pendiente negativa? Notemos que el hecho de que se trate de funciones decrecientes puede hacerlas aparecer a los ojos de los estudiantes muy diferentes de las que venían estudiando. Consideramos que sería necesario sortear alguna dificultad para aceptar que el núcleo de lo lineal –la variación uniforme– permanece. Entonces, incluir en la clase de las funciones lineales a las lineales decrecientes implica una operación de generalización cuya complejidad a veces pasa inadvertida para el profesor que ya tiene las cosas elaboradas.

Este fue el contexto en el que empezamos a discutir la situación de calcular la cantidad de combustible en el tanque a medida que avanza el micro, asumiendo que gasta una cantidad constante de combustible por kilómetro.

Aceptada la situación, aparecieron diferentes variantes en cuanto al grado de generalidad implicada en la formulación: en la primera se solicita una descripción genérica, en tanto que en la segunda se interroga por valores puntuales. Se trata de exigencias diferentes y dejamos la decisión sobre qué camino tomar librada a cada grupo de docentes. Probablemente, estos elegirán en función de las características de sus alumnos.

A MODO DE CIERRE

Fuimos configurando una secuencia en la que los problemas propuestos habilitaran el acceso a diferentes niveles de generalidad. Es así como los chicos enfrentaron la necesidad de encontrar una fórmula:

- para todos los datos de un problema
- para problemas parecidos
- para distintos contextos

A la vez, tuvieron que lidiar con la idea de variación uniforme para descartar aquellas situaciones que no responden al modelo lineal así como para incluir en la clase de las funciones lineales las crecientes y las decrecientes. Las discusiones sostenidas hicieron posible ir delineando entre todos una intención didáctica (Brousseau, 2007) que nos llevó a anticipar la potencialidad de esta secuencia. Puesta en las aulas, fueron los chicos y los docentes con sus ideas, interpretaciones, intervenciones, desarrollos y discusiones, con sus interrogantes y debates, quienes nos mostraron los vericuetos de la construcción singular y la gran diversidad de relaciones por las que se pasa en el camino de construir una primera relación con la linealidad. Allí vamos.

Parte II

La secuencia en las aulas: desarrollos, debates, interrogantes

La llegada de la secuencia a las aulas era para todos nosotros un momento crucial. Podríamos asimilarlo al comienzo de una película: elementos que serán centrales en la trama se ponen en juego desde esos primeros minutos; luego vendrá la historia con toda su riqueza y su complejidad. Dedicamos horas a concebir esas primeras escenas del aula, pensando no solo el problema inicial sino los intercambios que propiciaríamos. La película era nueva también para el equipo, nos estrenábamos en las arenas de la producción compartida. Nuestro modo de contener la incertidumbre consistió en anticipar con detalle las diferentes alternativas, tanto en lo concerniente a lo que harían los chicos como en lo relativo a nuestras reacciones. En una reunión del grupo posterior a la implementación de la secuencia, se registró el siguiente intercambio referido a esta etapa:

> –Teníamos plan A y plan B. Es un modo de planificar teniendo muy presente la clase. Muchas veces uno planifica con más distancia: uno dice "les voy a dar estos problemas", pero no alcanza con seleccionar los problemas para imaginarse la escena de la clase y a uno adentro de esa escena. Pensar qué podían hacer los chicos nos tranquilizaba y nos animaba porque nos daba herramientas para anticipar qué discusiones podríamos proponer, qué intervenciones hacer.
>
> –Yo creo que esos planes B fueron surgiendo del pesimismo y del optimismo del grupo. Porque si no hubieran estado los pesimistas, no hubiera surgido un plan B y si no hubieran estado los optimistas, no hubiese habido plan. Eso es lo que te da el trabajo en grupo.

Como hemos dicho una y otra vez, una apuesta fuerte de nuestro trabajo fue ligar el *interés de los alumnos* con el *desafío intelectual* (Brousseau, 2007). En este sentido, pensamos que presentar un problema cuya lógica es necesario desentrañar –en contraposición a problemas que requieren la aplicación de un modelo ya identificado– invita a los estudiantes a adoptar una actitud analítica. De esta manera podrán entablar nexos originales entre el contexto del problema, los datos que se ofrecen, los conocimientos disponibles –necesariamente distintos para diferentes alumnos– y las nuevas relaciones que van construyendo en el camino de la conceptualización a la que se aspira (en nuestro caso, la linealidad). En la clase, estos nexos originales son fuente de una producción diversa que a veces inquieta a los estudiantes y provoca interés al discutir la validez de lo que se va planteando. Se aspira entonces a una dinámica en la que la originalidad, la diversidad y la incertidumbre confluyan en un trabajo con buenas posibilidades de ser sostenido por los chicos. Al mismo tiempo resulta extremadamente complejo para el docente maniobrar en este espacio de diversidad. Por eso el trabajo compartido –tanto en el momento de planificar como en el de llevar a cabo el proyecto en las aulas– cumple una fundamental función de sostén.

Las consideraciones anteriores nos ayudaron a construir un fundamento para la opción de promover la *diversidad* como un modo de alentar el *intercambio*. Una vez que los alumnos realizan sus intentos de abordar el problema (solos o en grupos), la interacción a propósito de las diversas estrategias que se pusieron en juego constituye un momento potente. Requiere analizar las propuestas de los compañeros de clase tomando como referencia las elaboraciones propias. Esto enriquece la perspectiva personal, ya que abre el universo de relaciones que abarca un problema. Claro que esta diversidad no aflora en cualquier caso, hace falta generar un escenario en el que se hagan explícitos los diferentes puntos de vista.

LA CONSTRUCCIÓN DE UN ESCENARIO PARA LA DIVERSIDAD Y EL INTERCAMBIO

Tres momentos resultaron sustanciales para instalar un escenario de interacciones productivas a propósito de la implementación del primer problema de la secuencia: el momento inicial en el que se negocia la comprensión del enunciado, el trabajo en los pequeños grupos y, finalmente, el intercambio entre grupos. Analizaremos a continuación estos tres momentos, a raíz del desarrollo en una de las aulas, que llamaremos Aula A.

Momento 1: la comprensión del enunciado

Este fue el enunciado del Problema 1, tal como se lo propusimos a los chicos:

Los alumnos de 3° de una escuela de Florencio Varela están preparando una excursión, todavía no eligieron el lugar pero decidieron averiguar los precios ofrecidos por empresas de turismo de la zona.
A la salida de la escuela, se dirigen a una agencia de turismo para conocer los precios. Como está cerrada, anotan los expuestos en la vidriera.

Destino	Distancia	Precio
Excursión mínima	10 km	$1.040
Quilmes	17 km	$1.068
Glew	24 km	$1.096
Tigre	80 km	$1.320

continúa en página 63 >>

>> viene de página 62

Capital Federal	40 km	$1.160
Laguna Ranchos	97 km	$1.388
Chapadmalal	410 km	$2.640

El precio incluye un cargo fijo por viaje y un precio por cada km recorrido, que es el mismo para cualquier destino. El viaje se cobra por micro, no por persona (capacidad del micro: 40 personas).

Notemos que el enunciado anterior propone un contexto, pero todavía no se explicitan preguntas. Para plantearlas, la profesora entabla con los alumnos el siguiente diálogo:

PROFESORA. ¿Qué datos traen de la vidriera?
AYRTON. Los lugares, la distancia y el precio.
PROFESORA. Además de los lugares, la distancia y el precio, como dice Ayrton, ¿hay otro dato?
AYRTON. El precio incluye un cargo fijo por viaje, un viaje te cobran lo mismo como si fuera...
LUCAS. No entiendo.
BÁRBARA L. El viaje sale cierta cantidad de plata y se le agrega lo que vale cada kilómetro.
AYRTON. Eso...
PROFESORA. Todos los viajes cuestan una cierta cantidad de plata y se le agrega...
AYRTON. Póngale 1.000 pesos, y se le agrega plata...
PROFESORA. ¿Sale lo mismo hacer una excursión de 10 kilómetros que una de 400 kilómetros?
MUCHOS. No.
PROFESORA. *Les propongo que resuelvan cuánto costará hacer un viaje a Temaikèn, que está a 120 kilómetros.*
(La profesora copia la pregunta en el pizarrón.)

La profesora propone un intercambio colectivo para asegurar la comprensión de la situación y recién entonces plantea una pregunta sobre la que trabajarán los chicos. Apela en primer lugar a que los alumnos expresen qué están interpretando y promueve que ellos mismos aborden el problema. El gesto puede inscribirse en la intención de la profesora de buscar condiciones para que los alumnos puedan comenzar a trabajar con el problema.[1]

1. La preocupación de la profesora puede inscribirse en el concepto de *devolución* (Brousseau, 2007), que en la teoría de situaciones didácticas refiere al modo en que el alumno se hace cargo de la responsabilidad intelectual del trabajo matemático que se le propone.

Ayrton –apoyado en el reconocimiento del contexto– identifica los tipos de datos que lee de la situación. En su segunda intervención la profesora apunta a que se identifique el criterio que se usa para establecer el precio de cada excursión. Ayrton lo enuncia, Lucas no lo entiende y Bárbara, en respuesta a este último, lo aclara. Resaltamos el valor de este diálogo como una negociación en la que la docente asegura condiciones para que los chicos aborden la situación.

Cuando nos reunimos luego de la implementación del primer tramo de la secuencia, algunos profesores comentaron sorprendidos que los chicos no habían entendido el significado de *cargo fijo*. Esto –dijeron los compañeros– los paralizó un poco porque no consideraban del todo legítimo explicarlo ellos mismos. Fue una buena oportunidad para poner en cuestión una idea bastante difundida según la cual, en una propuesta constructivista, cualquier explicación que pueda aportar el profesor obtura las posibilidades de producción de los chicos. Está claro que si los alumnos no entienden a qué tipo de funcionamiento alude el enunciado es imposible pensar que puedan operar matemáticamente.

La discusión permitió discriminar entre aportar una información relativa al contexto e indicar las herramientas matemáticas necesarias para resolver el problema. El valor del contexto es precisamente el de constituir una referencia que ofrezca la oportunidad de maniobrar con datos sin disponer aún de las herramientas matemáticas que justamente son el objeto de enseñanza. El modo en el que se enmarcó la propuesta inicial en el Aula A –lo acabamos de analizar– fue lo que nos permitió profundizar en esta cuestión.

Afloró también en nuestras discusiones una reflexión acerca del momento en que se *comprende* el enunciado. Está bastante difundida la idea de que es necesario comprender antes de resolver. Esto es cierto en parte: una primera comprensión es imprescindible para operar, pero el trabajo con el problema ayuda a *seguir comprendiendo*, a entender cómo funcionan las relaciones implicadas en la situación. Finalmente acordamos que es más interesante considerar el asunto de la comprensión de la consigna como un proceso que se despliega a raíz de las resoluciones que se van intentando, y no tanto como un momento puntual.

Momento 2: la producción de nuevas relaciones en los pequeños grupos

Varias veces hemos dicho que cuando se abre el juego[2] de la clase, los chicos producen muchas más relaciones que las que *a priori* están cristalizadas en la cultura oficial correspondiente a un tema. En el Aula A, a la que nos venimos

2. Con “abrir el juego” nos referimos a la propuesta de que los chicos produzcan relaciones personales a partir de enfrentar una situación nueva para ellos.

refiriendo, se constituyeron cuatro grupos de trabajo que elaboraron estrategias diferentes. Más allá de su *corrección*, todas dan cuenta de la consistencia –y originalidad– de los chicos para pensar. Este es el sentido fundamental de nuestra búsqueda: encontrar condiciones que habiliten a los alumnos para el intercambio intelectual a partir de la diversidad que aflora. Nos apoyaremos en la producción de dos de los pequeños grupos (el Grupo de los precios y el Grupo del tanteo) para mostrar algo de todo esto.

El Grupo de los precios

La lectura del diálogo siguiente permitirá apreciar una búsqueda intensa de relaciones matemáticas para la resolución del problema y la puesta en juego de estrategias para validarlas. Veremos que en su indagación las alumnas abrevan tanto del análisis del contexto particular con el que están tratando como de su experiencia en el cálculo de precios. Esta doble referencia las lleva a una incertidumbre difícil de interpretar para la docente. Veamos:

1. EVELYN. O sea que se le va agregando un precio por...
2. JOHANA C. Tiene que estar por acá el precio. *(Señala una porción de la tabla.)*
3. EVELYN. Qué precio se agrega por kilómetro, eso es lo que hay que sacar para ver para 120. [Recordemos que están averiguando el importe de un viaje a 120 kilómetros de distancia.]
4. JOHANA C. Tiene que estar por acá el precio. *(Señala la tabla de valores.)*
5. ROCÍO. *(Señala un renglón de la tabla.)* Este, por ejemplo, el de 10 kilómetros que sale eso, eso sale el micro, digamos. En este, 7 kilómetros más, y se le agregaron 28 pesos.
(Continúan intercambiando.) [...]
9. ROCÍO. Y bueno, 28 lo dividís en 7.
[...]
13. JOHANA C. 4 pesos por kilómetro.
14. EVELYN. Profe, venga un cachito.
15. ROCÍO. Pero son 4 pesos por kilómetros, *no, pero no puede ser.*
16. PROFESORA. ¿Qué pasa?
17. EVELYN. Nosotros sacamos que acá hay 7 kilómetros más y se agregan 28 pesos, entonces ella dijo 28 dividido 7, para saber qué da 1 kilómetro, y nos dio 4, entonces hicimos 4 por 10 para ver si nos da, pero nos da otra cosa, nos da 40.
18. PROFESORA. Retrocedamos un poquito, ¿de dónde sacaste 4 pesos?
19. ROCÍO. De hacer 28, los que pasaron de 1.040 a 1.068, dividido 7, por los 7 kilómetros que hay de más.
20. PROFESORA. *(Dirigiéndose a todo el grupo.)* ¿Ustedes están de acuerdo con eso?

21. PROFESORA. ¿Cuál es tu problema ahora?
22. EVELYN. Para ver si era verdad que era 4 por kilómetro hice 4 por 10, de los 10 km que da 40, pero no entiendo porque acá es 1.040.
23. PROFESORA. A ver, ella dice que le da 40 y en la tabla dice 1.040.
24. ROCÍO. ¿Qué hicimos mal?
25. JOHANA C. No sé, no entendí.
26. PROFESORA. Vuelvan a leer todo lo que está en la fotocopia, todos los datos de la vidriera, a ver si podemos sacarlo.[3]
27. ROCÍO. Esto *(señala 1.040)* es lo que cuesta el micro.
28. PROFESORA. Esto es lo que cuesta hacer una excursión de 10 kilómetros. ¿Ustedes están de acuerdo que cada kilómetro está a 4 pesos? ¿Sí o no?
29. LAS CINCO ALUMNAS. Sí.
30. PROFESORA. ¿Podrían calcular un viaje de 120 kilómetros?
31. EVELYN. *(Mirando a Rocío, que tiene la calculadora.)* Tendrías que hacer 120 por 4.
32. PROFESORA. A ver, ¿y cuánto da eso?
33. ROCÍO. ¿Pero está bien?
34. PROFESORA. No sé.
35. EVELYN. 120 por 4 da 480.
36. PROFESORA. ¿Puede ser 480 pesos?
37. ROCÍO. No, tiene que ser más de este *(señala en la tabla 1.388, que es el importe correspondiente a un viaje de 97 kilómetros)* y menos de este *(señala 2.640, que corresponde a 410 kilómetros.).*
38. PROFESORA. Entonces, ¿está mal lo que hicieron? ¿O faltaría algo? ¿Qué pasa?
39. ROCÍO. ¿No era que se pagaba el micro y aparte los kilómetros?
40. PROFESORA. Un cargo fijo y un precio por kilómetro.
41. EVELYN. ¿Y cuál es el cargo fijo?
42. PROFESORA. A ver.
43. ROCÍO. Acá lo que sacamos es el precio por kilómetro. A ver si hacemos 1.040 dividido 10, 104 me dio. Y no entiendo, hay algo mal acá.
44. JOHANA C. Yo tampoco entiendo.
45. EVELYN. Tenemos que sacar, vamos de nuevo, el precio por kilómetro.
46. ROCÍO. Hacemos 1.040, el precio de 10, dividido 10, para que dé el de 1 kilómetro. 104 por 17 te tiene que dar esto *(Señala 1.068 en la tabla.).*
(Las alumnas siguen discutiendo sin encontrar una solución satisfactoria.) [...]
52. PROFESORA. Bueno, lo vamos a escribir en el pizarrón y lo discutimos entre todos.

3. No se me ocurrió ahí cómo ayudarlas [comentario de la profesora al analizar el registro].

Toda la interacción muestra el involucramiento de estas alumnas. En particular, las intervenciones 17, 22, 24, 33, 37, 43 y 46 dan cuenta de que están atentas al control de los procedimientos que ponen en juego y de que reconocen cuando un resultado es inconsistente. Las chicas están preocupadas por la validez de lo que hacen. Asimismo, la profesora intenta que clarifiquen las dudas (por ejemplo en la intervención 18) y favorece que todas participen de la búsqueda (intervención 20).

Detengámonos un momento en la intervención 17. Evelyn explica con claridad cómo obtienen el precio por kilómetro apelando al cociente de los incrementos. Sin embargo, a pesar de la negociación inicial que apuntó a clarificar el modo en que se paga una excursión en este caso, una vieja idea –el precio correspondiente a una cierta cantidad se calcula multiplicando el valor unitario por esa cantidad– se cruza en el camino.

¿Cómo interpretar este comportamiento? En nuestro grupo de docentes se dividieron las aguas: algunos decían que estas chicas se habían olvidado del cargo fijo, pero otros consideraban que ellas entendían que al multiplicar por 4 estaban incluyendo tanto el precio por kilómetro como el cargo fijo. Por su parte, la profesora comentó el desconcierto que experimentó al encontrarse con la situación. Vale la pena que lo analicemos.

Es difícil saber cómo están pensando las alumnas, razón por la cual también es difícil armar sobre el terreno una intervención que entre en diálogo con las ideas de ellas. La interpretación de que olvidaron el cargo fijo parece concebida desde la perspectiva de quien ya dispone de ese conocimiento. Sin embargo, las intervenciones 31, 43 y 46, junto con el hecho de que ellas sí consideran que "se paga el micro y aparte los kilómetros" (intervención 39), dan lugar a pensar que en el cociente *importe de un viaje/cantidad de kilómetros correspondientes* ya están contenidos los dos parámetros involucrados.

En la intervención 26, la profesora las remite a la formulación del problema suponiendo que "se olvidaron" de considerar el cargo fijo; en ese caso, al volver a leer podrían corregir su estrategia. Recordemos que en un primer momento la profesora destinó un tiempo a negociar la consigna y se había quedado con la sensación de que habían acordado. Las estudiantes no reciben la intervención como una orientación porque probablemente ellas suponen que en su estrategia ya están contemplados tanto el precio por kilómetro como el cargo fijo. La profesora no entiende por qué las chicas no toman lo que les propone. Tampoco parece entender qué es lo que no comprenden y finalmente apuesta al espacio colectivo como un ámbito en el que podrá retomarse la discusión en otras condiciones (intervención 52), dejando por el momento pendiente la solución.[4] Estas alumnas se encuentran en una situación de perplejidad: han aplicado una estrategia que según ellas contempla todas las variables y, sin embargo, se dan cuenta de que no arroja resultados consistentes.

4. Volveremos sobre esto al analizar la puesta en común. En ese momento entenderemos mejor por qué muchos chicos terminan de comprender cómo se cobra una excursión en el intercambio colectivo y a raíz del análisis de distintas estrategias.

Esta situación de ruptura en la comunicación –frecuente, si las hay– recién la alcanzamos a comprender gracias al análisis posterior, cuando pudimos hacer una reconstrucción hipotética de la perspectiva de las chicas y concebimos intervenciones productivas que, aunque no resulten útiles para esta ocasión, amplían el horizonte didáctico de intervención docente. Esta es una ganancia del trabajo colaborativo.

Consideremos ahora la estrategia de otro pequeño grupo –el Grupo del tanteo– a raíz de este primer problema de la secuencia

El Grupo del tanteo

Como ya dijimos en la Parte I, los datos de la tabla ofrecían la posibilidad de reconocer el cargo fijo de manera intuitiva. Recordemos también que la inclusión de estos valores *fáciles* había sido objeto de controversias en nuestro grupo.[5] Buscando al tanteo una solución, los alumnos cuyo registro transcribimos encuentran una regularidad: si extraen el 1.000, funciona la proporcionalidad directa. Veamos.

1. MATÍAS. ¿Qué hay que hacer?
2. PROFESORA. Les proponen averiguar cuánto sale un viaje a Temaikèn, que está a 120 kilómetros.
3. ALAN. Acá no está.
4. PROFESORA. Tienen que averiguarlo.
5. ALAN. A simple vista sale la cuarta parte de Chapadmalal.
6. MATÍAS. Pero la mínima es 1.040, ¡¡no!!
7. PROFESORA. ¿Y qué tiene que ver la mínima?
8. ALAN. No da con la tabla.
9. AYRTON. La cuarta parte de Chapadmalal te da menos que 1.040, ¿entendés?
10. PROFESORA. Sí.
11. ALAN. 1.040 dividido 10 es el costo de cada km.
12. LUCAS. Pero la hacés muy larga.
13. ALAN. Es 104 por km.
14. MATÍAS. Se le agrega tanta plata por cada km.
15. ALAN. La base es 1.000.
16. MATÍAS. Nada dice que la base es 1.000. En ningún lado dice que es 1.000. Pero por 10 kilómetros pagás 1.040.
17. MATÍAS. Chau lo de 104.
18. ALAN. Es mucho, demasiado.
19. PROFESORA. ¿Por qué es mucho?
20. ALAN. Mirá Chapadmalal, chau lo de 104.

5. Ver la sección "Los valores propuestos habilitan una estrategia un poco azarosa: ¿obstáculo o punto de apoyo?", p. 33.

21. MATÍAS. Sacá el 1 y lo que queda es el cuádruplo.
22. AYRTON. ¿De Capital, decís?
23. MATÍAS. La base es mil.
24. ALAN. Hace una hora que lo dije.
25. AYRTON. Los 10 kilómetros valen 40 pesos.
26. MATÍAS. 4 pesos el kilómetro. A 97 le agrego tantos cuatros como kilómetros faltan a 120.
27. LUCAS. Agregale 23 kilómetros.
28. AYRTON. 23 por 4 es 92.
29. MATÍAS. Ahora hay que sumar 92 con 1.388 [precio del viaje a Ranchos].
30. PROFESORA. Esperen, vamos a rebobinar porque dijeron muchas cosas interesantes.

Los chicos tienen disponibles relaciones vinculadas a la proporcionalidad directa y –por supuesto– las usan (intervenciones 5 y 11).[6] Sin embargo, no se quedan tranquilos: los resultados no cierran (intervenciones 6, 8 y 9) y ellos lo notan, lo cual –al igual que en el grupo anterior– da cuenta de su capacidad para controlar lo que van proponiendo. Frente al desconcierto encuentran que quitando 1.000 a los diferentes importes pueden usar la proporcionalidad de manera consistente (intervención 21). Como habíamos analizado al diseñar la secuencia, es un encuentro casual que de todos modos funciona y los chicos lo aprovechan. Interpretamos que esa sensación de casualidad –lo veremos al analizar el intercambio entre los distintos grupos– seguirá resonando en los alumnos y los predispondrá a buscar en las estrategias de sus compañeros respuestas que ellos no terminaron de producir.

Momento 3: nuevas relaciones a partir del intercambio entre los grupos

Habíamos planificado un dispositivo para favorecer el intercambio entre los distintos procedimientos: cada grupo debía hacer afiches o copiar en el pizarrón su estrategia, de modo que quedara expuesta al análisis de sus compañeros durante un tiempo antes de iniciar la discusión.[7]

Para comprender mejor la producción que emerge en el espacio colectivo, vamos a reproducir a continuación los escritos de tres de los grupos y realizaremos algunos comentarios. Notemos que todos los procedimientos –conduzcan

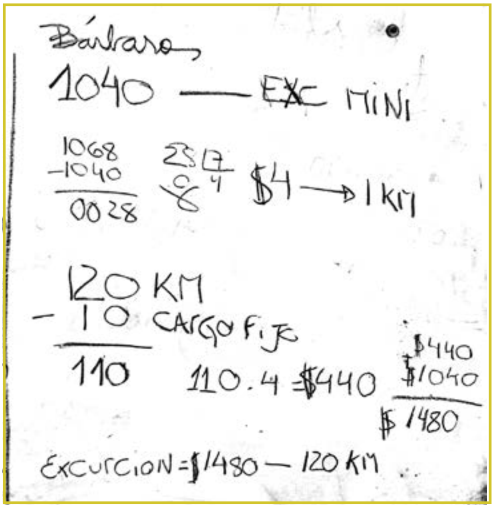
6. Lo entendemos como un uso *en acto* que no se detiene en las condiciones en las que es válida la proporcionalidad. Numerosos estudios en didáctica de la matemática muestran que se trata de una relación muy instalada que los chicos tienden a movilizar de entrada, casi como si fuera la única posibilidad.

7. Ver la sección “Lo visible y lo invisible a propósito de las interacciones entre los alumnos” en la primera parte de este libro, p. 34.

o no a resultados consistentes– se exponen en el pizarrón para ser objeto de discusión. La docente, ya lo señalamos, apuesta a constituir el espacio colectivo como el lugar en el que se discutirá la pertinencia de las elaboraciones de los chicos. Pensamos que esta apuesta contribuye a generar un clima de verdadera interacción.

Grupo 1: las Bárbaras

Veamos el afiche de Bárbara y Bárbara, que nos sorprendieron al calcular el importe del viaje a Temaikèn (120 km) sin necesidad de obtener el valor del cargo fijo:



Bárbaras [hace referencia a los nombres de las dos integrantes de este grupo]

1040 → Excursión mínima

1068 –1040 0028	28 | 7 0 4	$4 → 1 km

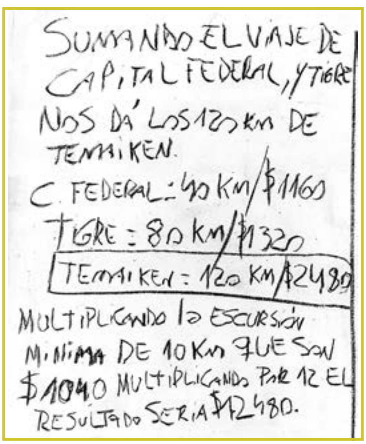
120km
–10 cargo fijo
110   110 x 4 = $440 $440 + $1040 = $1480

Excursión = $1.480 → 120 km

Nos tomó un tiempo entender cómo habían pensado estas alumnas el problema. En primer lugar, ellas obtuvieron el precio por kilómetro calculando el incremento de precio para un cierto incremento en los kilómetros y haciendo el cociente correspondiente. Esto estaba dentro de las estrategias que habíamos anticipado. Lo que para nosotros resultó sorprendente fue que descompusieran el 120 en 10 + 110, porque le sumaron al precio correspondiente a 10 km –que era un dato– el valor que se paga por agregar 110 km (110 x 4). De esta manera las chicas sortean el problema de no disponer del cargo fijo. Este modo de resolver les permite darse cuenta –lo veremos a partir de sus intervenciones en la puesta en común– que en cada par dado como dato en la tabla está incluido el importe correspondiente al cargo fijo.

Grupo 2: Daniel, Luis, Nicolás, Maxi y Brian

Estos chicos, para calcular el precio de una excursión de 120 km, sumaron los importes correspondientes a 80 km y 40 km, estrategia que habíamos anticipado. Como ocurre con todos los grupos, chequean el resultado y se dan cuenta de que no resulta consistente. Frente a esta constatación, intentan un segundo procedimiento que tampoco los conforma. Veamos:


SUMANDO EL VIAJE DE CAPITAL FEDERAL, Y TIGRE NOS DÁ LOS 120 KM DE TEMAIKEN.
C. FEDERAL: 40 KM/$1160
TIGRE: 80 KM/$1320
TEMAIKEN: 120 KM/$2480
MULTIPLICANDO LA ESCURSIÓN MINIMA DE 10 KM QUE SON $1040 MULTIPLICANDO POR 12 EL RESULTADO SERIA $12480.

Sumando el viaje de Capital Federal y Tigre nos da los 120 km de Temaikèn

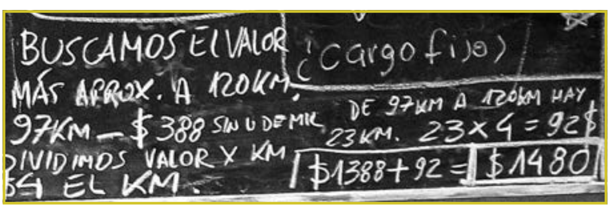
Capital Federal: 40 km/$1.160
Tigre: 80 km/$1.320
Temaikèn: 120 km/$2.480

Multiplicando la excursión mínima de 10 km, que son $1.040.
Multiplicando por 12, el resultado sería $12.480

El segundo procedimiento consiste en multiplicar por 12 el importe correspondiente a 10 km. Sin poder concluir, y seguramente con la incertidumbre que genera el sostener dos resultados, se animaron de todos modos a escribirlos en el pizarrón. Hay algo del clima instalado en esa clase que hizo posible este comportamiento de los chicos.

Grupo 3: Ayrton, Matías, Alan y Lucas

En las páginas previas, al presentar el trabajo en pequeños grupos, ya incluimos las discusiones de este grupo de alumnos que se encontró con la conveniencia de restar el valor 1.000 y apelar a la proporcionalidad. Veamos ahora su producción final, registrada en dos imágenes:



Relacionamos todos los valores entre sí y lo mismo con los km.
Entonces:

10 km	$1.040
40 km	$1.160
80 km	$1.320

Después borramos la unidad de mil. Entonces:

10 km	$40	
40 km	$160	Es el cuádruple
80 km	$320	Es el doble

Buscamos el valor más aproximado a 120 km
97 km _ $388 sin unidad de mil. Dividimos valor x km [se refiere a 388:97]. $4 el km

De 97 km a 120 km hay 23 km. 23 x 4 = 92
$1.388 + 92 = $1.480

La marca que los chicos le hicieron al valor 1 de cada importe nos lleva a interpretar que restaron el 1.000 (sin conocer exactamente su significado) y eso les permitió quedarse con valores a los que le podían aplicar una relación *cómoda* (en términos nuestros, de proporcionalidad directa). Al quedar la producción ofrecida para la puesta en común, habría oportunidad de intercambiar con toda la clase sobre alcances y límites de esta relación. En la segunda parte de la resolución vemos cómo se apoyaron en el valor conocido más cercano a 120 para realizar el cálculo. Efectivamente, sumaron al correspondiente de 97 km el resultado de 23 x 4 (el 23 lo obtuvieron como diferencia entre la distancia a Temaikèn y la distancia a Ranchos, mientras que 4 fue el precio por kilómetro que calcularon).

Volvimos a preguntarnos en el grupo si estos alumnos hubieran estado dispuestos a tomar otro valor como punto de apoyo. Obviamente, no tenemos la respuesta. Las razones por las que eligieron el 97 pueden ser variadas y no son accesibles. Sin embargo, fue una opción que hicieron muchos chicos en las distintas experiencias y eso plantea interrogantes: ¿hay acá algo conceptual de lo que deberíamos hacernos cargo desde la enseñanza? La ocasión fue propicia para reflexionar –una vez más– acerca de que no es evidente para los alumnos que están elaborando el concepto de función –lineal en este caso– el hecho de que todos los pares *portan* dicha relación y que en ese sentido son equivalentes. Visibilizar esto como asunto de enseñanza fue un aprendizaje para todos nosotros.

Con la diversidad de producciones emergentes, en el aula se inició la puesta en común. Para organizar el análisis, aquí lo segmentaremos en episodios.

Episodio 1: la interacción entre estrategias clarifica el significado del cargo fijo

En el siguiente intercambio, Bárbara, una de las autoras de la estrategia del Grupo 1, no solo objetó el procedimiento del Grupo 2 sino que, superando la valoración en términos de bien o mal, explicó qué significaba el resultado que los chicos obtuvieron con relación al problema. Esta posibilidad, muy ligada –pensamos– a la estrategia que su grupo había puesto en juego, dio lugar a la explicitación de una nueva relación, relevante de cara al estudio de la función lineal. Veamos:

1. PROFESORA. La cosa es ahora mirar lo que hizo cada grupo y tratar de entender, tratar de meterme en lo que pensó el otro.
(Algunos chicos hacen comentarios respecto de lo que está bien o está mal.)
2. PROFESORA. Por un ratito no digo ni está bien ni está mal. A ver, después discutimos con cuál están de acuerdo, con cuál no, por qué sí, por qué no [Hubo varios grupos que escribieron su estrategia aunque se dieron cuenta ellos mismos de que había algo que andaba mal.]. Tratemos de ver qué pensó cada grupo. Si está bien, si está mal. Primero lo pienso.
(Cada grupo se toma tiempo para pensar en las producciones de los otros.)
3. PROFESORA. Empezamos por el Grupo 2 [Daniel, Luis, Nicolás, Maxi y Brian], no sé si ustedes quieren explicar *(dirigiéndose a estos alumnos).*
4. BÁRBARA. *(Refiriéndose a la producción del Grupo 2.)* Pero está mal, porque le sumaron 2 veces el cargo fijo.
5. PROFESORA. ¿Adónde sumaron 2 veces el cargo fijo?
6. BÁRBARA. Porque le sumaron 2 veces el cargo fijo y no les dio.
7. PROFESORA. ¿Cómo saben? ¿Por qué dicen que sumaron 2 veces el cargo fijo?
8. BÁRBARA. Porque sumaron el viaje de Tigre y de Capital, y *cada viaje tenía el cargo fijo.*
9. PROFESORA. ¿Por qué sumaron el de Capital y el de Tigre?
10. VARIOS, DE DISTINTOS GRUPOS. Porque daba, 40 más 80.
11. PROFESORA. 40 más 80 daba 120.
12. MATIAS. Y *el cargo fijo estaba adentro.*
13. PROFESORA. ¿Y no es 2.480?
14. MATÍAS: No, porque estaba adentro el cargo fijo.
15. PROFESORA. ¿Están de acuerdo con Matías, estaba adentro el cargo fijo?
16. MATÍAS. En ese monto, mil y algo, el cargo fijo estaba adentro.
17. AYRTON. Claro, lo que dice acá *(refiriéndose al enunciado)*, que *nosotros no nos dimos cuenta de eso.* Del cargo fijo por viaje y un precio por cada kilómetro recorrido, que es el mismo para cualquier destino.
18. PROFESORA. ¿Están de acuerdo con eso que dicen ellos, que acá contaron 2 veces el cargo fijo?
19. ALAN: Sí, de los dos viajes.
20. PROFESORA. ¿Acá *(señala en el pizarrón el valor correspondiente a Capital)* había un cargo fijo?
21. VARIOS. Sí.
22. PROFESORA. ¿Acá *(señala en el pizarrón el valor correspondiente a Tigre)* había un cargo fijo?
23. ALAN. Sí, en los 2 había un cargo fijo.
24. PROFESORA. Al sumar, cuentan 2 veces el cargo fijo.
25. AYRTON. *Nosotros no nos dimos cuenta.*

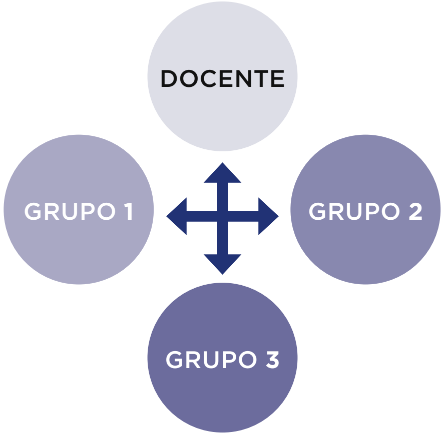
Detengámonos en esta interacción. Bárbara (intervención 4) se pronunció rápidamente sobre el procedimiento del Grupo 2. Entendemos que son las relaciones que ella y su compañera elaboraron para resolver el problema las que le permitían asegurar que en esta estrategia se está contando dos veces el cargo fijo. Un aspecto interesante es que ellas no obtuvieron el cargo fijo, pero Bárbara parecía saber –aunque no podamos establecer con qué grado de explicitación– que está incluido en cada uno de los importes que se dan como dato, es decir que sabía que si se suman dos importes se está considerando dos veces ese valor, aunque no conozca el valor. También nos sorprendimos nosotros cuando caímos en la cuenta de que Bárbara estaba operando con una incógnita todavía no conceptualizada como tal (ni en la oralidad ni en la escritura). En otros términos, ella pudo ver los números 1.160 y 1.320 con la misma estructura: el precio de un viaje compuesto por el importe de los kilómetros más el cargo fijo.

Las primeras intervenciones de la profesora (5 y 7) apuntaron a que Bárbara precise y justifique ("¿A dónde...?", "¿Cómo saben...?", "¿Por qué...?"). La exigencia de explicar ayudó a que esta alumna profundizara su comprensión de las relaciones (intervención 8). Al preguntarle a toda la clase por las razones que llevaron al Grupo 2 a sumar el importe de los dos viajes, la profesora logró dos objetivos simultáneos: otorgarle estatuto de producción a esa estrategia y poner en primer plano –para que pueda ser objeto de discusión– la lógica del procedimiento. El *asunto* que consideraba importante se refiere a las relaciones que motivaron el accionar del grupo y no a su corrección o incorrección (9). Esto –a nuestro juicio– merece una reflexión que abarca tanto la perspectiva de los chicos como la del docente. Efectivamente, el gesto de la profesora comunica que el Grupo 2 ha tenido una idea que, en tanto tal, vale la pena discutir. Es interesante señalar que esta estrategia había sido anticipada en nuestros intercambios, lo cual generó buenas condiciones para que entrara en la discusión. En consonancia con la apertura de la docente, varios alumnos mostraron que podían interpretar la lógica de ese procedimiento (10). La trama de estas interacciones y su potencia en la producción de relaciones solo se hace visible en el análisis posterior.

Los chicos del Grupo 3 (los que habían tachado el 1 de 1.000 y vieron que "daba", aunque aparentemente no del todo satisfechos con su estrategia) también intervinieron reafirmando a Bárbara y reconocieron que el pensamiento de su compañera incluía una relación relevante que ellos no llegaron a considerar: el cargo fijo estaba *adentro* y ellos no se habían dado cuenta (intervenciones 12, 14, 16, 17, 19 y 25). Recordemos que en nuestro análisis, al concebir la secuencia, habíamos anticipado esta estrategia de tachar el 1 y, por considerarla menos elaborada, habíamos supuesto que tenía más probabilidades de ser puesta en juego por chicos "más flojos". ¿Reafirmaríamos de cara al episodio transcripto este supuesto? Entendemos que cuando Matías y Ayrton dijeron "nosotros no nos habíamos dado cuenta", era porque encontraban en el relato de Bárbara una respuesta a su propia incertidumbre, generada por la insatisfacción de haber puesto en juego un procedimiento algo azaroso. No es razonable considerar como "flojos" a alumnos que se quedan disconformes con su propia estrategia y buscan en el intercambio con los procedimientos de sus compañeros pistas que les ofrezcan respuestas superadoras. Por el contrario, el análisis nos lleva a inferir un alto compromiso intelectual con la tarea que enfrentaron y esto, a la vez, nos hace poner en cuestión los criterios que utilizamos para clasificar las estrategias en *más* o *menos elaboradas*. Es un aprendizaje contundente para un grupo de profesores que se empieza a acostumbrar a transitar las rupturas que provoca el análisis compartido.

En sus últimas intervenciones, la profesora difundió para toda la clase la idea que acababa de emerger: si se suman los valores correspondientes a dos pares, se cuenta dos veces el cargo fijo. Consideramos que este nuevo enunciado actúa como un intermediario que permite transformar el procedimiento y llegar al resultado (hay que restar una vez el cargo fijo). Notemos que como dicho valor no fue calculado, no hay todavía condiciones para hacer efectiva esa transformación: el procedimiento se configura antes de alcanzar los datos para concretarlo. De esta manera la clase –alumnos y docente– es capaz de avanzar dejando una cuestión pendiente, lo cual no resulta muy habitual en la escuela.

Proponemos el siguiente esquema como síntesis del episodio:



La interacción del Grupo 1 (a través de Bárbara) con la producción del Grupo 2 estructuró este episodio. Desde distintas posiciones y con diferentes intenciones, tanto la docente como el Grupo 3 dialogaron mediante esa interacción. Cobró centralidad el intercambio entre pares que –en mayor o menor medida– comparten cierta incertidumbre con relación a la validez de las relaciones que motorizan las distintas estrategias.

Episodio 2: la reutilización de las relaciones ya elaboradas como mecanismo de producción y de control

En el siguiente intercambio, podemos apreciar que el gesto de la profesora de apelar sistemáticamente a la fundamentación de los procedimientos fue retomado por algunos chicos que también preguntaron por el porqué de las estrategias a sus compañeros:

30. LUIS. *(Refiriéndose al segundo procedimiento del Grupo 1.)* Los 10 kilómetros por 12, 12 veces.
31. ALAN. ¿Por qué?
32. EVELYN. ¿Por qué por 12?
33. PROFESORA. *Por qué por 12, preguntan.*
34. LUIS. *Porque son 120, son 10 veces 12.*
35. PROFESORA. ¿Está bien?
36. LUIS. *Para cumplir los 120, 1.040 por 12 igual a 12.480.*

Frente al resultado anterior, Bárbara apela al contexto para expresar el desajuste. Nuevamente los chicos quieren explicarlo, lo cual da lugar a reutilizar la relación elaborada en el episodio anterior: cada importe contiene el cargo fijo y el precio por kilómetro.

37. BÁRBARA. Re caro.
38. LUCAS. ¿Y por qué le sale tan caro?
39. PROFESORA. Preguntan por qué sale tan caro... Les dio 12.480.
40. ALAN. No puede ser. Si 410 kilómetros son 2.640, 120 no puede ser jamás 12.480, porque se va...
41. PROFESORA. ¿Están de acuerdo?
42. BÁRBARA. Le dio tanto porque sumó 12 veces el cargo fijo.
43. PROFESORA. Para poder encontrar el resultado, ¿qué tendremos que averiguar?
44. AYRTON. El cargo fijo.
45. NICOLÁS. *Eso fue lo que no averiguamos que tendríamos que haber averiguado.*
46. PROFESORA. Vemos si los otros grupos lo calcularon y después se lo restamos, ¿sí?

Una vez establecidas las razones por las cuales no funcionaba el valor 12.480, se explicitó un modo de transformarlo para arribar al resultado correcto:

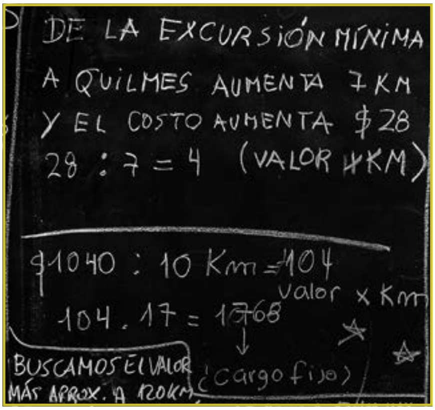
50. PROFESORA. Él dice que a esto *(refiriéndose al primer procedimiento del Grupo 1)* hay que restarle el cargo fijo y a esto *(refiriéndose al segundo procedimiento del Grupo 1)* hay que restarle...
51. AYRTON. 12 veces el cargo fijo.
52. BÁRBARA. Sí, 12 veces.
53. MATÍAS. 11 veces.
54. PROFESORA. ¿12 o 11?
55. BÁRBARA. *12...* Ah, no, 11.
56. MATÍAS. Sí, una hay que dejarlo.
(La profesora anota en el pizarrón "11 veces el cargo fijo".)

Mirando el episodio globalmente, vemos que la profesora, de manera consistente con intervenciones anteriores (donde también se centró en que los chicos expliciten las ideas que pusieron en juego), indagó acerca de las razones que llevaron al Grupo 2 a multiplicar por 12 el importe correspondiente a 10 km. El resultado fue rechazado gracias a que empezaban a estar aceitados los mecanismos de control (intervenciones 37 y 40). La idea esbozada en el episodio anterior –cada importe incluye el cargo fijo– mostró su fertilidad y volvió como punto de apoyo para explicar el significado del resultado obtenido en esta estrategia del Grupo 1 (intervenciones 42 y 43). El hecho de reutilizar –de otra manera– la misma relación contribuyó a consolidar la comprensión de la idea de cargo fijo, que en un principio se había mostrado esquiva para muchos alumnos. Nuevamente, la profesora apeló a que se transforme el resultado erróneo hasta llegar al correcto (43) y así sostuvo el estatuto colectivo de la producción (46). La docente anotó en el pizarrón la estrategia a seguir, que solo podía hacerse efectiva una vez calculado el cargo fijo.

La estrategia de "las Bárbaras" –apoyadas en el cociente incremental entre dos pares dados, sortearon el cálculo del cargo fijo para calcular el importe correspondiente a cierta distancia– vivió en el aula mucho más allá del primer problema ya que fue adoptada por varios alumnos como estrategia de resolución. Encontramos acá una marca propia de este grupo que nos permite comprender con mayor precisión la idea del aula como comunidad de producción.

Episodio 3: la discusión colectiva retroalimenta un procedimiento que había quedado a mitad de camino

En este episodio, la profesora recabó la opinión de la clase sobre la producción del grupo de Evelyn, Johana, Johana C., Gastón y Rocío, quienes para calcular el precio por kilómetro habían recurrido a realizar el cociente incremental tomando como referencia los dos primeros pares de la tabla. A pesar de sus numerosos intentos, no se dieron cuenta de que debían calcular el cargo fijo.



De la excursión mínima a Quilmes, aumenta 7 km y el costo aumenta $28.

28 : 7 = 4 (valor x km)

$1.040 : 10 km = 104
valor x km
104 x 17 = 1.768 ⟵ ¿cargo fijo?

El grupo de Ayrton, Matías, Alan y Lucas –dando una vez más muestras de la disconformidad con su propia estrategia azarosa de tachar los unos– valoró el procedimiento y lo consideró mucho más claro y económico que el que ellos habían usado:

65. PROFESORA. ¿Ustedes están de acuerdo con esta estrategia?
66. AYRTON. Es la mejor y más corta, profe.
67. MATÍAS. *Nosotros nos complicamos mucho para sacar eso.*
68. AYRTON. Claro, nosotros hicimos mucho para sacar...
69. LUCAS. Vos solo te complicaste.
70. AYRTON. *Es la mejor y más rápida.*

A la vez, estos mismos alumnos señalaron que al grupo de Evelyn le faltó calcular el valor del cargo fijo y agregarlo para completar los importes:

80. PROFESORA. ¿Esto se entendió? ¿Y ahora qué les propones vos a ellas?
81. LUIS. Que lo multipliquen por 120, la cantidad de kilómetros que hay, 4 por 120.
82. PROFESORA. 4 por 120, ustedes *(refiriéndose al grupo de Evelyn)* hicieron esta cuenta.
83. LUIS. 480.
84. PROFESORA. ¿Qué les pasó cuando hicieron 4 por 120?
85. ALAN. Ah, ahora sí.
86. AYRTON. Hay que agregarle el cargo fijo.
87. MATÍAS. Porque a ellos les faltaba el cargo fijo, o sea el valor...
88. LUIS. Porque ese era el valor por kilómetros, nada más.
89. AYRTON. Para que sea coherente y sea adecuado…
90. LUIS. Sería 1.480.

Notemos que la interacción del grupo de Matías con el procedimiento del grupo de Evelyn permitió precisar las estrategias de ambos: clarificándola en un caso y completándola en el otro. Nos interesa resaltar que Evelyn y sus compañeros sostuvieron con mucho tesón la búsqueda de razones por las cuales no arribaban a un procedimiento ajustado, haciendo numerosos intentos y poniendo en juego estrategias originales para validarlos. Es decir que este grupo pasó por varias vueltas de *intento*, *verificación* y *descarte* pero recién en el momento de la puesta en común accedieron a comprender por qué no funcionaba lo que habían realizado.

Episodio 4: una primera generalización a partir de la emergencia de una fórmula

Al elaborar la secuencia habíamos previsto la necesidad de ir instalando en los alumnos una perspectiva de generalización a través de varias acciones didácticas: la primera consistía en apelar a la reutilización de las relaciones establecidas. Propusimos intencionalmente la búsqueda de varios nuevos importes que nos aseguraran cierta estabilidad de las ideas elaboradas y también la formulación de una cuenta genérica que represente el procedimiento para calcular cualquier costo a partir de conocer los kilómetros recorridos. El registro que trascribimos a continuación permite apreciar cómo se va plasmando ese recorrido de generalización (Perrin-Glorian, 1993).

100. PROFESORA. Si ahora les pido ir a otro lugar que está a 205 kilómetros... *(Los alumnos calculan 205 por 4 y suman 1.000.)*
[...]
119. PROFESORA. Y ahora, ¿si les digo nos vamos a Córdoba, que está a 800 kilómetros?
120. AYRTON Y MATIAS. Y bueno, también lo multiplicamos por 4, más el costo fijo.
121. PROFESORA. Si escribimos una cuenta, ¿cómo sería esa cuenta?
122. BÁRBARA Y AYRTON. 800 por 4 más el costo fijo.
123. AYRTON. Así, profe: *(Escribe en el pizarrón.)* $\mathcal{X} * 4 + 1.000 =$
124. AYRTON. ¿Igual a qué?
125. PROFESORA. Pregunta Ayrton igual a qué...
[...]
135. PROFESORA. Escribieron esta fórmula, ¿qué es esta fórmula?
136. BÁRBARA. Es $\mathcal{X}$ por 4 más 1.000 igual a... es decir, $\mathcal{X}$ por 4 sería la cantidad de kilómetros recorridos por 4.
137. PROFESORA. O sea, esta $\mathcal{X}$, ¿qué son?
138. ALAN. Los kilómetros.
139. PROFESORA. ¿Están de acuerdo? ¿$\mathcal{X}$ por 4 más 1.000...?
140. ALAN. Con esa fórmula podés saber a cualquier distancia...
141. PROFESORA. ¿Igual a qué?
142. VARIOS. A la cantidad de plata.
143. PROFESORA. ¿Puedo poner la plata a pagar?
144. VARIOS. Sí.
[...]
(La profesora anota en el pizarrón: $\mathcal{X} * 4 + 1.000 =$ plata a pagar.*)*

Entre las intervenciones 100 y 119, la profesora apeló a que se calcule el importe correspondiente a diferentes distancias con el objetivo de subrayar que todos los pares pueden calcularse con la misma cuenta. Esta cuestión es importante ya que para muchos chicos no todos los pares de datos tenían inicialmente el mismo *estatuto*. Dicho aspecto se puso de manifiesto en uno de nuestros ejemplos, cuando para calcular el importe correspondiente a 120 km se referenciaban en el valor más cercano de la tabla, que en ese caso era 97 km.[8] Concebir que todos los valores son abarcados por una única relación es parte de lo que debe entenderse para comprender qué es una fórmula.

Cuando la profesora preguntó por el viaje a Córdoba (intervención 119), un par de alumnos hicieron explícito el procedimiento en el que dos parámetros que caracterizan la fórmula son referidos de manera diferente: a la pendiente la nombraron con su valor y a la ordenada al origen con su significado. Entendemos que hay en esta respuesta dos marcas de generalidad: dar la estructura del cálculo en lugar del resultado numérico y hablar de costo fijo en lugar de nombrar al 1.000. En la intervención 121, la profesora apeló a que escriban lo que los alumnos han expresado oralmente, lo cual abre la posibilidad de una transformación al pasar de la oralidad a la escritura. Dos de los chicos propusieron una primera versión e inmediatamente uno de ellos, como si de manera muy rápida hubiera reflexionado sobre esa escritura, propone una segunda versión en la que introduce la variable $\mathscr{X}$ y el signo igual (intervenciones 122 y 123). Probablemente, frente al signo igual y apelando al uso matemático del mismo, se vio necesitado de escribir algo más, cuestión que para nosotros se puso de manifiesto cuando preguntó "igual a qué" (124).

Frente a la pregunta "qué es esta fórmula" (135) se desencadenaron intercambios que permitieron clarificar el significado de cada uno de los elementos. Notemos que es una expresión todavía contextualizada en esta situación, por eso hablamos de una *primera* generalización. En la intervención 140, Alan dio cuenta de que la fórmula tiene un carácter general para este problema. Entendemos que el gesto de la docente de consensuar con los chicos un nombre para la variable que remite al contexto del problema (143) cumple una doble función: es al mismo tiempo un modo de habilitarlos a poner sus marcas en la producción de la clase y una manera de comunicar que los nombres que se usan cumplen alguna función para quienes los atribuyen (en este caso, *conservar* un significado en un momento en el que todavía no se ha arribado a una completa generalización).

Episodio 5: variables, parámetros y dominio de variación

Al promover un uso colectivo de la fórmula ya establecida e indagar por los significados de los diferentes componentes, el proyecto de la profesora de promover una conceptualización más general avanza:

8. Esta solución la encontramos en muchas de las aulas que observamos.

151. PROFESORA. ¿Cómo calculo un viaje de 80 kilómetros?
152. VARIOS. $\mathscr{X}$ por 4 más 1.000.
153. PROFESORA. ¿En la calculadora pongo $\mathscr{X}$?
154. VARIOS. No, 80 por 4 más 1.000.
155. AYRTON. ¿Cómo va a poner $\mathscr{X}$?
156. PROFESORA. ¿Y si quiero un viaje de 15 kilómetros?
157. VARIOS. 15 por 4 más 1.000.
158. PROFESORA. Va a ir cambiando.
159. AYRTON. Lo único que cambia es la $\mathscr{X}$, lo otro queda igual.
160. MAXI Y AYRTON. El valor de la $\mathscr{X}$ va cambiando.
161. PROFESORA. La $\mathscr{X}$, acá, ¿puede valer cualquier número?
162. AYRTON. Sí.
163. PROFESORA. La plata o el precio, ¿puede ser cualquier número?
164. VARIOS. Sí.
165. VARIOS. No.
166. AYRTON. No, va a variar con el número que está en la $\mathscr{X}$.
167. PROFESORA. Si, va variando, ¿pero puede dar cualquier cosa?
168. VARIOS. Sí.
169. PROFESORA. ¿Puede dar 700?
170. EVELYN. No, más de 1.000.
171. AYRTON Y VARIOS. Más de 1.000 porque es el cargo fijo.
172. AYRTON. Profe, es lo que ya te cobran por viajar aunque vos viajes, no sé, a la otra cuadra, te van a cobrar 1.000 pesos.
173. LUIS Y ALAN. Te vieron la cara si pagás 1.000 pesos por eso.

La profesora destinó un tiempo a hacer funcionar la fórmula, a analizar el comportamiento de la variable. Pedir importes para valores específicos ayuda a entender el significado de la variable (152-157): la $\mathscr{X}$ no es un número, no se puede ingresar en la calculadora, pero ocupa el lugar de cualquier número que se interprete como la cantidad de kilómetros recorridos. Al analizar *lo que cambia* y *lo que queda igual* se pasa por la idea de parámetros y variables, aunque no se nombren de esta manera. Además, se discrimina cuáles son los valores posibles de la $\mathscr{X}$ y cuáles los del importe a pagar. Esta primera aproximación a las ideas de fórmula, variable y dominio de variación será retomada una y otra vez a lo largo de la secuencia.

Una mirada global sobre la resolución de este primer problema con relación a las preguntas de nuestro grupo

Habíamos planificado esta situación con mucho detalle y le habíamos atribuido una gran potencia. Verla en acción, o más bien analizar su funcionamiento efectivo, enriqueció aún más nuestra mirada. En efecto, es en las múltiples interacciones entre los chicos y con los docentes que se va tejiendo una trama densa de conocimientos, algunos completamente invisibles fuera del escenario de la clase. Los alumnos dicen, los docentes repreguntan, difunden para todos, requieren precisiones, confirman, explican, confrontan y amplían. Emerge así un conglomerado de relaciones matemáticas que arman en cada clase un texto distinto y original para caracterizar el conocimiento en juego. Es imposible atrapar todas estas ideas *a priori*, pero hubiera sido muy difícil –pensamos– que emergieran sin esa fantástica plataforma de lanzamiento que significó la elaboración compartida y todas sus anticipaciones. Los docentes tuvieron ahí un punto de apoyo que los habilitó para abrir el juego, sostener la incertidumbre y atreverse a dejar pendientes ciertas resoluciones confiando en que el desarrollo de la secuencia permitiría retomarlas para hacerlas avanzar. La elaboración compartida también ayudó a alentar la producción de representaciones, a poder maniobrar entre las escrituras personales y las convencionales a favor de la conceptualización y de promover generalizaciones. El encuentro con todas esas singularidades nos permitió –una vez más– el encuentro con lo inagotable del conocimiento.

ENTRAR A LOS GRÁFICOS: ¿ANÁLISIS GLOBAL O REPRESENTACIÓN PUNTO POR PUNTO?

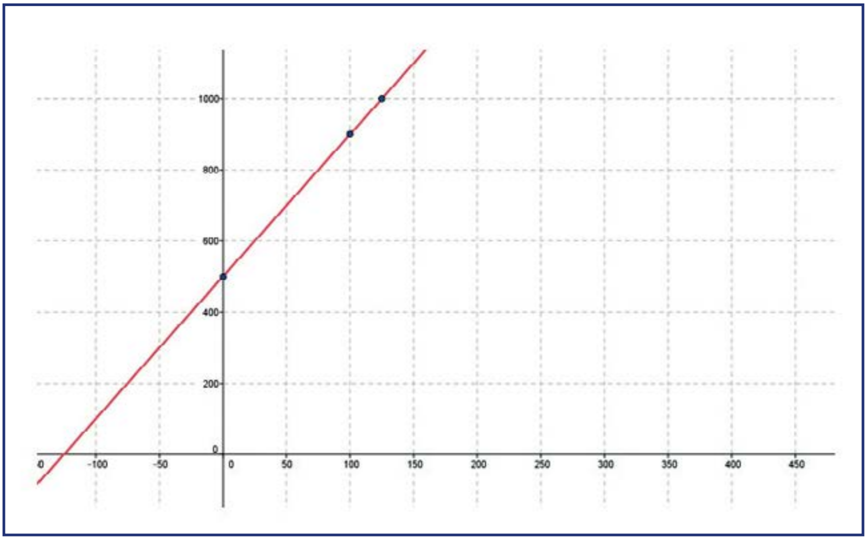
El trabajo sobre gráficos trajo alguna sorpresa: para los alumnos fue mucho más costoso de lo anticipado y a la vez mostró una gran riqueza por el tipo de producción al que dio lugar en las aulas. Por eso encuadramos el análisis en la tensión –tantas veces transitada en nuestras discusiones– entre *lo fácil* y *lo difícil*. La expresión "vale lo que cuesta" podría formar parte de las conclusiones que surgen de esta experiencia.

Es usual proponer la construcción de un gráfico después de que los alumnos se las vieron con la resolución numérica. En muchas ocasiones esta tarea se propone con la ilusión de que existe una traducción inmediata entre ambas representaciones. Como vimos al presentar la secuencia en la Parte I, tal traducción existe si se piensa en representar puntos aislados. Sin embargo, cuando se espera que el gráfico sea interpretado como una representación del modelo lineal con toda su complejidad, las operaciones intelectuales necesarias requieren ser tomadas intencionalmente por la enseñanza. Recordemos que después de bastantes discusiones, en el equipo habíamos optado por proponer una serie de gráficos para que los chicos eligieran cuál o cuáles representaban la situación de los viajes del Problema 1. Si bien habíamos anticipado que sería difícil para los estudiantes, la situación en terreno generó una gran incertidumbre y una sensación de malestar en la mayoría de los docentes que la implementaron. No obstante, el análisis de las clases mostró que esa tarea permitió desplegar muchas más relaciones que las que habíamos identificado *a priori*. En ese sentido, aunque costosa, fue una situación muy rica y dio lugar a numerosos intercambios en las aulas.

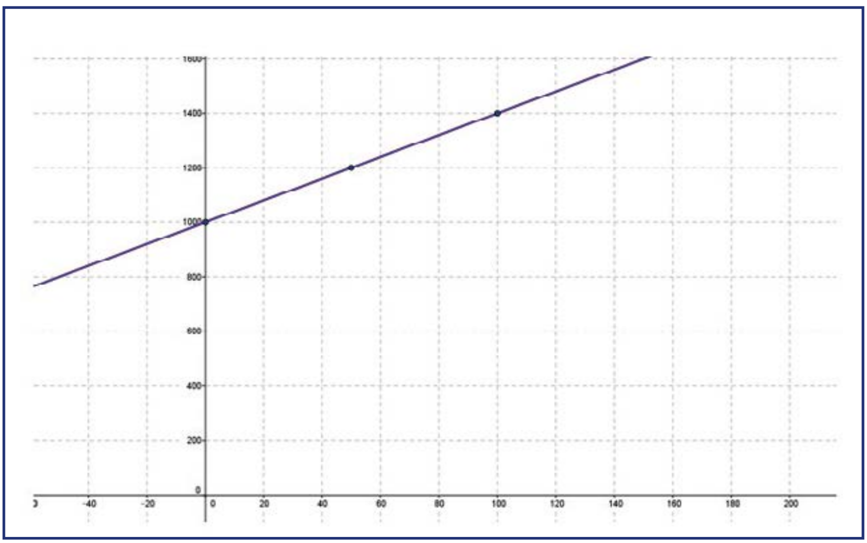
De la sensación de malestar a la producción de conocimiento

Recordemos que el primer trabajo con gráficos (Problema 4 de la secuencia) propone que los chicos elijan cuál o cuáles de los siguientes representan el viaje correspondiente a la situación inicial de la secuencia.[9]

A

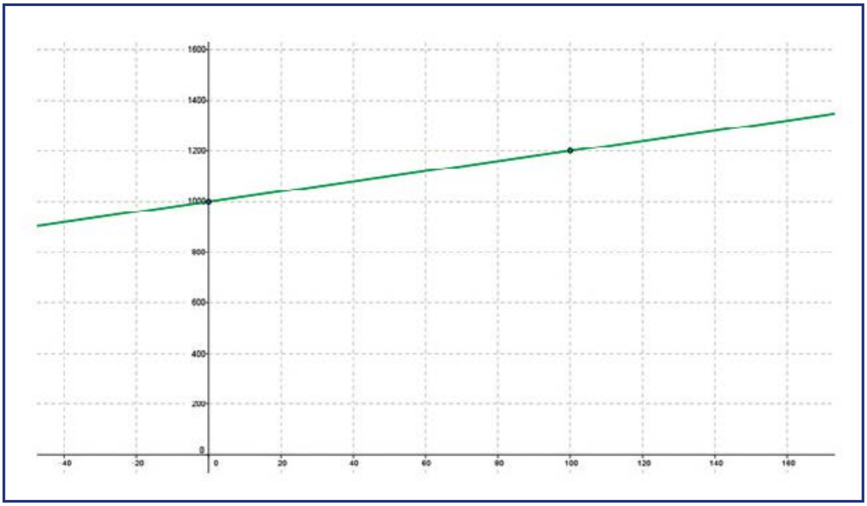


B

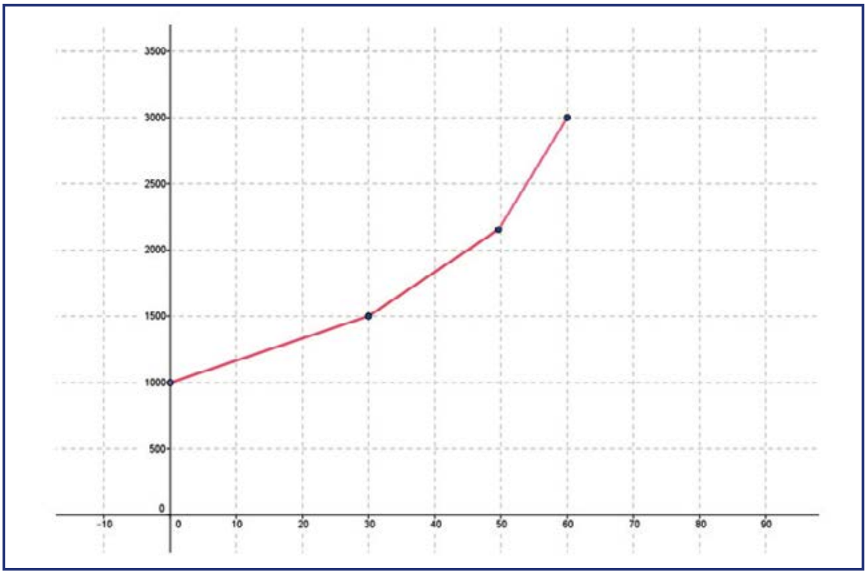


9. En la sección "Elegir, analizar, construir: distintas tareas, distintas complejidades con relación al tratamiento de los gráficos" analizamos las razones didácticas por las que elegimos cada gráfico (ver pp. 48-49). No obstante, cada grupo de profesores hizo algunas variaciones a la propuesta original. En el registro que se analiza a continuación se considera el problema en la versión que se trabajó en uno de los cursos.

C



D



Nuevamente, los chicos del Aula A vienen en nuestra ayuda para realizar el análisis que organizamos en episodios.

Una primera comprensión del problema

Como dijimos, los alumnos se desconciertan frente al problema (“¿Qué es lo que hay que hacer profe?”; “¿Cómo hay que hacer?”), lo cual inaugura en cada pequeño grupo en los que está organizada la clase una serie de intercambios con la profesora que van permitiendo ponerlos en acción y discutir aspectos relevantes de los gráficos. Veamos:

LUIS. Profe, venga un cachito, ¿cuál es el punto acá? *(Señala el gráfico B.)* Porque hay tres puntitos.
PROFESORA. No, toda la recta.
LUIS. ¿Y por qué hay un puntito acá?
PROFESORA. Para poder dibujarlo bien.

La pregunta de Luis da cuenta de que una idea central para el concepto de linealidad está todavía en plena elaboración (no tendría por qué ser de otra manera).[10] Efectivamente, pareciera que para él –¿y para cuántos otros chicos más?– no da lo mismo tomar cualquier punto. En otros términos, él se pregunta en cuál debe fijarse, cuál debe considerar, sin tomar en cuenta que la representación abarca un conjunto infinito de puntos *equivalentes*. Recordemos que algo similar ya había sucedido cuando trabajaron con la tabla: no todos los pares tenían la misma jerarquía cuando debían usarlos como punto de apoyo para buscar otros pares desconocidos. Concebir que todos los pares –los puntos– están abarcados por la misma relación es uno de los núcleos del concepto de función y requiere tiempo para ser elaborado. Este ejemplo pone en cuestión la idea según la cual el gráfico es una representación de *algo que ya se aprendió*. Por el contrario, nos muestra que este trabajo con gráficos supone una oportunidad para seguir madurando ideas generales cuya elaboración es de largo plazo. El aprendizaje central que está en juego –cabe subrayar– es entender que los puntos están vinculados entre sí por la misma relación, cuestión bastante más compleja que interpretar las coordenadas de algunos puntos sueltos. Para nosotros, como grupo, cobrar conciencia de esta complejidad a partir del análisis posterior permitió superar el desconcierto frente al malestar de los chicos y modificar la percepción inicial de que habíamos planteado algo desajustado.

Veamos pequeñas interacciones como esta, cuyo análisis va en la misma dirección:

PROFESORA. *(A toda la clase.)* Me preguntan por qué el gráfico se acaba acá. Es porque se acabó la hoja, a lo mejor seguiría si tuviera una hoja más grande.

O esta, al acercarse a un grupo:

LUCAS. Venga a explicar.
PROFESORA. Uno de los cuatro gráficos o varios pueden representar la primera agencia, la que nos cobraba 4 pesos por kilómetro y 1.000 pesos de cargo fijo. ¿Qué cosas veo en los gráficos?
LUCAS. Que son líneas. *(Con la mano indica una recta.)*

10. En realidad, la idea a construir es relativa no solo al concepto de linealidad sino al de cualquier función definida por una relación entre dos variables.

La invitación a "ver" en el gráfico comunica que hay cosas para desentrañar e interpretar. La respuesta del alumno da cuenta de que se necesita un cierto recorrido para que la mirada sea interpretativa y trascienda el dibujo.

Además de que elijan entre los gráficos propuestos –tenían que decir cuál o cuáles representaban la situación– se les pide a los chicos que argumenten. Esto abre la posibilidad de que al mismo tiempo que se problematizan aspectos de la comprensión de los gráficos se profundizan los significados que venían elaborando con relación a la situación lineal en general.

LUIS. Para mí que no es ninguna.
PROFESORA. ¿No hay ninguna? ¿Por qué? ¿De qué se trataba?
LUCAS. Se me hace que no.
PROFESORA. ¿Por qué se te hace que no?
LUCAS. Porque el importe, ¿no es el cargo fijo?
PROFESORA. El importe es lo mismo que el precio, es lo que hay que pagar.
LUCAS. Ah, ya está. Y de 500 no hay ninguno ahí, este no es ninguno.
PROFESORA. Él dice que este lo descartaría porque no hay ninguno de 500, ¿qué sería ese 500 para vos?
BRIAN. Los kilómetros.
LUIS. El precio que se paga por viajar estos kilómetros.
PROFESORA. *(Señalando (0; 500).)* Y en este punto, ¿cuántos kilómetros viajé?
NICOLÁS. 25 kilómetros.
LUIS. 40 kilómetros.
LUCAS. Ninguno

La interpretación del cargo fijo –ya lo vimos– generó dificultades desde el vamos: es difícil aceptar la incorporación al modelo de un valor (el correspondiente a un viaje de 0 km, o sea un no viaje) que carece de sentido en la realidad. Esto se manifiesta cuando Nicolás y Luis atribuyen una distancia relativamente pequeña para la ordenada al origen (25 km y 40 km). A pesar de que este asunto se viene tratando desde la primera clase, los alumnos trastabillan una y otra vez, lo cual reafirma la pertinencia de haber vuelto a esta discusión.

Al principio del diálogo, frente a la duda de Lucas respecto de la relación entre importe y cargo fijo, la profesora –en lugar de responder directamente– actualiza una información ya trabajada. Esto constituye un soporte para pensar y a los chicos les resulta productivo ya que logran construir un argumento para descartar el gráfico.

La relación entre linealidad y recta

Elegir el gráfico comporta establecer cuántos puntos que responden a la situación es necesario considerar. Poner esto en discusión con los estudiantes es uno de los sentidos de la tarea propuesta. Hacer preguntas al respecto permite establecer una relación entre este asunto y el hecho de que, en este caso, el gráfico es una recta, cuestión que a esta altura los chicos todavía no saben.

LUIS. Profe, para mí es esta.
PROFESORA. ¿Por qué?
LUIS. Porque a los 100 kilómetros da este punto y acá vendría a ser 1.400 pesos, 1.000 de importe y 100 por 4 igual a 400.
PROFESORA. Para 100 da el valor que tiene que dar, que es 1.400. En este punto está todo bien, pero ¿todos los puntos que están acá representados corresponderán a esta empresa? Porque capaz que justo dio el valor acá y no da acá o acá.
LUIS. A ver...
PROFESORA. ¿Tendremos alguna manera de darnos cuenta si en todos los casos da?
LUIS. Sí, profe. Acá a los 200 kilómetros me dan 800, más 1000 es igual a 1.800.
PROFESORA. Luis dice que para 200 kilómetros tenía que dar 1.800, y da, o sea que este punto estaría bien. Comprobar para 100 y para 200, ¿me deja segura de que da para todos?
LUIS. Sí.
LUCAS. No, para todos no.
LUIS. Para todos acá, para toda la recta.
PROFESORA. Y si yo busco para veinti... no sé cuánto, ¿también está bien?
LUIS. Sí.
PROFESORA. ¿Están seguros?
LUIS. Sí.
LUCAS. Y no, cómo vas a saber.
(Los alumnos siguen probando para varios puntos si verifican o no la relación.)

El proyecto de explicar por qué la representación gráfica de una función lineal es una recta estuvo presente desde el vamos y generó en nuestro grupo muchas discusiones. Habíamos ensayado en su momento formas de demostrarlo adaptadas a los conocimientos de nuestros alumnos. Esto configuró una intencionalidad que probablemente llevó a la profesora a estar atenta a las producciones que permitieran plantear por qué en este caso alcanzaría con mirar dos puntos. Notemos que las preguntas de la docente cumplen la función de ayudarlos a resolver sobre el gráfico particular que se está tratando y al mismo tiempo van instalando la cuestión de *la suficiencia* como un asunto del que nos ocupamos en matemática.

Mientras los chicos chequean los puntos para verificar si cumplen o no la fórmula, las intervenciones de la profesora van gestando la idea de que para concluir sobre la suficiencia necesitan algo más. La inspección de varios puntos hace que los alumnos seleccionen uno de los gráficos con bastante convicción. En ese contexto la docente pregunta por qué descartan los otros gráficos, orientada por la idea de que para profundizar la comprensión no solo es necesario argumentar a favor sino también argumentar por qué lo que no es, no es.

PROFESORA. Luis dice que probando para algunos valores, le da este. ¿Y por qué este no?
BRIAN. Porque este es más recto.
NICOLÁS. Es más inclinado.
LUIS. Fijate a los 200 kilómetros, 200 por 4...
LUCAS. Este está más en diagonal. *(Señalan con la mano, dicen diagonal por inclinado.)*
PROFESORA. ¿Y este no está en diagonal?
NICOLÁS. Sí, pero este está más.
PROFESORA. ¿Qué querés decir con que "está más"?
NICOLÁS. Se fue más para arriba, que es más lejos... yo qué sé, que sale más caro.
PROFESORA. ¿Será que sale más caro?

Las preguntas de la profesora exigen precisiones por parte de los chicos. Notemos un cambio en la calidad de los argumentos: de mirar punto por punto se pasa a analizar globalmente la inclinación, interpretando que la misma tiene que ver con el precio por kilómetro.

La docente necesita apoyarse en las ideas que van proponiendo los alumnos para seguir planteando cuestiones. Este es un aspecto central de la clase entendida como comunidad de producción: en algunos casos es solo a partir de lo ya hecho que las preguntas cobran sentido.

Para descartar el gráfico D, un grupo apela a relaciones a partir de las cuales puede emerger la idea de pendiente:

JOHANA. *(Señala el gráfico D, que no es lineal.)* Es re desparejo.
AYRTON. Este es desparejo.
ROCÍO. En este gráfico sube desparejo. Es desparejo acá, suponete que hace 30 kilómetros y sube 500 pesos y acá hace 20 más y sube como 700 pesos.

A su vez, otro grupo tiene una discusión similar:

PROFESORA. Ella dice que acá primero el kilómetro cuesta poquito y que después cuesta más.
GISELLE: Sí.
PROFESORA. ¿Por qué? ¿Cómo te das cuenta?
GISELLE. Porque es re raro que acá vaya de a poquito, de a poquito, y después suba mucho.

La profesora detecta que en varios de los grupos –los registros anteriores lo confirman– los chicos van entrando en un análisis en términos de variación de incrementos. Decide entonces abrir esta cuestión en el espacio colectivo y poner en común algunas relaciones que generarán buenas condiciones para que el conjunto de la clase comprenda por qué el gráfico es una recta. Nos interesa subrayar esta búsqueda intencional, por parte de la profesora, de condiciones para que la explicación que habíamos previsto ofrecer pueda ser admitida.

Veamos ahora un episodio de la puesta en común en el que se discute cuántos puntos es necesario mirar para decidir cuál es el gráfico:

> PROFESORA. Alguien dijo que con probar con uno ya es suficiente, ¿están de acuerdo? Yo pruebo con uno, pruebo con este... *(Señala la ordenada al origen.)* Para cero tenía que valer 1.000. ¿Ya está, es este el gráfico?
> VARIOS. No.
> PROFESORA. Entonces, con probar con uno, ¿me alcanza?
> LUIS. Con 2.
> PROFESORA. ¿Con 2 y ya está?
> EVELYN. No, con varios profe.
> PROFESORA. ¿Y cuántos son varios?
> AYRTON. Con 2, 3, 4, 5, 6.
> EVELYN. Con muchos.
> PROFESORA. ¿Cuántos son muchos?
> LUIS. Infinitos.
> PROFESORA. Luis dice que habría que probar con infinitos, ¿puedo probar con infinitos?
> AYRTON. No, te tenés que dar cuenta ya.
> MATÍAS. Cuando probás con el segundo, el tercero, ya te das cuenta.
> PROFESORA. ¿De qué te das cuenta?
> MATÍAS. De que es ese.
> LUIS. Porque la fórmula es la misma.

Nos detenemos en el principio y en el final de este episodio. La profesora retoma la propuesta de mirar un único punto y ofrece como contraejemplo los distintos gráficos (señalemos, de paso, el valor productor del contraejemplo).

El argumento de Luis al final del episodio muestra una evolución en las ideas de la clase (recordemos que en un inicio no estaba claro que todos los puntos de la recta respondiesen a la misma relación). Se podría considerar exagerado pensar que es toda la clase la que modificó el punto de vista. No obstante, reafirmamos nuestra interpretación basados en el análisis de todo el registro, en el cual numerosas intervenciones convergen en ideas similares que van teniendo consenso. En general reivindicamos la existencia de *ideas de la clase*, más allá del modo –siempre particular– en que son procesadas por cada uno de los alumnos. Poco a poco, la clase del Aula A se va afirmando en un análisis en términos de variaciones y llega a establecer que si el precio por kilómetro es siempre el mismo, la variación tiene que ser constante.

AYRTON. El D tampoco puede ser, porque no puede ser, empieza en 1.000 y después sube mucho. Acá son 1.000 y son pocos kilómetros, pero ya acá sube mucha plata para tan pocos kilómetros.
NICOLÁS. No entendí.
AYRTON. Para pocos kilómetros acá sube mucho. Hacés pocos kilómetros y te cobran mucha plata.
PROFESORA. Ayrton dice que si miro acá, por ejemplo, para 10 kilómetros creció este precio, acá para 10 kilómetros creció este precio. ¿Por qué se daban cuenta de que no daba?
ROCÍO. Porque cada vez crece más.
PROFESORA. ¿Y no podía crecer cada vez más?
MATÍAS. No.
AYRTON. Y, sino no valen lo mismo los kilómetros.
PROFESORA. ¿Tenían que valer lo mismo los kilómetros?
AYRTON. Sí. Y acá ya vale mucho más.

Apelar a que se expliciten cuáles son los elementos que permiten darse cuenta es un modo de establecer más sólidamente la relación entre *valor por unidad constante* y *variación uniforme*. Esta relación es muchas veces pasada por alto, en general porque es obvia para los profesores. Desmenuzar esta idea en las clases fue posible, quizás, gracias a las arduas discusiones en nuestro grupo a raíz de la entrada a la linealidad por la idea de variación uniforme.

Sostener la discusión, rescatar las ideas, hablar de su reutilización posible son intervenciones de la docente que empujan hacia una lectura del gráfico que empieza a hacer visible una nueva relación para ellos entre *aumenta siempre lo mismo* y *es una recta:*

PROFESORA. *(Señala el gráfico D.)* A ver, ella decía acá que aumentaba 10 kilómetros y aumentaba poquito, acá aumentaba 10 kilómetros y aumentaba más, ¿esa idea me sirve para mirarla acá?
AYRTON. Sí, sí, porque allá aumenta lo mismo porque va recto así y al ser recto aumenta siempre lo mismo.
PROFESORA. ¿Aumenta siempre lo mismo?
ALAN: ¿Cómo que es recto?
AYRTON. No ves que es derecho.
EVELYN. Va en diagonal, pero es recto.
AYRTON. Está recto, aumenta siempre igual.

A partir del avance de los chicos, la profesora apunta a que construyan criterios anticipatorios que habiliten un análisis general y que al mismo tiempo funcionen como herramientas para validar lo que se hace:

PROFESORA. Miremos el B, si me muevo 1 cuadradito que... ¿cuántos kilómetros eran?

AYRTON. 10.
BÁRBARA. No, 20.
PROFESORA. Un cuadradito en el eje horizontal, ¿cuánto es?
MATÍAS. 20 kilómetros.
PROFESORA. Si fuese este el correcto, ¿cuánto tiene que crecer?
ALAN. 80.
PROFESORA. ¿20 kilómetros eran 80 pesos?

Luego, la profesora retoma el análisis de los distintos casos y plantea una generalización:

PROFESORA. Tomando lo que decían los chicos, ¿el crecimiento tiene que ser distinto o siempre el mismo?
VARIOS. Siempre el mismo.
PROFESORA. Es decir que tiene un crecimiento que se llama uniforme, siempre lo mismo, crece siempre igual.

Sin embargo, en el siguiente pasaje se ve que el traslado de lo elaborado a otra situación no es inmediato y requiere volver a explicitar las condiciones de linealidad para relacionarlas con el hecho de que el gráfico sea una recta.

PROFESORA. En la empresa que cobraba 8 pesos por kilómetro y 600 pesos de cargo fijo *(se refiere al Problema 2, tratado en la secuencia)*, ¿el gráfico nos tendría que haber quedado una recta?
MATÍAS. El último *(se refiere al gráfico D)* podría ser para esa.
AYRTON. No, es el último, el D.
PROFESORA. El último, ¿por qué?
AYRTON. En el primero, en Quilmes por ejemplo era más barato en aquel lado que en este, pero para Chapadmalal era más caro.
PROFESORA. Esta empresa con la que trabajamos ayer, ¿no cobraba siempre el mismo costo por kilómetro?
VARIOS. No, no.
ALAN. Cobraba 8 pesos pero era más barato el cargo fijo.
AYRTON. Salía más caro este porque el cargo fijo era distinto. Era más barato el precio por kilómetro en este, pero era más caro el cargo fijo, y en el otro al revés.

Frente a la propuesta de comparar las dos primeras situaciones tratadas en las clases anteriores, se produce un malentendido: en tanto que la profesora busca establecer qué tienen en común con el objetivo de instalar la relación entre linealidad y recta, los chicos no saben hacia dónde se dirige y se centran en las diferencias de cargo fijo y precio por kilómetro que hacen que convenga una u otra. La profesora prestigia la idea matemática, los chicos rescatan un asunto práctico: son distintos posicionamientos con relación a la generalidad.

Clara en su intención, la docente los lleva a analizar el funcionamiento de la segunda agencia en los mismos términos de lo realizado recientemente para la primera:

> PROFESORA. Si vos aumentabas 1 kilómetro, ¿cuánta plata te aumentaban?
> AYRTON. 8.
> PROFESORA. ¿Y en el otro kilómetro cuánto te aumentaba?
> AYRTON. 8.
> PROFESORA. ¿Y en el otro kilómetro cuánto te aumentaban?
> AYRTON. 8.
> PROFESORA. Y entonces, ¿podía ser así el gráfico? *(Muestra el gráfico D, no lineal, que los alumnos habían señalado como representante del funcionamiento de la segunda agencia.)*
> MATÍAS. No, el otro, que era más así. *(Matías cree que tiene que elegir entre uno de los gráficos dados.)*
> PROFESORA. No sé si era alguno de estos, pero lo que pregunto es: ¿este otro, si lo graficara, también tendría que ser una recta?
> AYRTON. Sí, pero más arriba, más empinada.
> MATÍAS. Más arriba, más empinada.
> PROFESORA. ¿Cómo saben que tenía que ser una recta?
> EVELYN. Tenía que dar siempre lo mismo.
> AYRTON. Sí, como en este, tenía que ser uniforme.
> PROFESORA. ¿Y al ser el crecimiento uniforme tenía que ser una recta?

Las cosas están problematizadas: no es obvio que es una recta pero hay elementos para entender que es posible explicar por qué es una recta. Estas buenas condiciones para que la profesora proponga los argumentos son las que habíamos pensado cuando concebimos el proyecto. Recalcamos que es la profesora la que hace la demostración sobre la base de las muchas relaciones establecidas en la discusión e interacción con sus alumnos. Tal vez sea esta una respuesta didáctica a una idea que no compartimos, según la cual para que los chicos *construyan* el docente siempre debe silenciar sus explicaciones. La clase concluye, entonces, con ese aporte de la profesora.

Retomemos ahora el comentario respecto de la sensación de malestar que manifestaron los docentes al finalizar esta clase. La situación fue más exigente para todos. Como dijimos, los chicos experimentaron mayor incertidumbre al tener que lidiar con una forma de representación poco amasada, que ofrecía un marco muy distinto para modelizar el problema. Los docentes percibieron una fuerte demanda de los chicos, a la cual respondieron, pero al mismo tiempo interpretaron que había un cierto desajuste entre lo que los chicos podían y lo que la situación reclamaba. El clima de insatisfacción prevaleció y opacó el alto nivel de producción, que solo se recuperó a partir del análisis posterior de los registros de clase. Antes de concretar este análisis, en nuestro grupo se imponía la idea de cambiar la ubicación del problema en la secuencia introduciendo previamente situaciones para ablandar el tratamiento de los gráficos.

Lo fácil y lo difícil es un tema recurrente en la enseñanza. También lo ha sido en nuestras discusiones. Si asumimos que las estrategias de los alumnos son constitutivas de lo que se quiere enseñar, enfrentar el aula proponiendo cuestiones muy desafiantes exige estar dispuesto a interactuar con una gran diversidad de ideas. Las anticipaciones realizadas en el grupo respecto de los posibles recorridos de los alumnos constituyeron –una vez más– un sostén fundamental para arribar a la explicación que la profesora tiene la intención de ofrecer.

EL PROBLEMA DE LA COMPARACIÓN DE SITUACIONES COMO VÍA PARA LA PRODUCCIÓN DE NUEVAS IDEAS

En la Parte I de este libro ya hablamos sobre la complejidad que introduce la comparación de situaciones que vienen planteadas en registros distintos de representación. Recordemos el Problema 5.

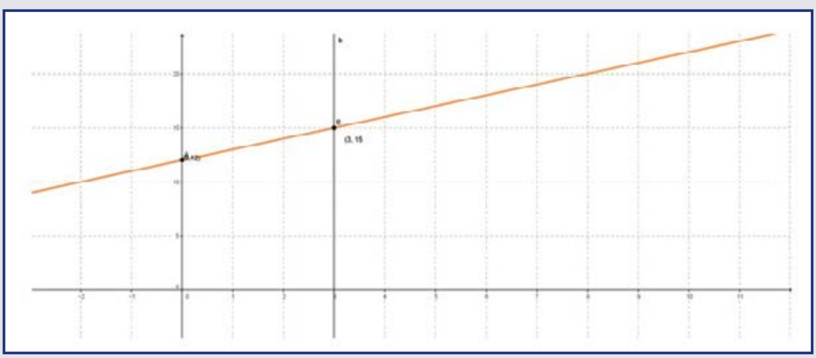
PROBLEMA 5

Un cíber tiene en sus máquinas un reloj que mide el tiempo de uso de cada cliente. Ofrece dos opciones de pago.

Opción 1. Pagar una inscripción y un costo por cada hora, de acuerdo con los datos que figuran en la siguiente tabla:

Tiempo en el cíber (horas)	5	10	20	23
Precio ($)	12,50	20	35	39,50

Opción 2. Pagar de acuerdo con los datos que proporciona el siguiente gráfico:



a) ¿Cuál de las dos opciones conviene? ¿Por qué?
b) En la segunda opción, ¿se paga una inscripción y un costo por cada hora? ¿Podemos escribir para esta opción una cuenta que nos permita calcular el precio que se paga por un tiempo determinado en el cíber?

Para ampliar el horizonte respecto de posibles ámbitos de aplicación de la linealidad, aquí abandonamos los viajes y nos internamos en las modalidades de pago en un cíber. Como ya anticipamos en el análisis de la secuencia realizado en la Parte I del libro, con este problema los chicos enfrentan por primera vez una tarea de comparación de situaciones planteadas en diferentes registros. Veremos que esto implicó para ellos la producción de nuevas ideas.

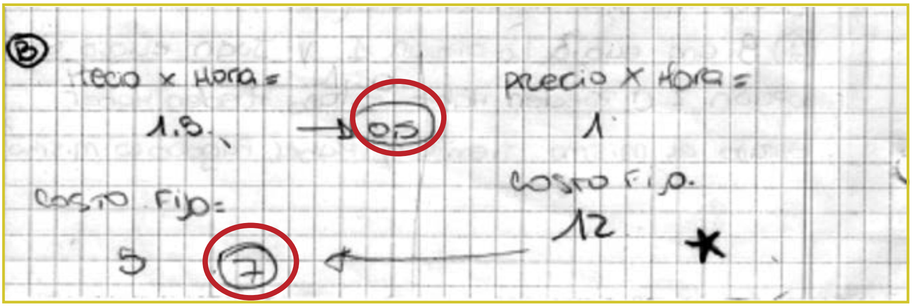
El material recolectado en las diferentes aulas resultó muy rico. Al momento de seleccionar los aspectos que más nos impactaron recortamos tres cuestiones: en primer lugar, la gran cantidad de pequeñas relaciones –con sus marchas y contramarchas– que los estudiantes hacen antes de lograr establecer una conclusión; en segundo lugar, el modo en que las ideas de los chicos nos interpelan respecto de aquello que consideramos como evidente; en tercer lugar, el papel del docente como el gran armador de la multiplicidad de ideas que circulan.

La emergencia de pequeñas relaciones frente a la tarea de comparación

Nos concentramos en el trabajo de un grupo de alumnas. Todo lo que hacen muestra que se manejan con un supuesto que tendrán que ir desarmando: solo una de las dos empresas es la que conviene. Este supuesto entra en contradicción con un primer análisis que hacen centrado en los parámetros. En ese momento, llaman a la profesora:

> YAMILA. No sabemos cuál es la mejor, porque en esta la hora te sale más barata *(opción 2)*, pero el precio fijo este es más barato que este *(opción 1)*.
> PROFESORA. Perfecto eso que están pensando, muy bien. Ahora, ¿qué haremos para compararlo? Eso que están diciendo está perfecto, las dos tienen algo que conviene y algo que no conviene, tenemos que compararlas, ¿cómo haremos?

La intervención de la profesora las lleva a precisar su consideración. "Acá nos conviene el precio por hora de este porque la diferencia es de 0,5", explica Yamila, una de las estudiantes.



YAMILA. Pero acá conviene el costo fijo de este *(refiriéndose a la otra situación)*, porque la diferencia es de 7.
MAYRA. No podemos asegurar alguno.
YAMILA. Claro, pero me parece que como la diferencia del primero es solo 50 centavos, no es lo mismo 7 pesos que 50 centavos.
MAYRA. Conviene el primero.

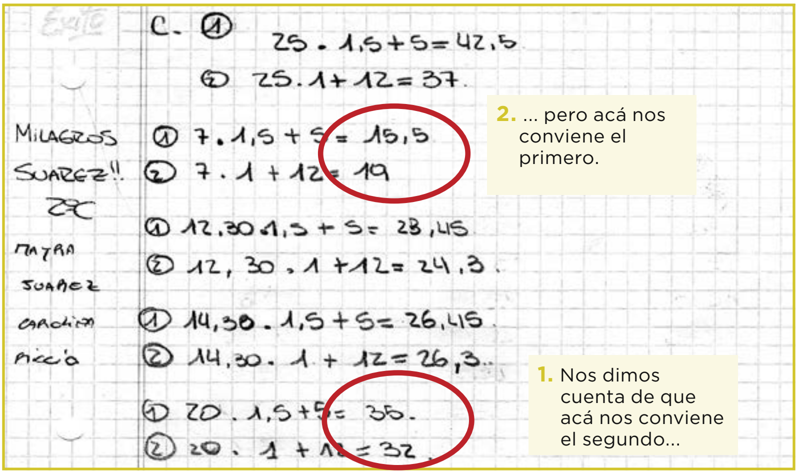
Estas alumnas hacen foco en las diferencias entre los valores de los parámetros tratándolos separadamente y consideran que esa sola información les permite llegar a una conclusión. Por eso le atribuyen la capacidad de determinar el orden para todo el dominio. Pareciera que se les escapa que 0,5 es la diferencia de incremento por hora de la opción que arranca con 7 pesos de desventaja. Notemos que no basta que estas diferencias (7 y 0,5) sean tratadas como valores absolutos. Para avanzar necesitan coordinar la pendiente y la ordenada al origen.[11] Aunque los chicos están usando un conocimiento que han construido –los dos parámetros determinan el comportamiento de cada función–, sobre esa base es necesario elaborar una nueva relación más compleja. El análisis de lo sucedido hace visible un aspecto del concepto de función que no habíamos previsto, profundiza la conceptualización sobre los parámetros y, en consecuencia, acerca de la idea de linealidad misma. Una vez más, nos sorprendemos aprendiendo cuestiones nuevas sobre la función lineal a raíz del análisis de las producciones de los chicos.

En las discusiones de nuestro grupo habíamos previsto que algunos alumnos intentarían con un valor y decidirían sobre esa base para todo el dominio ("conviene tal..."). En función de esta posibilidad decidimos interceder, pidiéndoles que calcularan los importes de cada opción para diferentes valores. La idea era confrontarlos con el hecho de que la conveniencia cambia. Acá las preguntas cumplen el papel de una intervención y apuntan a mover posicionamientos. Ya lo hemos dicho, no es posible prever todo cuando existe la intención clara de abrir el juego y alentar la producción de los alumnos. Sin embargo, las anticipaciones

11. En el grupo nos quedamos dándole vueltas a este asunto. Veíamos que en esta construcción los chicos tienen que aceptar algo que contraviene su experiencia: restan *precios por hora* pero no obtienen como resultado un precio por hora. El viejo dicho, "si sumás manzanas –o restás, en este caso– obtenés manzanas", deja de ser válido. Valoramos esto como un aprendizaje nuestro.

que fuimos haciendo funcionaron como herramientas para ampliar el abanico de lo posible y favorecer la producción de intervenciones potentes.

Veamos la producción del mismo grupo luego de que la profesora solicita el cálculo para diferentes valores:



La exploración de diferentes valores resultó productiva para responder cuál empresa convenía

> CARO. Profe, nos dimos cuenta de que acá (1) nos conviene el segundo, pero acá (2) nos conviene el primero.
> MILAGROS. Es según las horas que estén.
> YAMILA. Entonces cuantas más horas, es más barato con la opción 2, cuantas menos horas, con la 1.

Notemos el cambio en la perspectiva de Yamila: comenzó considerando las diferencias de los parámetros, que son fijas, pero ahora repara en la diferencia entre las funciones, que sí varía. Los alumnos llegan a una respuesta global que todavía no pueden precisar. En este contexto cobra sentido la pregunta por el punto de encuentro entre las dos opciones, que a la vez permite profundizar las consideraciones sobre la conveniencia.

Acerca de la arbitraria relación con lo evidente

> No puede ser nunca porque mirá, acá no estuvieron el mismo tiempo y pagaron lo mismo, y no puede ser nunca porque tienen precios diferentes.
> *Carolina*, *una alumna* (a raíz de la pregunta por el punto de encuentro)

La cita anterior es elocuente: aunque los chicos ya encontraron que a veces conviene una opción y a veces otra, frente a la pregunta por una posible coincidencia entre tiempo de estadía y precio para las dos opciones, la mayoría anticipa que no hay encuentro y su trabajo se enfoca a confirmarlo. Esto los lleva a no tomar en cuenta las evidencias en contrario, lo cual nos impacta y plantea una reflexión sobre la *naturaleza de lo evidente*.

Veamos la propuesta que realiza uno de los grupos cuando la profesora plantea la siguiente consigna:

> *Si Ana eligió la opción 1 y Juan la opción 2, ¿pueden haber estado el mismo tiempo y haber pagado lo mismo?*

Frente a esta pregunta, los chicos hacen cuentas comparando el costo en ambas empresas, señalan un valor para el que los importes son iguales y lo desestiman. Increíblemente para nosotros, la coincidencia no acaba de convencerlos.


6) Pueden haber estado el mismo tiempo pero no haber pagado lo mismo ya que la opción que eligió Ana es más cara que la de Juan

1,5 x 15 = 22,5 +5 = 27,5
1 x 15 = 15 + 12 = 27

1,5 x 14,6 = 21,9 +5 = 26,9
1 x 14,6 = 14,6 +5 = 19,6

1,5 x 14,8 = 22,2 +5 = 27,2

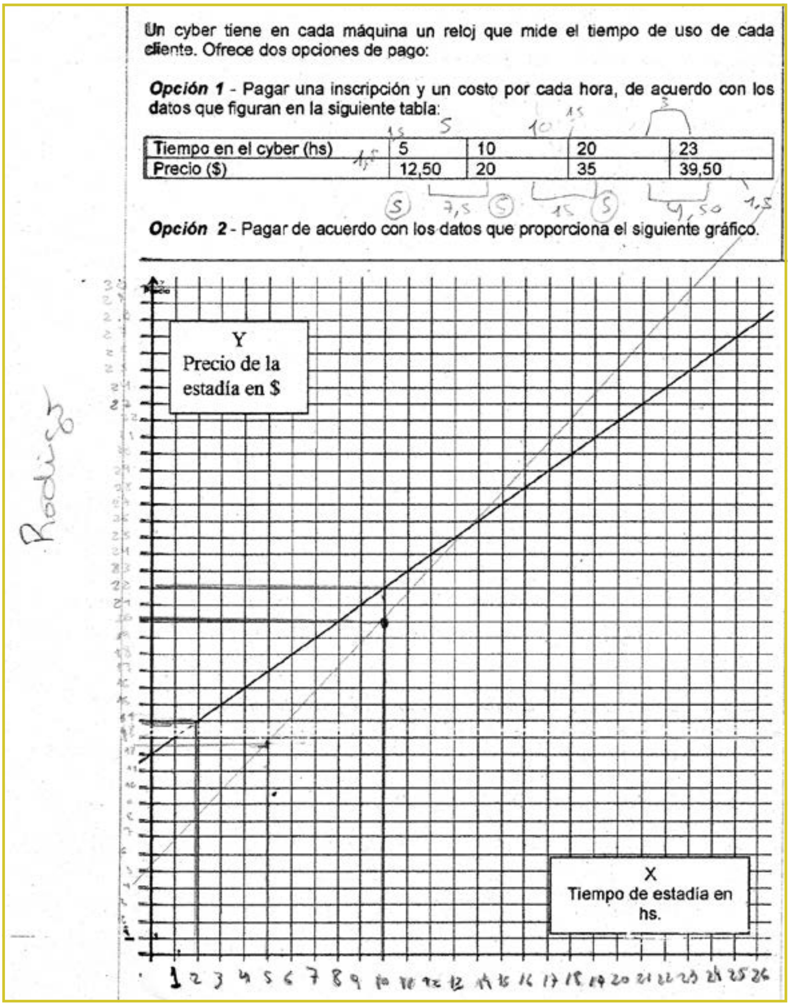
1,5 x 14,3 = 21,45 +5 = 26,45
1 x 14,3 = 14,3 +12 = 26,3

1,5 x 14,2 = 21,2 +5 = 26,3
1 x 14,2 = 14,2 +12 = 26,2

1,5 x 14 = 21 +5 = 26 mismo tiempo
1 x 14 = 14 + 12 = 26 misma plata

Este último resultado genera diferencias en el grupo. Rodrigo, un alumno con poco prestigio matemático, sostiene que sí hay encuentro pero los otros chicos no lo acompañan: aunque subrayan que para el valor 14 obtienen el mismo importe (26), no interpretan este resultado como respuesta al problema que se les propuso.

Finalmente, Aldana –en consonancia con la posición de Rodrigo– grafica la situación y parece tomar conciencia de que sí es posible el encuentro. De todos modos no convence al resto del grupo, que persiste en negarlo.


Un cyber tiene en cada máquina un reloj que mide el tiempo de uso de cada cliente. Ofrece dos opciones de pago:

Opción 1 - Pagar una inscripción y un costo por cada hora, de acuerdo con los datos que figuran en la siguiente tabla:

Tiempo en el cyber (hs)	5	10	20	23
Precio ($)	12,50	20	35	39,50

Opción 2 - Pagar de acuerdo con los datos que proporciona el siguiente gráfico.

¿Cuál es, entonces, el significado del punto de cruce de las dos rectas para estos chicos? Podríamos extender esta pregunta para todos los alumnos que, con matices, sostienen posiciones similares. Es claro que se trata de algo a construir, lo cual nos permite considerar esta cuestión como un asunto para discutir de forma explícita con los alumnos.

¿Cómo analizar el hecho de que los chicos no vean algo tan obvio para nosotros? Varias cuestiones pueden confluir en una explicación posible.

Pareciera que el gráfico, aunque continuo, está formado solamente por los puntos que ellos han hecho *intervenir* para su construcción. Los otros son una especie de relleno que no aporta información sobre los procesos representados.[12] Pareciera que para los chicos es posible que haya un intervalo en el que una de las funciones es mayor que la otra, que eso luego cambie y que sin embargo no haya un punto de encuentro, cosa que sería difícilmente admisible con una hipótesis de continuidad.

Los chicos están movilizados y los argumentos de los pocos que sostienen que hay encuentro los interpelan. Carolina, la niña que citamos al comienzo de este apartado, revisa su punto de vista y lo expresa en la discusión colectiva:

> PROFESORA. ¿Qué es lo que buscan?
> CAROLINA. Nosotros a las horas les fuimos agregando de a una hora o de a media hora para que los precios lleguen a ser iguales.

Se plantean varias cuestiones en el aula. Influidos por los intercambios, los chicos pasan a sospechar que el punto de encuentro existe y analizan cómo hallarlo. Conducidos por la profesora, llegan a encontrarlo al tiempo que analizan ventajas y desventajas de hacer tablas de valores achicando el intervalo, de operar con ecuaciones o de realizar gráficos. Todo constituye una oportunidad para volver sobre ideas que hacían difícil concebir el hecho de que hay un valor en el que la variable tiempo arroja el mismo importe para las dos situaciones.

El docente, gran armador de las ideas que circulan en la clase

La secuencia que concebimos tuvo la intención de constituir un soporte que permitiera desplegar en la clase un conjunto de relaciones –esenciales– que configuran la linealidad. A lo largo de este trabajo fuimos pensando un juego entre nuevas y viejas relaciones en las que señalábamos el aporte de cada problema, aquello que se revisaría, aquello que se reutilizaría. También ofrecimos herramientas para resolver con más holgura lo nuevo. Esta propuesta en la que los estudiantes pueden volver sobre lo ya identificado a través de otros problemas y a la vez avanzar con nuevos conocimientos, de encontrar los límites de lo recientemente instalado para dar sentido a otra idea, de caminar hacia adelante mirando para atrás, de concebir simultáneamente el presente, el pasado y el futuro inmediatos, es lo que nosotros entendemos –lo volvemos a decir– por secuencia didáctica. En otros términos, pensar una trayectoria de problemas está atado a pensar un recorrido que, lejos de ser

12. En la discusión colectiva, muchas intervenciones de los chicos dejan ver la idea de que si se quisieran más valores en el gráfico habría que hacerlo de nuevo, creen que no se pueden agregar al gráfico ya realizado.

lineal, posibilite identificar, revisar, retomar, generalizar, descontextualizar y profundizar las ideas matemáticas constitutivas del objeto de enseñanza. Veamos distintas escenas en las que la docente intercambia con los alumnos a raíz de sus resoluciones y, de distintas maneras, hace referencia a lo ya instituido.

Una idea ya tratada se utiliza para una nueva tarea

Como comentamos en la primera parte de este libro (página 55), en uno de los cursos las profesoras decidieron cambiar los datos del problema del cíber (Problema 5) porque consideraron muy fácil introducir una función con pendiente 1. Esta es la razón por la que en el análisis que sigue, referido a dicho curso, se usan valores distintos a los considerados recientemente.

La profesora solicita a los alumnos escribir las fórmulas correspondientes a las dos situaciones a las que hace alusión el Problema 5. Como resultado de ese trabajo, se registra la siguiente escritura en el pizarrón ($\mathscr{X}$ representa el tiempo de permanencia en el cíber e I el importe a cobrar por dicho tiempo):

$$1^{\text{a}} \text{ opción: } \mathscr{X} * 1{,}50 + 12 = I$$
$$2^{\text{a}} \text{ opción: } \mathscr{X} * 2 + 5 = I$$

Luego se propone graficar la primera opción:

> PROFESORA. Ustedes tienen el gráfico de la segunda opción, ¿hay un crecimiento uniforme?
> ALUMNO 1. Sí, crece siempre igual, es regular.
> ALUMNO 2. Cada hora aumenta 2 pesos.
> PROFESORA. ¿Se acuerdan que habíamos dicho que si el crecimiento es uniforme, el gráfico es una recta? Ustedes sacaron algunos valores del gráfico y buscaron las diferencias, como habían hecho en los otros problemas, ¿pero podrían haber sacado del gráfico directamente los valores que aparecen en la fórmula?
> ALUMNO 2. Sí, arranca en el 5, que es el cargo fijo. Cada 1, sube 2.

Para llegar a la ecuación de la segunda situación, los chicos habían leído algunos pares del gráfico, confeccionado una tabla y operado como lo venían haciendo con los otros problemas. Es decir, la tabla funcionaba para ellos como una representación intermediaria para avanzar a la ecuación. Hasta el momento disponían del pasaje tabla-ecuación y es ese el que utilizan. Luego, la profesora actualiza una idea ya tratada, la equiparación entre variación uniforme y recta, e invita a apoyarse en ella para operar directo con el gráfico, tarea que es nueva para los chicos. A esto responde el Alumno 2 cuando dice "cada 1, sube 2". En algún sentido, la profesora les está comunicando que no es necesaria la intermediación de la tabla y los convoca a renunciar a ella. Los chicos irán asumiendo –seguramente en diferentes momentos– esta nueva modalidad.

Una idea ya tratada se utiliza para economizar un procedimiento

La interacción anterior continúa:

> PROFESORA. La primera opción tenía que ser una recta.
> ALUMNO 2. Sí, a mí me dio una recta.
> PROFESORA. Pero ¿está bien que sea una recta? ¿El crecimiento es uniforme?
> ALUMNO 2. Sí, y arranca del 12.
> PROFESORA. ¿Por qué?
> ALUMNO 2. Porque es la inscripción.
> PROFESORA. Ustedes ubicaron varios puntos, pero si sabemos que es una recta, ¿cuántos puntos necesito ubicar para poder trazarla?
> ALUMNO 2. Dos... Uno, porque arranca del 12.
> PROFESORA. La clase pasada, para saber si era el gráfico de la primera empresa, ustedes dijeron que necesitábamos probar con todos los puntos de la tabla. ¿Ahora me basta con dos?
> ALUMNO 2. Sí, porque con dos se hace la recta.

La profesora insiste en una relación que se está elaborando, la equiparación entre variación uniforme y recta, que primero se actualiza ("¿está bien que sea una recta?") y luego se constituye en punto de apoyo para establecer una nueva relación: si es recta "me basta" con representar dos puntos para determinarla. En este contexto, la expresión "antes ustedes dijeron que necesitábamos... ¿ahora me basta con dos?" subraya el aporte del conocimiento para modificar una estrategia, reconocer otra más económica e instalarla. La *necesidad* de la que habla la profesora es provisoria y su intervención realza que al disponer de nuevos conocimientos, se van modificando los recursos que se consideran necesarios. De manera transversal, está comunicando que el conocimiento transforma aquello que se concibe como condición para abordar una cuestión.

Mirando los dos episodios en conjunto vemos cómo una misma idea es usada para concebir un nuevo procedimiento (operar con la recta) pero también para revisar y economizar uno ya disponible (si sabemos que es una recta, alcanza con graficar dos puntos).

Equiparar las representaciones para luego optar

Usar el gráfico para comparar las dos situaciones no es una acción inmediatamente disponible para todos. La profesora intenta difundirla y para ello se ve en la necesidad de convencer a los chicos de que se puede obtener la información necesaria usando las tres formas disponibles (tabla, ecuación y gráfico). Veamos:

PROFESORA. Ayer algunos decían que mirando el gráfico era fácil decir qué opción convenía en cada caso, ¿les parece?
ALUMNO 1. Sí, la que está más abajo, conviene.
PROFESORA. ¿Por qué?
ALUMNO 1. Porque es más barata.
PROFESORA. Nicolás el otro día decía que había una que era más empinada, más para arriba, ¿cuál sería en este caso?
ALUMNO 2. La segunda opción.
PROFESORA. ¿Por qué será más empinada?
ALUMNO 2. Porque cuesta más cada hora.
PROFESORA. ¿Están de acuerdo? Vamos a decir que tiene mayor pendiente, en lugar de decir más empinada. La otra clase supimos cuál convenía tanteando, haciendo cuentas, ahora vemos que con el gráfico también se puede obtener. ¿Podríamos haberlo sacado con las fórmulas?
ALUMNO 3. Sí, es lo mismo.
PROFESORA. Entonces se puede tanteando con las cuentas, con los gráficos o con las fórmulas.

Para que los chicos se convenzan de que las tres representaciones contienen la información requerida, la profesora invita a que lean en los tres formatos. También se establece que más empinado se relaciona con mayor costo por hora, y que mirar los gráficos reemplaza la realización de cálculos. Como decíamos, la intención de la profesora es mostrar primero que las representaciones son intercambiables para luego elegir el modo que resulta más económico según la tarea. En realidad sabemos que cada forma de representación enfatiza algún aspecto particular y, en este sentido, las representaciones no son completamente equivalentes ni intercambiables. Los chicos irán aprendiendo a elegir en función de la tarea pero, para que esto sea posible, tienen que aprender a leer todas. Así llegamos a reconocer, en el grupo, el valor de suspender momentáneamente la diferenciación de lo que cada forma de representación tiene de específico en aras de lograr una primera familiaridad con las mismas.

Como modo de afianzar estas ideas, la profesora retoma los problemas de los viajes que iniciaron la secuencia para releerlos en términos de las diferentes representaciones posibles:

PROFESORA. Volviendo al problema de las agencias de turismo, ¿se acuerdan de las fórmulas?

$$\mathcal{X} * 4 + 1.000 = I$$
$$\mathcal{X} * 8 + 600 = I$$
$$\mathcal{X} * 6 + 850 = I$$

> [$\mathcal{X}$ representa los kilómetros recorridos e *I* el importe a cobrar por dicha distancia.]
> PROFESORA. ¿Cuál de estas tres será más empinada o con mayor pendiente?
> ALUMNO 1. La segunda, porque el kilómetro valía 8, después la tercera y por último la primera.
> PROFESORA. ¿Podríamos hacer un gráfico aproximado de estas tres?
> ALUMNO 1. Sí, empiece de 600.
> ALUMNO 2. No, de 1.000.
> ALUMNO 1. El cargo fijo más barato era 600.

Avanzada la discusión, y como síntesis de los intercambios realizados en la clase, los chicos hacen una descripción global de los tres gráficos que representarían cada una de las situaciones centrándose en la interpretación de los parámetros. Luego son invitados a trabajar –y por lo tanto a revisar, a modificar– con este grupo de ideas en varias situaciones.

Nos hemos propuesto en este apartado describir al docente en tanto articulador de las ideas que circulan en la clase. Los ejemplos que tomamos ofrecen la posibilidad de precisarla: la relación que invita a establecer de manera permanente entre los problemas, la explicitación de lo que antes no se podía y ahora se puede, de lo que se reutiliza, son aspectos constitutivos de una trama que es esencial para generalizar, descontextualizar y, en suma, inscribir las ideas en una estructura teórica. El análisis nos permite ver plasmado en un caso específico un juego entre *lo viejo* y *lo nuevo* en el que *dejar pendiente* y *retomar* resultan componentes sustantivos en el desarrollo de una secuencia. Estas dos operaciones, a su vez, sirven para repensar la cuestión –tan visitada– del tiempo en la escuela. Emergen así nuevas funciones del docente, poco visibles todavía.

Parte III

Conclusiones

Mirar todo el trabajo en grupo nos permitió apreciar la gran cantidad de pequeñas relaciones que configuran lo lineal, relaciones que afloran en un proceso complejo de múltiples interacciones que requieren de un docente atento simultáneamente a diversos planos. En efecto, tomar en cuenta la historia de las ideas de la clase y el futuro de las mismas, interpretar las propuestas de los estudiantes y concebir intervenciones que contribuyan a su crecimiento, considerar ayudas puntuales frente a dificultades o bloqueos, movilizar mecanismos específicos para alentar la producción de nuevas relaciones y modos de validarlas constituyen parte de la complejidad de la acción docente en el aula.

Lo hemos dicho una y otra vez: nos ubicamos en una posición según la cual las ideas que proponen los chicos a raíz de los problemas que enfrentan son constitutivas del objeto de enseñanza. Acabamos de relatar una experiencia colectiva útil para precisar el significado que esto tiene. Encontramos una clave en un docente que puede enriquecer su basamento conceptual en la discusión colaborativa con sus compañeros para lograr interactuar en la clase. Esta interacción se desarrolla bajo el supuesto de que las propuestas de los alumnos obedecen a razones que es productivo desentrañar –más allá de su validez matemática– porque se apoyan en relaciones que permiten confrontar, comparar, generalizar y pensar sobre lo que se está tratando.

Lograr una genuina interacción en las aulas es, desde nuestra perspectiva, uno de los problemas de enseñanza más difíciles. Su abordaje solicita diferentes niveles de análisis pero no puede eludir problematizar el conocimiento nutriéndolo de muchos más interrogantes de los que históricamente han sido visibles.

La confianza que adquiere un docente que tuvo la oportunidad de enriquecer su perspectiva en la discusión con sus pares a raíz de un proyecto de enseñanza compartido –tanto en su elaboración como en su implementación y análisis posterior– se refleja en el espacio del aula. Y ahí es posible que los chicos se animen, se involucren, produzcan, asuman el desafío, quieran aprender. Consideramos que aprenden cuando son capaces de localizar las relaciones que subyacen a diferentes modos de pensar, cuando rechazan sus resultados por considerarlos inconsistentes por alguna razón, cuando los explican con argumentos propios, cuando reutilizan las relaciones producidas, cuando reconocen las mismas ideas en diferentes formas de representación, cuando retoman alguna cuestión, preguntan acerca de sus dudas e identifican aquello que todavía no comprendieron.

La confianza que logra el docente es clave para alcanzar una convicción cargada de estos sentidos. Lejos de ser un acto de fe, es una construcción realizada al calor de las discusiones, de la colaboración, del sostén de los pares, de la tolerancia a los diferentes puntos de vista, del riesgo de permitirse interrogar lo ya establecido y de aceptar la incertidumbre de lo no experimentado.

LAS VOCES DE TODOS COMO FINAL

Casi al final de nuestra experiencia, cuando ya habíamos llevado a las aulas aquello que habíamos pensado juntos y teníamos motivos para sentirnos genuinamente gratificados, surgió la necesidad de compartir con otros colegas lo que habíamos transitado y contagiarles nuestro entusiasmo. "¿Qué les diríamos a otros?", fue la pregunta disparadora. En aquel momento nos reunimos todos los integrantes del grupo para amasarla y de manera desordenada empezamos a decir y decir. Esas impresiones en borrador, enunciadas entre todos, fueron el germen de este libro y queremos finalizarlo recuperando esas voces.

De entrada, queremos decir...

- Creo que una buena manera de relatarle esta experiencia a compañeros que no participaron es contarles que al principio teníamos mucho miedo y mucha resistencia. Y a la vez teníamos entusiasmo. Parecía que había muchas diferencias entre nosotros pero a medida que avanzábamos fuimos entrando en confianza, animándonos a hablar y encontrando puntos en común.

- Queríamos que los chicos se engancharan y queríamos que pudieran hacer. Con el tiempo nos fuimos dando cuenta de que si podían hacer, se enganchaban.

- Yo creo que teníamos una gran resistencia a hacer algo que no sabíamos cómo iba a salir, cómo se planteaba y que era distinto a lo que veníamos haciendo.

- Uno se siente contenido por el hecho de que no es uno solo que está en todo el salón de clase, éramos dos o tres que estábamos apuntalando.

El trabajo en equipo: convicción, sostén y exigencia

- No solamente discutimos los problemas sino que fuimos viendo distintas maneras en que los alumnos podían abordarlos. "¿Cómo van a resolver esto?", nos preguntábamos todo el tiempo. Nos imaginábamos posibles resoluciones y también discutíamos qué datos poner para alentar la producción de algunas relaciones que queríamos discutir con los pibes.

- Teníamos plan A y plan B. Es un modo de planificar teniendo muy presente la clase. Muchas veces uno planifica con más distancia: dice “les voy a dar estos problemas”, pero no alcanza con seleccionar los problemas para imaginarse la escena de la clase y a uno adentro de esa escena. Pensar en qué podían hacer los chicos nos tranquilizaba y nos animaba porque nos daba herramientas para anticipar qué discusiones podríamos proponer, qué intervenciones hacer.

- Yo creo que esos planes B fueron surgiendo del pesimismo y del optimismo del grupo. Porque si no hubieran estado los pesimistas, no hubiera surgido un plan B, y si no hubieran estado los optimistas, no hubiese habido plan. Eso es lo que te da el trabajo en grupo.

- Los valores que pusimos para la tabla del primer problema no fueron al azar. Cada uno de los datos que propusimos tuvo un por qué. Estuvimos horas discutiendo qué valores poníamos, qué promovía un valor u otro. Esto lo discutimos todos juntos. Nos entusiasmamos, nos dábamos cuenta de que valía la pena.

- Yo me acuerdo, por ejemplo, que cuando estábamos armando la secuencia había preguntas que estaban respondidas en el enunciado del problema. Eso te lo hacía ver otro compañero que te mandaba un *mail* y te lo decía. El hecho de armar con el otro nos ayudaba a ir afinando la puntería en la cuestión de la secuencia.

- Este análisis compartido nos permitió poner de relieve la relación entre los problemas que proponemos y lo que los chicos pueden producir, lo cual establece un lazo más profundo entre el proyecto de enseñanza y lo que vayan a hacer los alumnos. Eso tendría que estar muy subrayado en el documento para los profes que vamos a escribir. Porque ahí hay un cambio, no se trata solo de planificar, hay un cambio en la concepción de la planificación.

- Al principio pensábamos que las cosas eran o no posibles en función de las características de los alumnos que tenemos. Pero al discutir qué harían los chicos frente a los problemas que les plantearíamos empezamos a darnos cuenta de que puede haber muchos recorridos distintos en los que los pibes se pueden involucrar. Esto nos ayudó a entender que las cosas no solo dependen del grupo, sino que dependen mucho de la propuesta. No, la barrera no está en los chicos.

- Yo me quedo pensando en esto de considerar a los pibes. Ya solo el hecho de imaginarse lo que los chicos van a hacer y discutirlo nos habilita a considerarlos distinto. Hay algo que es medio sutil, pero que si vos te pasás analizando dos horas, “no pero si le pongo este número, va a hacer esto, y si le pongo este otro van a hacer tal cosa", me los estoy imaginando en producción. Eso hace que vaya al aula a vincularme con esa producción.

- Hoy hablábamos de las características que tiene que tener la propuesta, porque no puede ser cualquier propuesta, no puede ser cualquier situación. Tiene que ser abierta a que todos los chicos puedan encontrar alguna herramienta o algún camino. Nos decíamos, "si lo resuelven por este lado, intervenimos de tal manera, y si lo resuelven por este otro, planteamos tal cosa". Hay que aceptar todos los caminos o procedimientos.

- En algunos momentos se hizo pesado: es agotador el hecho de estar pendiente de registrar, de documentar, de esa participación tan activa de los chicos. Pero el pensar "yo tengo que ir a dar cuentas a mi grupo de lo que hice", no puedo decir que me cansé y que lo dejé por la mitad, el hecho de tener un grupo que me está apoyando hace que me vea obligada, no puedo ir a Varela y decir "esta semana, chicos, me aburrí, se terminó". Era muy importante tener el grupo como sostén, dar cuenta de lo que había pasado, había una responsabilidad asumida por cada uno de nosotros de ir y plantear lo que había pasado.

La mirada de los otros profes una vez desarrollada la secuencia

- Cuando yo vi en el registro de Silvia que ella había armado en su clase un debate con las resoluciones inconclusas de los chicos y que cada uno de los grupitos fue analizando lo de los otros con tantos argumentos para expresar su acuerdo o descuerdo, inmediatamente lo confronté con lo que había hecho yo. En mi caso el problema se agotó en cada pequeño grupo y cuando planteé el debate había homogeneidad entre los grupos, no había mucho para discutir. Por eso digo que te sirve y enriquece ver cómo trabajó tu compañero, con otra postura, con otra forma de encarar las cosas. Vos replanteás y resignificás todo aquello que hiciste, decís que le podés dar una vuelta más, o no, depende de lo que haya pasado.

¿Observadores en la clase o un equipo de profes sosteniendo la actividad?

- Lo que yo sentí fue que formamos un equipo. Al frente del grupo, dando la clase, estaba el profesor del curso. Pero todos sabíamos qué iba a decir, al punto tal que me parecía que si se hubiera tenido que retirar podría haberlo sustituido sin problemas. También sabíamos qué íbamos a registrar. No sé si hubiera sido productivo que los docentes que estábamos en el aula rotáramos en la tarea de conducir la clase, me quedo con esa pregunta. Armamos un verdadero equipo. Aunque no habláramos, estábamos comunicados. Era una comunicación entablada a través de una conversación que se había iniciado mucho tiempo antes.

- Lo que sí me queda por ahora es el interrogante de si no hubieran estado los otros docentes en el salón, cómo se habría desarrollado. Esa es una pregunta que todavía me queda sin respuesta. El trabajo del observador no solo fue el de observar sino el de marcar presencia en el grupo, los chicos se comportaban de otra manera.

- Sí, pero la presencia de otro aporta una mirada que colabora en repensar la clase.

- Uno se siente contenido por el hecho de que no es uno solo que está en todo el salón. Éramos dos o tres que estábamos apuntalando.

- Hubo días en que estaba Irene, yo estaba observando y notaba algo en el grupo que era obvio que ella, estando al frente de la clase, no lo podía ver. Ahí vos pensás en la cantidad de cosas que se te escapan por la distancia a la que estás, que es la distancia común del salón.

- Yo creo que los chicos después entendieron que cualquiera de nosotros podía estar dando la clase. Me doy cuenta de eso cuando un chico no solamente le pregunta a su docente, cuando no solo te pregunta un alumno del grupito que estás observando sino que el que te tiene más a mano también te consulta. Cuando pasó eso, yo me dije "acá hubo un cambio".

- Ellos (los alumnos) veían que entre nosotros (los profes) había un vínculo, un "llevarse bien", como ellos dicen. Entonces habilitan al que llega de afuera como parte del grupo, creo que pasa por ahí.

La posición de los chicos

- Hicimos una propuesta abierta en la que anticipamos qué recursos podrían mover los chicos, en la que consideramos sus ideas. Pareciera que esa inclusión de las ideas de los pibes los ubicó en una posición diferente, más activa, más dispuesta.

- Los chicos tenían la sensación de que sus ideas eran valoradas. Hay en este trabajo algo del orden de los valores.

- Yo creo que ahí está la clave. No solo quedó en el trabajo con los chicos, quedó trabajo de los chicos. Y esa es la diferencia porque quizá muchas veces no hay trabajo de los chicos. Vos veías la producción, ellos mismos se comprometían mucho más. Les fuese bien o no, trataban de sacar las cosas. Yo vi eso.

- Pero date cuenta que después no solo cambió a nivel grupo de cinco o seis alumnos, sino que creció en el debate áulico. Nosotros muchas veces decimos "que uno pase al pizarrón y los demás revisamos entre todos", pero sabés que la mayoría está mirando por la ventana o está completando algo. Lo que se logró fue que todos estuvieran atentos a ver si el otro grupo había hecho algo distinto, cómo lo había hecho, si se había equivocado.

- Desde el principio, los chicos tuvieron claro que podían apelar a diferentes recursos y que no se estaba esperando una cosa predeterminada.

- Algo que se dio en todos los grupos, en este en particular también, es que cuando obtenían un resultado ilógico los chicos se daban cuenta y lo decían. Yo vi que eso aparece en todos los registros.

- Sí, venían y preguntaban "profe, ¿cómo es esto, lo hice mal?", y ellos mismos empezaban a buscar. Lleva tiempo, creo que a veces lo que nos mata a nosotros es la impaciencia y los malditos tiempos.

- Había chicos que históricamente no tenían ningún avance y en esto se comprometieron, se pusieron a trabajar. Lo que ellos hacían por primera vez era válido para el resto del grupo, no quedaban en el "vos sos el que no sabés, el que no entendés". Vimos esa diferencia en la puesta en el aula y fue bastante importante.

- El hecho de que los chicos aceptaran a los profesores observadores tuvo que ver –y más de uno me lo dijo– con el hecho de que ven nuestro trabajo, ven cómo funcionamos nosotros primero como equipo.

- Se fue instalando un trabajo con la carpeta y junto con eso la idea de que lo ya tratado sirve para pensar lo nuevo.

- Seguramente los chicos no abrieron la carpeta en la casa pero, al participar todos tan activa y comprometidamente, cuando habíamos terminado se acordaban hasta del valor del precio fijo y del precio por kilómetro del primer problema. Se acordaban de cosas muy puntuales porque habían prestado mucha atención.

- La moraleja es que uno cree que los chicos van a hacer tal o cual cosa y, a veces, nos sorprenden. Uno tendría que ir curioso por indagar, a ver qué hacen.

- Los chicos se escuchaban, trataban de entender cómo pensó el otro. Al centrarse en el proceso no se trataba del resultado y los chicos querían discutir.

Acerca del éxito

- El éxito no es que el pibe salga siendo un experto en función, el éxito para mí consistió en que se pudieron incorporar chicos que hubieran quedado marginados de la clase, el éxito fue que todos pensaron, el éxito fue poder construir el grupo de docentes.

- Haber incorporado chicos que se sientan partícipes en la clase de matemáticas, haber podido romper con esa barrera de ser nosotros los que decimos "esto no lo van a poder hacer" o "esto sí lo van a poder hacer" sin probar, sin analizar.

- A mí me parecía que la situación problemática que habíamos preparado era muy elevada o muy ajena a los chicos con los que nosotros íbamos a trabajar. Después vi que ellos la hicieron propia. Surgieron dudas porque estaban aprendiendo y haciendo algo nuevo, pero no porque la situación fuera ajena, como yo había pensado.

Diálogo con un compañero algo escéptico

–Yo creo que en principio, por lo menos en mi caso, era llevar a cabo algo que yo pensaba que no iba a funcionar. Aparte de eso, si yo hubiera sido el profesor que lo daba, me hubiera incomodado tener profesores en el aula, todo ese cambio te da como un miedo, estás yendo en contra de lo que a vos te parece y te cambia toda la costumbre que tenés de dar la clase. Estás acostumbrado a dar lo mismo, de la misma manera siempre, y en el grupo había toda una variedad de opiniones.

–Me interesa eso que decís. Se complica pensar en tener que llevar uno al aula, como el responsable de la clase, algo de lo que no estás convencido. Pero desde la posición que tuviste, que fue participando del equipo y como observador en el aula, ¿ves eso como una cosa intermedia que te ayudó a modificar?

–Sí, solo no lo hubiera hecho. Siempre que termina el año trato de fijarme lo que me parece que funcionó o no, y al otro año cambio o vuelvo, pero utilizo la misma metodología, que no es la que usamos acá. Pero al estar en el grupo...

–¿Podríamos decir que en tu caso, que estabas como más distante de las cosas que se estaban planteando acá, el hecho de participar integrado al grupo pero en condición de observador te permitió acceder a algo que no hubieras estado dispuesto a implementar vos solo?

–Sí, cuando estás como observador se te da la posibilidad de ver otra cosa, ya que quizás estás seguro de eso porque es lo único que hacés, cuánto más conocés o más ves...

–Ahora que ya participaste en este recorrido como observador, ¿eso te da seguridad si de pronto este año lo tuvieras que llevar a tu aula?

–Sí, calculo que sí. Yo cambio mi clase de un año para otro, pero igual me cuesta cambiar.

–Pero tendrías una disposición distinta a la que tenías el año pasado a esta altura, por ejemplo.

–No sé si para llevarlo este año al salón, pero sí participo de otra manera, que es lo que me pasó a mí. Uno ya tiene masticada una cosa y necesita saber o entender todo muy bien para poder llevarlo al aula. No puedo ir y poner algo que todavía no tengo claro.

–Sí, necesitás estar convencido, lo cual tiene su total legitimidad. Eso me parece algo también fundamental, esa convicción uno la va elaborando y, de alguna manera, el grupo es un ámbito donde se pueden ir construyendo otras convicciones. No hay peor enseñanza que aquella que el docente desarrolla sin estar convencido, eso es lo peor que le puede pasar a los chicos.

Bibliografía

Arcavi, Abraham

1994 “Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics”, en *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, nº 3, pp. 24-35. Disponible en: <https://flm-journal.org/Articles/BFBFB3A8A2A03CF606513A-05A22B.pdf>. [Consulta: 21 de septiembre de 2018]

Arsac, Gilbert; Chapiron, Gisèle; Colonna, Alain *et al.*

1992 *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l’appropiation des règles du débat mathématique*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon.

Brousseau, Guy

2007 *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Chevallard, Yves

1997 *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique.

Clot, Yves y Faïta, Daniel

2000 “Genres et styles en analyse du travail. Concepts et méthodes”, en *Travailler*, nº 4, pp. 7-42. Disponible en: <http://psychanalyse.cnam.fr/medias/fichier/texteclot4_1306851012723.pdf>. [Consulta: 20 de septiembre de 2018]

Desgagné, Serge *et al.*

2001 “L’approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation”, en *Revue des sciences de l’*éducation, vol. 27, nº 1, pp. 33-64. Disponible en: <https://www.erudit.org/fr/revues/rse/2001-v27-n1-rse369/000305ar.pdf>. [Consulta: 20 de septiembre de 2018]

Douady, Régine

1986 “Jeux de cadres et dialectique outil-objet”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, nº 2, pp. 5-31.

Duval, Raymond

1995 *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Pieterlen, Peter Lang.

Fernández, Gabriel y Clot, Yves

2007 "Instrumentos de investigación. Entrevistas en auto-confrontación: un método en clínica de la actividad", en *Laboreal*, vol. 3, nº 1, pp. 15-19. Disponible en: <http://laboreal.up.pt/files/articles/2007_07/es/15_19es.pdf>. [Consulta: 20 de septiembre de 2018]

Lacasta, Eduardo

1998 *Las funciones en los gráficos cartesianos*, Madrid, Síntesis.

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne

1993 "Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes 'faibles'", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13, nºs 1-2, pp. 5-118.

2011 "L'ingénierie didactique á l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants", en Margolinas, Claire *et al.*, *En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15e École d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 57-78.

Robert, Aline

2003 "De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée)", en *Didaskalia*, nº 22, pp. 99-116. Disponible en: <http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/23825>. [Consulta: 20 de septiembre de 2018]

Sadovsky, Patricia

2005 *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

2010 "Explicar na aula de matemática, um desafio que as crianças enfrentam com prazer", en *30 olhares para o futuro*, San Pablo, Escola da Vila. Centro de Formação, pp. 233-241. Disponible en: <http://www.vila.com.br/html/outros/2010/revista/30_anos/revista/>. [Consulta: 29 de septiembre de 2018]

Sensevy, Gérard

2007 "Categorías para describir y comprender la acción didáctica", traducción de Juan Duque y revisión de René Rickenmann de "Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique", en íd. y Mercier, Alain, *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des* élèves, Rennes, Presses Universitaires de Rennes. Traducción de

Juan Duque disponible en: <http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/acciondidactica-Sensevy-2007.pdf>. [Consulta: 18 de octubre de 2018]

Vergnaud, Gérard

1990 “La théorie des champs conceptuels”, en *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 10.2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 133-169.

Sobre las autoras

ANA MARÍA ESPINOZA es licenciada en Ciencias Químicas, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Se desempeña como docente e investigadora en el área de enseñanza de las ciencias naturales. Actualmente es profesora consulta de la Universidad Nacional de Luján e integrante de la Secretaría de Cultura y Educación del Sindicato Único de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires (Suteba). A partir del año 2000, su foco de investigación ha sido el papel de la lectura y la escritura en el aprendizaje de las ciencias naturales. En los últimos años se han incorporado docentes a su grupo de investigación, el cual asumió una modalidad de trabajo colaborativo.

PATRICIA SADOVSKY es profesora de Matemática egresada del Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González y doctora en Educación (mención Didáctica de la Matemática) por la Universidad de Buenos Aires (UBA). Es profesora e investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integrante de la Secretaría de Cultura y Educación del Sindicato Único de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires (Suteba). Ha investigado sobre problemas didácticos relativos al álgebra escolar, al sistema de numeración y sobre el papel del análisis de las prácticas en la formación docente. Actualmente su foco de estudio es el de la constitución del trabajo colaborativo entre investigadores y docentes.

u: unipe EDITORIAL UNIVERSITARIA
HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

Suteba Sindicato Unificado de Trabajadores de la Educación de Buenos Aires

En estas páginas, Patricia Sadovsky y Ana María Espinoza le dan una vuelta de tuerca a lo que se supone que deber ser un libro de matemática o, más específicamente, un libro sobre función lineal. Lejos del manual que propone ejercicios para ser aplicados en las aulas, aquí el lector encontrará a un grupo de profesores que debate cómo elaborar una secuencia didáctica, la desarrolla en sus escuelas y se retroalimenta de las ideas muchas veces imprevistas que elaboran sus estudiantes. Se trata, en resumen, de mostrar que tanto profesores como estudiantes son capaces de producir conocimiento cuando se generan las condiciones para ello. *Pensar con otros la clase de matemática* surgió de un proyecto de trabajo colaborativo entre docentes bonaerenses coordinado por las autoras a partir de una convocatoria de Suteba. La aparición de este libro es un intento de comunicar a otros colegas aquello que esa experiencia tuvo de conmovedor, de enriquecedor y de vital.

ISBN 978-987-3805-52-3
9 789873 805523

editorial.unipe.edu.ar