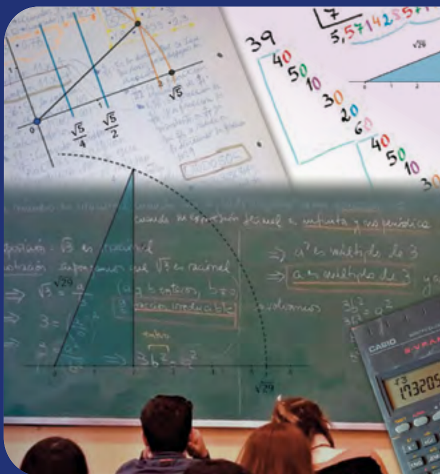


# LOS NÚMEROS REALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

*Una secuencia posible*

**Betina Duarte**
**(coordinadora)**

OEI

unipe
editorial
universitaria

HERRAMIENTAS
SERIE MATEMÁTICA

>>

Los números reales
en la escuela secundaria

# Los números reales en la escuela secundaria

*Una secuencia posible*


**Betina Duarte (coordinadora)**

Carolina Benito
Analía Bergé
Mara Cedrón
Betina Duarte
Romina Herrera
Cecilia Lamela
Cecilia Montes de Oca
Graciela Morales
Mauro Rey



unipe editorial universitaria | HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA

OEI

Los números reales en la escuela secundaria: una secuencia posible / Carolina Benito... [et al.]; coordinación general de Betina Duarte - 1a ed.- Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria; Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura -OEI, 2023.
Libro digital, PDF - (Herramientas. Matemática; 7)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-3805-79-0

1. Matemática. 2. Números Reales. 3. Material Auxiliar para la Enseñanza. I. Benito, Carolina. II. Duarte, Betina, coord.

CDD 510.712

UNIPE: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Carlos G.A. Rodríguez
*Rector*

Ana Pereyra
*Vicerrectora*

UNIPE: EDITORIAL UNIVERSITARIA

*Equipo editorial*: Juan Manuel Bordón, María Teresa D'Meza, Diego Herrera, Mariana Liceaga, Julián Mónaco y Diego Rosemberg

*Diseño y diagramación*: Diana Cricelli

COLECCIÓN HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA
Los números reales en la escuela secundaria. Una secuencia posible

© De la presente edición, UNIPE: Editorial Universitaria, 2023

Piedras 1080 (C1070AAV)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

www.unipe.edu.ar

Consultas: editorial.universitaria@unipe.edu.ar

1ª edición, julio de 2023

Se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento o la transmisión de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, siempre que:

- se reconozca la autoría de la obra original y se mencione el crédito bibliográfico de la siguiente forma: Betina Duarte (coord.) *et al.*, *Los números reales en la escuela secundaria. Una secuencia posible*, Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria-OEI, 2023;
- no se modifique el contenido de los textos;
- el uso del material o sus derivados tenga fines no comerciales;
- se mantenga esta nota en la obra derivada.

ISBN 978-987-3805-79-0

# Índice

# Introducción

Desde el comienzo de la escolaridad la recta se propone a los alumnos como punto de apoyo para la representación de los números. Allí se encuentran, más o menos presentes, más o menos escondidos, los números reales. Nuestras experiencias personales como docentes de matemática del nivel secundario y superior nos advierten acerca de la vastedad de cuestiones que comporta comprender las características de los números reales. Interesadas en esta problemática, en el año 2017 formulamos un proyecto de investigación PICTO en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) con el propósito de comprender bajo qué condiciones didácticas –para el aula e institucionales– podemos ofrecer una propuesta de enseñanza que contribuya a una conceptualización de los números reales que movilice las nociones de orden, densidad y del continuo. Este proyecto se desplegó, pandemia mediante, durante el período 2018-2022 y para su desarrollo formamos un equipo de investigación entre docentes de la universidad y docentes del nivel secundario.

Partimos de la premisa de que el concepto de número real se construye a través de procesos infinitos, límites y, también, a través de la representación continua sobre la recta. Estas nociones, si bien son tratadas en la escuela secundaria, no terminan de ser abordadas con la profundidad necesaria para poder sostener la comprensión del número real. El conocimiento que los alumnos puedan desarrollar sobre este campo numérico a propósito de sus representaciones, sus características y propiedades, entre ellas la densidad, sienta la base para un conjunto –los reales– que es parte tanto de la matemática de la escuela secundaria bajo la forma de dominio de las funciones más usuales, como de la educación superior en los procesos infinitos que constituyen el núcleo de nociones fundamentales para el cálculo y el análisis matemático. Algunas de estas nociones del cálculo forman parte de la modalidad técnica de la educación secundaria.

Para llevar adelante la investigación diseñamos una secuencia de enseñanza en cuyo inicio se recuperan algunas cuestiones sobre los racionales y luego se avanza hasta presentar las ideas de densidad en los irracionales y en los reales. Esta secuencia es producto de un trabajo colaborativo con docentes de escuelas secundarias de la Ciudad y la Provincia de Buenos Aires. Nos propusimos concebir un conjunto de situaciones que desnaturalicen cuestiones ya naturalizadas por la enseñanza, como la idea de continuo, para así construir con sentido el significado de los reales. Dado que los reales no son "atrapables" por situaciones que involucren la utilización de instrumentos de medida o la lectura de fenómenos físicos, es preciso considerar problemas intramatemáticos para producir una génesis artificial de estos conceptos y constituirlos en objetos teóricos de indagación. Asimismo, las necesarias cuestiones de representación en torno tanto a racionales como a irracionales fueron elaboradas a través de problemas que precisaron de un cierto posicionamiento teórico acerca de este conjunto numérico, de su definición y de sus propiedades y del lugar que ocupa dentro del saber matemático organizado.

Este libro es fruto de una experiencia de estudio, experimentación, diseño y producción de actividades, elaboración de preguntas sobre la vida que los números reales pueden cobrar en el aula de la escuela secundaria y también, claro, nuestra personal confrontación con la comprensión que teníamos al inicio sobre esta problemática y la que ha devenido de esta tarea muchas veces "infinita". Está dirigido a la comunidad docente de las escuelas secundarias de nuestro país. Pretende ser un aporte para la labor de los y las docentes que se topan a diario con muchas barreras de distinta índole frente a la enseñanza de los "reales". Albergamos la esperanza de lograr una contribución en este sentido.

Para el diseño de las actividades, nos propusimos recorrer un camino que comienza por sensibilizar a la clase acerca de algunas cuestiones:

- ¿Cómo sabemos fehacientemente que estamos frente a un racional?
- ¿De cuántas formas distintas podemos representar a un determinado número?
- ¿Qué sabemos del tratamiento que realiza la calculadora acerca de los números decimales y su representación?

Estos son solo algunos ejemplos ilustrativos. Este punto de partida se organiza generando preguntas, exploración y un registro de conjeturas. El avance se despliega apoyado en la resolución de problemas y la producción de conclusiones que, a su vez, se elaboran en vínculo con los problemas resueltos y también con el proyecto de enseñanza; este proyecto tiene un norte, que es la producción de teoría acerca de los números reales en el aula. Como parte de esa producción de teoría en el aula, y a modo de conclusión, proponemos que los y las estudiantes puedan compartir y consolidar nuevas ideas en torno a los números reales.

Como decíamos, se trata de un texto colectivo producto de una experimentación en clases de características diversas, en escuelas de distinto tipo y con estudiantes con variedad de vocaciones. La implementación fue desarrollada entre los años 2018 y 2019, con jóvenes de 15 a 17 años, en aulas de la Ciudad y la Provincia de Buenos Aires, tanto en escuelas de gestión estatal como privada. Antes de las implementaciones mantuvimos reuniones de trabajo con los y las docentes que ofrecían sus aulas, a quienes presentamos las ideas centrales y con quienes discutimos propuestas de enseñanza en un vínculo de confianza y respeto, escuchando sus intereses y produciendo todos los cambios considerados necesarios. De este modo, apostamos a que la propuesta a implementar pudiera ser sostenida por cada docente para cada grupo de estudiantes. Hemos codiseñado algunas partes de la secuencia, aunque el primer borrador fue desarrollado por el grupo de investigación. Finalizada la implementación –y ya durante la pandemia– nos dedicamos a producir este texto trabajando para ello en forma colaborativa, invitando nuevamente a cada docente en cuya aula se había implementado la secuencia a desarrollar un documento dirigido a colegas con la intención de que sus experiencias pudieran ser tomadas por otros y otras. Las discusiones posteriores a la implementación colaboraron en la reflexión acerca de la complejidad de este conjunto numérico y su estudio.

Las actividades que proponemos tienen en cuenta algunas cuestiones que nos interesa señalar aquí como punto de partida y que se retomarán a lo largo del documento:

- La vida escolar de los números hace que las expresiones decimales finitas sean utilizadas por los y las estudiantes con preferencia a otras representaciones. Haremos referencia a esta cuestión en el capítulo 1, destinado a los racionales.
- Hemos habilitado el uso de la calculadora en todas las actividades. Tal como lo explicamos en la introducción del capítulo 1, su uso nos permite discutir los límites de la calculadora para distinguir y anticipar desarrollos decimales finitos e infinitos. En diálogo con estas discusiones se genera la necesidad de recurrir a ideas teóricas o a técnicas –por ejemplo, la división a mano entre dos números enteros– para interpretar la información del visor. También incluimos en nuestra propuesta el papel de la calculadora para dar lugar y sentido a la conceptualización de los irracionales.
- Las leyes de formación han resultado un gran motor didáctico para que los y las estudiantes estén en condiciones de experimentar produciendo distintos tipos de números racionales e irracionales. Creemos que esto combate un estado del conocimiento de los reales señalado por variadas investigaciones: para los y las estudiantes que finalizan la educación secundaria, los números irracionales son raros y pocos. Estas leyes de formación funcionan en la escritura decimal de los números que son, como ya dijimos, un modo de escritura muy aceptado en la escuela.
- Decidimos dar vida a la demostración en el aula. Lo hemos pensado para las raíces de primos, ya que la demostración que proponemos para la irracionalidad de $\sqrt{3}$ puede adaptarse para demostrar la irracionalidad de

toda una familia de números, hecho no frecuente en la matemática (nos referimos a reutilizar una demostración en otros enunciados). El capítulo 3 se encarga de esta cuestión. Creemos que este capítulo puede resultar exigente en algunas clases e invitamos a cada docente a leerlo críticamente y considerar posibles adaptaciones.

- El estudio de "la recta numérica", propuesto en el capítulo 4, procura poner la lupa en este objeto matemático preguntándonos por la relación entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales, relación que muchas veces se encuentra mediada por diversas interpretaciones que fueron construyendo los y las estudiantes a lo largo de su escolaridad. A su vez, proponemos encontrar métodos que permitan ubicar una familia infinita de números irracionales en la recta numérica, lo que abonará aún más a cuestionar la idea antes mencionada de que los irracionales son raros y pocos.
- La densidad de distintos subconjuntos de reales (racionales, irracionales o, también, algunas familias particulares de irracionales) es la última cuestión que creímos viable explorar en el nivel de la escuela secundaria. La densidad y las expresiones decimales infinitas son nociones que, a nuestro modo de ver, se nutren y enriquecen mutuamente. En efecto, crear expresiones decimales finitas e infinitas comprendidas entre dos números dados es un soporte para abordar la pregunta general acerca de si hay o no infinitos números para intercalar entre otros dos. De manera inversa, abordar preguntas sobre la densidad genera un espacio para profundizar el estudio de las expresiones decimales infinitas (periódicas o no) y trabajar las dudas o los conflictos que aporta la infinitud involucrada en dichas expresiones.

Todas las actividades propuestas tienen en cuenta una dinámica según la cual existe un primer momento de trabajo de los y las estudiantes en pequeños grupos que da oportunidad a cada docente a registrar qué tipo de procedimientos se hacen presentes en su clase. Este insumo resulta esencial para luego comandar un segundo momento de trabajo al que solemos mencionar en el texto como “momento colectivo”.

Para finalizar, quisiéramos agradecer a las escuelas que nos recibieron: Escuela Superior de Comercio Carlos Pellegrini (CABA), Colegio de la Ciudad (CABA), Escuela ORT sede Almagro (CABA), Escuela de Educación Secundaria Técnica Nº 2 “Santiago de Liniers” (Ensenada) y Colegio Nacional Nº 5 DE 2 “Bartolomé Mitre” (CABA). En especial, agradecemos a los y las estudiantes que se brindaron a la propuesta, dejándonos conocer un poco más acerca de sus ideas.

También agradecemos a Sandra González y Carla Cabalcabué, quienes nos acompañaron en algunos momentos de la producción de esta investigación, asumiendo distintas posiciones y siempre interesadas en la búsqueda de caminos virtuosos para comprender los fenómenos del aula; y a Patricia Sadovsky y Abraham Arcavi, que nos escucharon, alentaron y aconsejaron en los primeros bosquejos de la investigación.

No nos olvidamos de los y las docentes que nos ofrecieron sus aulas, participaron de la producción de la secuencia de enseñanza, compartieron inquietudes al entrar a cada clase y luego impresiones al salir de cada una de ellas, grabando audios, sacando fotos, registrando actividades. También leyeron nuestros escritos, se tomaron el tiempo y el trabajo de producir este documento en forma consensuada, colaborativa, compartida, sumergiéndose en sesiones intensas de lectura y discusión de ideas, de producción y análisis de argumentos. Nos hacen saber que siguen experimentando en sus clases y que las cuestiones que han sido registradas en este escrito tienen vida propia. Sin orden alguno, y reconociendo que son parte de los y las autoras de este texto, agradecemos a Carolina Benito, Graciela Morales, Mauro Rey y Cecilia Montes de Oca.

Ahora sí, esperamos que la lectura de este documento contribuya a mirar a este conjunto numérico, los reales, con entusiasmo y fascinación. Esta ha sido nuestra experiencia.

CAPÍTULO 1

# Números racionales

## LA REPRESENTACIÓN DE LOS RACIONALES COMO PUNTO DE PARTIDA

Proponemos iniciar con problemas en los que los y las estudiantes puedan comunicar sus conocimientos y creencias sobre los números racionales, poniendo en juego las **distintas escrituras posibles del número racional**. En particular, y teniendo en cuenta el proyecto global de la secuencia, necesitamos que al finalizar este capítulo las diversas formas de representar a los racionales –las expresiones decimales y las fracciones– estén disponibles. Incluso, será objeto de estudio en este capítulo[1] una cuestión cuyo enunciado adquiere la siguiente generalidad:

> *Toda fracción se puede representar por una expresión decimal, finita o periódica. Y toda expresión decimal, finita o periódica, se puede representar por una fracción.*

Las primeras actividades de este capítulo permitirán poner en discusión ideas que los y las estudiantes seguramente han abordado en otros momentos de

1. A lo largo de este capítulo, escribiremos **en negrita** aquellas palabras o frases que deseamos destacar; y *en cursiva*, ciertas ideas pensadas para que los o las docentes las compartan con la clase de forma oral o escribiéndolas en el pizarrón.

su escolaridad, así como reformular otras que permitirán arribar a la propiedad general mencionada. Por ejemplo, los y las estudiantes seguramente han desarrollado diversas técnicas para encontrar una fracción que represente a una expresión decimal finita o periódica, así como para encontrar la expresión decimal de una fracción. Sin embargo, ese trabajo desplegado en otro momento puede no ser suficiente para que conciban una generalidad. Creemos que es un asunto de enseñanza ponerla de relieve. Esta idea nos va a permitir, luego, establecer que:

> *Cuando la expresión decimal de un número tiene infinitas cifras decimales, pero no tiene un período, no es posible escribirla como fracción.*

Las **calculadoras**[2] disponibles en el aula jugarán un papel importante poniendo en duda aquello que se puede saber respecto a una expresión decimal. Si un posible período no aparece en el visor de la calculadora o si el visor está lleno de cifras decimales, ¿será que no tiene período?, ¿será que las cifras decimales son infinitas?, ¿será que el período no se atrapa en lo que muestra el visor de una determinada calculadora? Parte de la propuesta docente consistirá en cuestionar la confianza –a veces absoluta– que se tiene en la respuesta que cualquier calculadora ofrece ante un cálculo para poder conocer en forma completa la expresión decimal de una fracción. La disponibilidad de distintos tipos de calculadoras, con la consecuente obtención de diversas respuestas, dará una oportunidad para que los y las docentes puedan analizar las posibles lecturas de estos resultados.

Con el propósito de interpretar la respuesta que las calculadoras ofrecen al realizar "numerador ÷ denominador" para encontrar la expresión decimal de una fracción, se propondrá, por ejemplo, recurrir a la **cuenta de dividir a mano**, la cual nos permite determinar con certeza su expresión decimal. En

2, En esta secuencia nos referimos tanto a calculadoras científicas, disponibles en muchos establecimientos escolares para que las usen sus estudiantes, como a las aplicaciones descargables de los teléfonos celulares.

capítulos consecutivos, esta técnica será cuestionada al proponer encontrar la expresión decimal de $\sqrt{3}$. La imposibilidad de tener un método, como en el caso de las fracciones, constituye una oportunidad para instalar la duda acerca de qué características tiene su expresión decimal.

El juego entre el uso de la calculadora, la cuenta hecha a mano y la expresión decimal de una fracción permite plantear un vínculo entre la mirada "práctica" de los números racionales y la mirada "teórica" sobre ellos.

Otra cuestión que consideramos necesario desplegar acerca de los números reales en general –en esta instancia, a propósito de los racionales– es la densidad. Para ello, se propone elaborar preguntas e ideas acerca de esa **propiedad de densidad**. Se trata de un aspecto teórico del contenido: la idea de que hay infinitos números racionales entre dos racionales dados involucra preguntas y argumentos que precisan y proponen una posición reflexiva por parte de las y los alumnos.

La idea de densidad se pondrá en juego y se ampliará al estudiar los números irracionales, donde el estudio también involucrará una posición teórica por parte de los y las estudiantes.

## SECCIÓN 1: RELACIÓN ENTRE EXPRESIÓN DECIMAL Y FRACCIÓN

Durante estas actividades vamos a querer recuperar y ampliar ideas sobre esta relación. Un asunto que los y las estudiantes han desarrollado durante su escolaridad será retomado: la expresión decimal de una fracción se obtiene al calcular "numerador ÷ denominador". Esto no se trabajará explícitamente, pero estará atravesando los problemas al estudiar *cómo puede ser la expresión decimal de una fracción.*[3]

3. Advertimos que no es la intención de esta propuesta que los estudiantes puedan anticipar si el desarrollo decimal de una fracción determinada será del tipo finito o infinito.

En las prácticas escolares consolidadas, los y las estudiantes utilizan los números de un modo "práctico" (para medir, comparar, ordenar, etc.), incluso en actividades netamente matemáticas. Esto significa, entre otras cosas, que se identifican números por el desarrollo que tengan hasta dos cifras decimales. Considerando eso, en estas dos primeras actividades nos proponemos revisar las diferencias entre valor aproximado y valor exacto de un número. Además, buscamos abordar la siguiente relación:

*Toda fracción se puede representar por una expresión decimal finita o periódica. Y toda expresión decimal finita o periódica se puede representar por una fracción.*

ACTIVIDAD 1

Decidan cuál o cuáles de estas expresiones para $x$ cumplen la siguiente igualdad. Para cada una de las expresiones expliquen por qué sí o por qué no cumple la igualdad.

$$11 \times x = 4$$

a) $0,\ 36$

b) $\frac{4}{11}$

c) 0,36363636364

d) 0,363636363636

e) $0,\widehat{36}$

f) $\frac{8}{22}$

g) $\frac{11}{4}$

## Intención general de la actividad 1

Aunque no esté preguntado de este modo, con esta actividad nos proponemos abordar cuál es la expresión decimal de la fracción $\frac{4}{11}$ y recuperar un conocimiento que seguramente ya fue parte de otros aprendizajes: "$\frac{a}{b}$ es un resultado de $a \div b$".

Propiciamos en este problema el uso de la calculadora ya que, de este modo, para decidir sobre el resultado de la cuenta $4 \div 11$ será necesario poner en discusión la información que da la calculadora sobre ese resultado y recuperar las ideas que las y los alumnos tengan sobre este número y sus distintas escrituras.

Consideramos dos modos de resolución posibles en la clase:

- Encontrar la solución de la ecuación despejando y hallar una expresión para $x$ como $\frac{4}{11}$ o como el resultado de la cuenta $4 \div 11$. Luego, analizar cada $x$ propuesto, comparándolo con el valor hallado al despejar la igualdad y efectuando la cuenta $4 \div 11$, o bien expresando la solución con la fracción $\frac{4}{11}$.
- Chequear cada valor en $x$ y controlar si el producto $11 \times x$ arroja el resultado 4.

Al buscar el valor de $x$ partiendo de la división $4 \div 11$, una alumna o alumno podrá leer directamente el resultado que ofrece la calculadora, el cual dependerá de los decimales que el visor de la calculadora muestre (o el que se lea al utilizar alguna aplicación disponible para celular). Así, algunos estudiantes que utilizan calculadoras científicas con diez dígitos podrán elegir las opciones c) y d). Otros estudiantes podrían truncar en dos cifras decimales estos mismos resultados del visor, optando por la opción a). Algunos pueden responder varias opciones con expresiones decimales como d) y e), interpretando que el inciso d) es “otra forma” que tiene la calculadora de escribir algo periódico.

Existen algunas aplicaciones de calculadoras para teléfono celular que permiten recorrer las cifras decimales del resultado deslizando el dedo sobre el visor. Pensamos que esta acción de deslizar, con la cual la calculadora sigue dando dígitos, contribuye a que los alumnos y las alumnas consideren que la calculadora muestra “infinitos” dígitos.

## Cuestiones a desarrollar en el espacio colectivo

A partir de las resoluciones de los y las estudiantes, proponemos validar distintas respuestas al problema. Esta actividad de validación nos permitirá poner en discusión ideas acerca de los números, las expresiones decimales y las fracciones (en este caso para $\frac{4}{11}$).

Para comenzar, creemos que algunos estudiantes propondrán al $\frac{4}{11}$ que aparece en el listado ofreciendo como validación el hecho de que la fracción verifica la ecuación, esto es:

$$\frac{4}{11} \textit{ es la solución porque } 11 \times \frac{4}{11} = 4$$

También podrían haber llegado a la fracción $\frac{4}{11}$ a través del despeje de la ecuación, en cuyo caso el propio despeje funciona de validación.

Para cada una de las expresiones decimales, puede haber posiciones distintas en la clase. Nos interesa que estas posiciones se escuchen, comprendan e interpreten. De este modo, consideramos valioso tomar en el espacio colectivo las razones por las cuales las y los estudiantes aceptan o no como resultado los distintos números propuestos. Veamos en qué pueden sustentarse algunas de estas razones para números como 0,36; 0,36363636364 o 0,363636363636. El análisis que las y los estudiantes realicen sobre cada uno de estos números puede apoyarse en vincularlo con el resultado que encuentran de $4 \div 11$ o en el resultado que se obtiene al multiplicar al número por 11. En ambas estrategias estará en juego lo que muestra la calculadora sobre la cuenta realizada (ya sea la división $4 \div 11$ o el producto del número en cuestión por 11). También se pondrá en escena cómo las y los estudiantes interpretan las informaciones obtenidas en función de sus concepciones sobre los números.

Para tener más elementos para interactuar con las ideas que pueden surgir en la clase, pueden explorarse los instrumentos que manejan las y los estudiantes. Por ejemplo, consideremos posibles explicaciones que pueden surgir en relación con el número 0,363636363636, considerando el resultado de

11 × 0,363636363636. Dependiendo de la calculadora utilizada, podrían encontrar que el resultado no es 4 o que sí lo es. Una calculadora común de celular, que admite poner diez cifras después de la coma, ofrece 3,9999999996 como resultado del producto 11 × 0,3636363636. Sin embargo, una calculadora Casio fx-570ES, con doce cifras decimales, muestra 4 como resultado.

Además, se ponen en juego las interpretaciones que sobre estos resultados se realicen. Por ejemplo, algunos o algunas estudiantes podrían aceptar ese número propuesto considerando que la cuenta "da casi 4".

Si aparecieran en clase estos distintos resultados y posiciones sobre ellos, se puede proponer en el espacio colectivo hacer *a mano la cuenta de multiplicar por 11 y ver que no da 4. Por ejemplo, en el caso de 11 × 0,363636363636 la cuenta a mano da 3,9999999996.*

El contraste entre la cuenta a mano y los resultados que distintas calculadoras dan de la cuenta (11 × la expresión en cuestión) funcionará como apoyo para analizar cada número ofrecido. El recurso de la cuenta a mano podrá ser ofrecido por el docente o la docente. Luego, los y las estudiantes tendrán que elegir entre estas opciones adoptando algún criterio.

Así como prestamos atención a las concepciones que tienen los y las estudiantes en relación con los números en general, con los números racionales en particular, con la lectura de información de la calculadora y con las nociones de valor aproximado y valor exacto, consideramos que también interviene en esta instancia la idea que se tiene de qué resulta admisible como solución de una ecuación. Nos interesa comprender y tener en cuenta: ¿qué idea tienen construida acerca de cómo puede ser la solución de una ecuación? Muchas veces, en la práctica escolar, las soluciones y los números involucrados en las ecuaciones que se proponen son enteros o fracciones/decimales "amigables". Se genera entonces un acuerdo implícito en la clase por el cual un resultado extravagante genera sospechas. En esta propuesta de enseñanza, los resultados "extravagantes" estarán en el centro del estudio y es posible que esta primera actividad instale la necesidad de prestarles atención en igualdad de condiciones.

El análisis de la expresión $0{,}\widehat{36}$ como solución de la ecuación puede traer otras cuestiones. Habrá estudiantes que consideren, a partir de las finitas cifras que observan en visores como resultado de la división $4 \div 11$, que $0{,}\widehat{36}$ es la expresión decimal de esa fracción. Pero otros u otras podrán poner en duda este hecho. A su vez, existen calculadoras que, ante la cuenta $4 \div 11$, muestran como resultado la escritura $0{,}\widehat{36}$. Quienes utilizan su calculadora para evaluar los valores posibles de $x$ en la ecuación, necesitan considerar cómo ingresar el número periódico en la calculadora.

Quizás haya quien apele a técnicas conocidas para encontrar una fracción que represente al número $0{,}\widehat{36}$, y a partir de la fracción pueda verificar si es solución de la ecuación o compararla con $\frac{4}{11}$ (en caso de que ya se disponga que $\frac{4}{11}$ es solución de la ecuación). De este modo, podría aparecer otra expresión fraccionaria de la solución: $\frac{36}{99}$ .

Se espera que quizás sean conocimientos reelaborados los que permitan comprender tanto lo que puede afirmarse sobre cada expresión como los límites de las informaciones que pueden obtenerse en algunas calculadoras.

Hay algunas discusiones que están en el centro de la escena frente a estas estrategias:

- ¿Cuál es la expresión decimal de $\frac{4}{11}$ ?
- ¿Cuál es el resultado de la cuenta $4 \div 11$? Ese resultado puede expresarse a través de una expresión decimal o a través de fracciones (el análisis de las opciones $\frac{4}{11}$ y $\frac{8}{22}$ , y eventualmente la emergencia de $\frac{36}{99}$ , lleva a ver que esa fracción no es única).

Para avanzar hacia la expresión decimal de $\frac{4}{11}$, y dependiendo de los conocimientos disponibles, podría servir de apoyo:

- Analizar la equivalencia entre $\frac{4}{11}$ y $\frac{36}{99}$ si surgiera la fracción $\frac{36}{99}$ como expresión fraccionaria de $0{,}\widehat{36}$.
- Realizar junto a toda la clase la cuenta a mano de $4 \div 11$ para terminar de dirimir que su expresión decimal es periódica. Recurrir a esta

técnica permite atrapar una secuencia de restos que se repiten de modo indefinido y que dan lugar a que se repitan, por ende, las cifras del cociente.

En algunas experiencias fueron necesarios estos argumentos, pero en otras no trajo dudas el hecho de que la expresión decimal de $\frac{4}{11}$ es $0,\widehat{36}$. En cambio, sí fue necesario desplegar ideas y argumentos para descartar las otras expresiones decimales.

Como ya mencionamos, sobrevuelan preguntas acerca de cómo se opera en la calculadora con un número periódico como el $0,\widehat{36}$. ¿Cómo se ingresa un número periódico a la calculadora? ¿Cómo se sabe que la calculadora está mostrando un número periódico? Será necesario analizar diferentes tipos de calculadoras y cómo éstas operan con números periódicos.

Otra cuestión a decidir, para cada aula, es cómo se organiza el espacio colectivo a partir de las distintas propuestas de los grupos: qué producciones se comparten y cómo se consideran a partir de ellas estas cuestiones que estamos desarrollando.

Un último asunto que se podría incorporar al diálogo del momento colectivo es la posibilidad de diferenciar las expresiones 0,36; 0,36363636364; 0,363636363636 y $0,\widehat{36}$ apoyándonos en el orden: 0,36 es menor que 0,36363636364, mientras que 0,363636363636 es menor que $0,\widehat{36}$ y 0,36363636364 es mayor que 0,363636363636. El orden de los números permite distinguirlos, y aceptarlos en calidad de distintos, mientras que las fracciones $\frac{4}{11}$ y $\frac{8}{22}$ son iguales ya que representan al mismo número. Es un buen contexto para concluir que todos esos números son aproximaciones de $0,\widehat{36}$.

Este tipo de discusiones permite incorporar al análisis un enfoque teórico, puesto que en la práctica, para los y las estudiantes funcionan como "lo mismo". Así, 0,36 es una expresión "reducida" de 0,363636363636 o bien de $0,\widehat{36}$ que se usa para dar respuestas en algunos problemas de exámenes o en otras ocasiones.

## Conclusiones para registrar al finalizar de la actividad 1

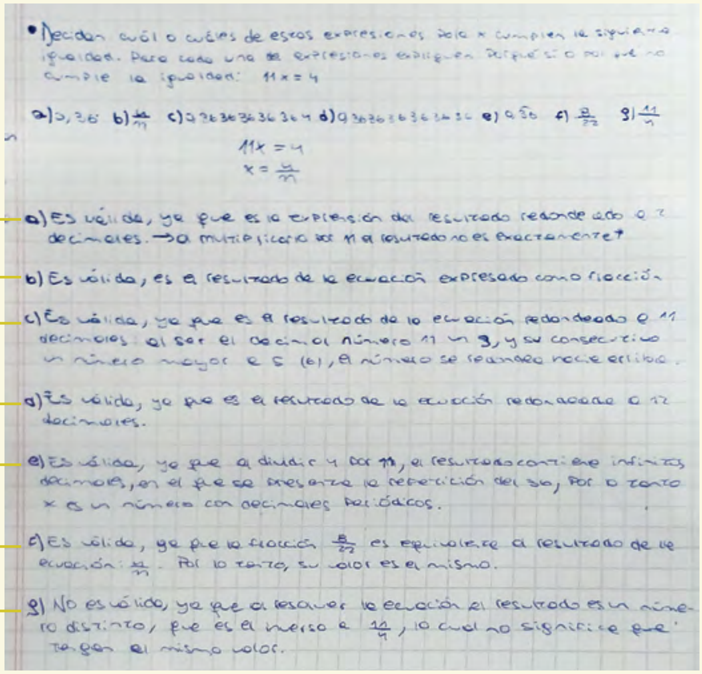
Las cuestiones debatidas por la clase pueden quedar registradas a modo de conclusiones o de ideas provisorias. Consideramos que el registro escrito permite hacer avanzar estas ideas. Ofrecemos algunas conclusiones (las cuales tendrán variantes según el debate desarrollado en cada clase):

- Para encontrar la expresión decimal de $\frac{4}{11}$ realizamos $4 \div 11$ y vimos que en esa cuenta de dividir se repiten los restos 4 y 7, lo cual hace que se vayan repitiendo 3 y 6 en su expresión decimal. Por lo tanto, $\frac{4}{11} = 0{,}\widehat{36}$.
- Hay un único número que cumple la igualdad $11 \times x = 4$. Se puede expresar como $\frac{4}{11}$ (o $\frac{36}{99}$ u $\frac{8}{22}$, entre otras representaciones como fracción) o con una expresión decimal: $0{,}\widehat{36}$.
- Los números 0,36; 0,36363636364 y 0,363636363636 son aproximaciones de $0{,}\widehat{36}$.
- Distintas calculadoras muestran diferentes expresiones decimales como resultados de la cuenta $4 \div 11$.
- En algunas calculadoras no es posible ingresar números periódicos en su expresión decimal.

## Análisis de producciones del aula sobre las representaciones de $\frac{4}{11}$

Analizamos producciones de estudiantes (imágenes 1 a 4) que dan cuenta de los procedimientos utilizados: en algunos casos resuelven la ecuación y a partir de allí comparan con las opciones dadas; en otros toman las opciones dadas y evalúan si cumplen la ecuación. Observamos la interpretación de la solución a partir de considerar valor aproximado y valor exacto, así como la veracidad asociada al uso de la calculadora.

1



• Decidan cuál o cuáles de estas expresiones para x cumplen la siguiente igualdad. Para cada una de expresiones expliquen por qué sí o por qué no cumple la igualdad: 11x = 4

a) 0,36 b) $\frac{4}{11}$ c) 0,36363636364 d) 0,363636363636 e) 0,$\overline{36}$ f) $\frac{8}{22}$ g) $\frac{11}{4}$

$$11x = 4$$
$$x = \frac{4}{11}$$

a) Es válida, ya que es la expresión del resultado redondeado a 2 decimales. → al multiplicarlo por 11 el resultado no es exactamente 4

b) Es válida, es el resultado de la ecuación expresada como fracción

c) Es válida, ya que es el resultado de la ecuación redondeado a 11 decimales: al ser el decimal número 11 un 3, y su consecutivo un número mayor a 5 (6), el número se redondea hacia arriba.

d) Es válida, ya que es el resultado de la ecuación redondeado a 12 decimales.

e) Es válida, ya que al dividir 4 por 11, el resultado contiene infinitos decimales, en el que se presenta la repetición del 36, por lo tanto x es un número con decimales periódicos.

f) Es válida, ya que la fracción $\frac{8}{22}$ es equivalente al resultado de la ecuación: $\frac{4}{11}$. Por lo tanto, su valor es el mismo.

g) No es válido, ya que al resolver la ecuación el resultado es un número distinto, que es el inverso a $\frac{11}{4}$, lo cual no significa que tengan el mismo valor.

a Es válida, ya que es la expresión del resultado redondeado a dos decimales ⇨ al multiplicar por 11, el resultado no es exactamente 4.

b Es válida, es el resultado de la ecuación expresada como fracción.

c Es válida, ya que es el resultado de la ecuación redondeado a 11 decimales: al ser el decimal número 11 un 3 y su consecutivo un número mayor a 5 (6), el número se redondea hacia arriba.

d Es válida, ya que es el resultado de la ecuación redondeando a 12 decimales.

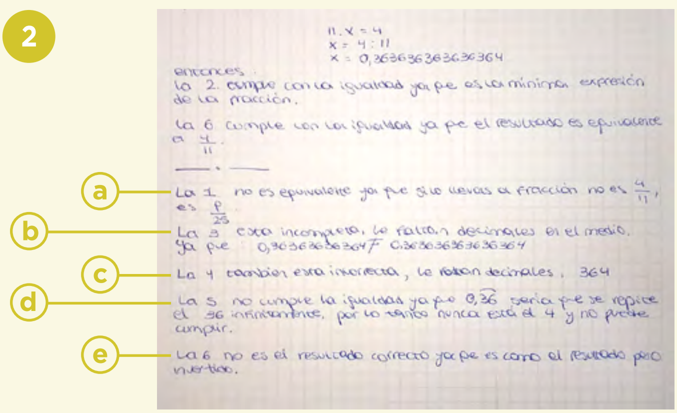
e Es válida, ya que al dividir 4 por 11, el resultado contiene infinitos decimales, en el que se presenta la repetición del 36, por lo tanto *x* es un número con decimales periódicos.

f Es válida, ya que la fracción $\frac{8}{22}$ es equivalente al resultado de la ecuación: $\frac{4}{11}$. Por lo tanto su valor es el mismo.

g No es válido, ya que al resolver la ecuación, el resultado es un número distinto, que es el inverso a $\frac{11}{4}$, lo cual no significa que tengan el mismo valor.

En esta primera producción, la estrategia utilizada por el estudiante consiste en despejar la ecuación. Notamos que, a pesar de haber encontrado la solución, el estudiante acepta todas las opciones del problema como respuestas admisibles exceptuando la última. Interpretamos que habría una concepción de solución aproximada que se superpone con la de solución exacta, o bien que exacto y aproximado no son dos cuestiones distinguibles en este contexto para el estudiante. También nos interesa señalar que las explicaciones que ofrece dan cuenta de su interés en considerar y analizar muchas cifras decimales de la solución. Los distintos redondeos que considera nos advierten que para este estudiante resulta claro que la expresión decimal del número continúa, incluso explica que el número es periódico. El despliegue de sus argumentos es extenso, esto nos permite acceder a sus concepciones. Destacamos que para este estudiante la aproximación de un número se puede aceptar como solución de la ecuación planteada habilitando el redondeo a dos, tres, once o tal vez más cifras decimales. Esto nos invita a pensar qué rol juegan las aproximaciones en la clase de matemática, cuándo surgen y qué se acuerda para ellas.

2




a La 1 no es equivalente ya que si lo llevás a fracción, no es $\frac{4}{11}$, es $\frac{9}{25}$.

b La 3 está incompleta, le faltan decimales en el medio, ya que $0{,}36363636364 \neq 0{,}363636363636364$.

c La 4 también está incompleta, le faltan decimales 364.

(d) La 5 no cumple la igualdad, ya que $0,\widehat{36}$ sería que se repite el 36 infinitamente, por lo tanto nunca está el 4 y no puede cumplir.

(e) La 6 no es el resultado correcto ya que es como el resto pero invertido.

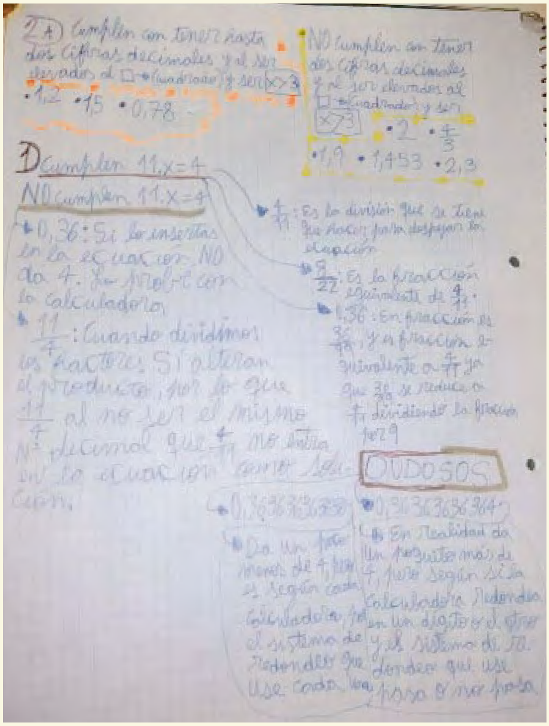
Esta estudiante también apela a la estrategia del despeje escribiendo la solución como el resultado de la división y pareciera que recurre a la calculadora, razón por la cual instala como solución la expresión 0,363636363636364, sin advertir el redondeo de la calculadora. Para referirse a la solución de la ecuación, la estudiante apela a la expresión "resultado". No sabríamos si se refiere al resultado de la ecuación o de la calculadora. Además, considera que la expresión decimal es finita. Si bien conoce el método para escribir una expresión decimal finita como fracción, no explicita la razón por la cual $\frac{9}{25}$ no resulta equivalente a $\frac{4}{11}$. Al mismo tiempo, la única razón que da para rechazar como solución a 0,36 es que este número es diferente a $\frac{4}{11}$ (observamos que en su hoja figura una escritura decimal de $\frac{4}{11}$ como 0,363636363636364). Apoyada en la solución encontrada al inicio, la estudiante analiza los valores que la actividad le ofrece comparando los números entre sí, sin volver a la ecuación. Elegimos esta producción para dar cuenta de los modos de lectura e interpretación de los y las estudiantes acerca de lo que muestra el visor de la calculadora.

Por su parte, la estudiante cuya producción podrán ver en la imagen 3 sabe distinguir cuáles valores verifican y cuáles no verifican la igualdad. Es una producción interesante porque, ante la falta de certeza total, la alumna abre una tercera posibilidad, la de los valores "dudosos" para los que de todos modos busca una explicación, algo que da lugar a una buena discusión en clase.

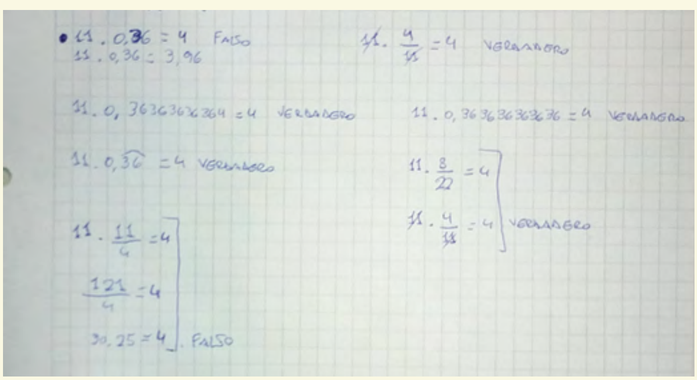
A su vez, la estrategia que utiliza otro estudiante (imagen 4) para decidir qué opciones son soluciones consiste en verificar si en la ecuación $11 \times x = 4$, al reemplazar $x$ por cada valor dado, se cumple la igualdad. Esta producción no muestra las cuentas realizadas sino que da cuenta del procedimiento utilizado. Nos preguntamos, si utilizó la calculadora, cómo habrá ingresado $0,\widehat{36}$.

El plano colectivo favorecerá la argumentación de lo realizado, aun sin que haya quedado escrito.

3




4




ACTIVIDAD 2

Encuentren la expresión decimal de las siguientes fracciones:

i) $\frac{869}{625}$ ii) $\frac{39}{7}$

continúa en p. 29 >>

>> viene de p. 28

iii) $\frac{19}{6}$ iv) $\frac{1257}{2048}$

v) $\frac{6}{19}$

## Intención general de la actividad 2

Volvemos sobre la idea de que la expresión decimal de una fracción se obtiene calculando "numerador ÷ denominador" y sobre cómo se lee en la calculadora. Lo que nos interesa abordar en esta actividad en particular es:

- ¿Cómo se puede leer en la calculadora si la expresión decimal de una fracción será finita o infinita y, fundamentalmente, si será periódica, sobre todo cuando el período no es fácil de atrapar en la calculadora?
- ¿Cómo se obtienen esos períodos?
- ¿Cuántas cifras podría tener un período? (Por ejemplo, si el denominador es 19, el período puede tener hasta dieciocho cifras.)

En esta actividad, el o la docente puede decidir ofrecer todas las fracciones a la vez o bien entregar algunas en un momento y luego otras. En particular, para la última fracción se retomarán cuestiones desarrolladas en las anteriores. Es por esto que la docente o el docente puede optar también por dar esta última fracción en el momento del trabajo colectivo, regulando un tiempo suficiente tanto para la exploración como para la formulación de nuevas preguntas o conjeturas según las ideas que ya hayan circulado.

## Cuestiones a desarrollar en el espacio colectivo

Apoyados en las conclusiones a las que se arribó en la actividad anterior puede ocurrir que los y las estudiantes recurran a la división entre numerador y denominador utilizando la calculadora. En ese caso podrían ocurrir diversas situaciones, dependiendo de aquello que muestra –o no– el visor de la calculadora para cada una de las fracciones ofrecidas.

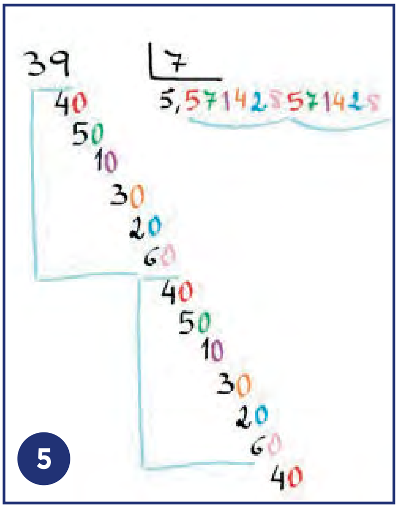
A continuación, presentamos el análisis de cada una de las fracciones propuestas con bastante detalle para cubrir todas las cuestiones observadas:[4]

$\mathbf{\frac{869}{625}}$ **:** como su escritura decimal es 1,3904, es posible que no haya mayor dificultad en este número. Pero puede ocurrir que ciertos chicos o chicas (eventualmente, quienes no hayan participado de la actividad 1) contesten que la expresión es 1,39. Será momento entonces de reponer la razón para distinguir 1,39 y 1,3904, haciendo vivir las nociones de valor exacto y valor aproximado. Cabe tener en cuenta que, en algunas circunstancias, la clase de matemática admite que –por ejemplo– un número como 1,3904 tiene distintas representaciones según la circunstancia y a veces se puede admitir a 1,39 como una manera de representarlo. En todo caso, cada docente analizará si es momento de apelar al recurso de realizar la cuenta a mano.

$\mathbf{\frac{39}{7}}$ **:** esta fracción se corresponde con una expresión decimal con período. Si se dispone de una aplicación de celular que muestra muchas cifras, se puede visualizar una expresión como 5,5714285714285714285714285714286. Podría suceder que ciertos alumnos o alumnas escriban solo algunas cifras y no la reconozcan como una expresión periódica. Será momento de analizar cómo se sabe si termina en ese valor que proponen (se puede realizar comparando los valores que dan usando distintas calculadoras o celulares; por ejemplo, el valor que da en una calculadora con diez dígitos o en una calculadora del celular donde aparecen más, muchos más dígitos) o si hay algún período.

Si al trabajar la actividad 1 no se apeló a realizar la cuenta a mano en la fracción $\frac{4}{11}$, se la puede proponer en este momento a partir de las posibles diferentes lecturas que surjan de los visores de las calculadoras.

4. Si desean recuperar de manera sintética los aspectos abordados en el espacio colectivo, les sugerimos ir al apartado siguiente, “Cuestiones a desarrollar en el espacio colectivo (síntesis)”.



5

Al realizar la cuenta 39 ÷ 7 a mano se puede analizar que el primer resto es 4, pues 39 = 5 × 7 + 4; y ese resto se transforma en 40 décimos para continuar dividiendo por 7 y obtener los décimos de la expresión decimal de la fracción $\frac{39}{7}$.

En la división 40 = 5 × 7 + 5 el cociente 5 serán los 5 décimos de la expresión decimal y el resto 5 se transformará en 50 centésimos, para continuar la búsqueda de los centésimos de la expresión decimal de la fracción. Nuevamente, en la división 50 = 7 × 7 + 1, el cociente 7 formará los centésimos de la expresión decimal de $\frac{39}{7}$ y el resto 1 se transformará en milésimos para continuar con la división.

Como se visualiza arriba, en la imagen 5, este procedimiento se repite obteniendo la secuencia de restos 4, 5, 1, 3, 2, 6, momento en el cual comienzan a repetirse esos restos, provocando en consecuencia la repetición de los cocientes 5, 7, 1, 4, 2, 8, que formarán las cifras del período.

La necesaria repetición de la secuencia de los restos puede no ser obvia para los y las estudiantes y será una acción del/la docente ponerla en evidencia. Apoyarse en la cuenta a mano desplegando al menos dos de estas secuencias de restos que se repiten –y por consiguiente las cifras del período– permitirá atrapar esa repetición inevitable en un orden determinado que no cambia.

La observación de que los restos que aparecieron son solo 6 habilita a la docente a preguntar: “¿Cuáles son los restos posibles al dividir por 7?”. Es factible que los y las estudiantes no consideren que 0 puede ser un resto posible en la división por 7, ya que si el resto en estas divisiones es 0 la cuenta llega a su fin.

Comienza así a esbozarse una primera formulación que se profundizará con el análisis de las expresiones decimales de las fracciones que siguen: es posible encontrar la expresión decimal de una fracción a partir de considerar los restos en la división por el denominador. La conformación del período se produce en vínculo con la distribución y aparición de restos (en caso de que no se llegue a tener resto 0). Es decir, no es posible seguir esta división infinitamente sin que se repita algún resto en algún momento; y en ese instante, a partir de ese resto, que se repita una cifra del cociente y se reinicie el ciclo de restos y cocientes nuevamente.

$\mathbf{\frac{19}{6}}$**:** Si esta fracción se considera luego de $\frac{39}{7}$, se pueden reutilizar las ideas ya compartidas. Pero es posible considerarla antes de $\frac{39}{7}$. En ese caso, si un visor de calculadora muestra 3,16666666…., algunos pueden contestar que es periódica (entrando en diálogo con los que proponen terminar en algún 6). Quizás haya estudiantes que sepan que es periódica pero no vean la necesidad de escribirla como tal para dar respuesta al problema. Será una ocasión para volver a trabajar la diferencia entre el número 3,1666666 y el $3{,}1\widehat{6}$, ¿cuál es mayor? El orden de los números racionales nos permite asegurar que, como no son el mismo número, no podrían ser ambos respuesta a esta pregunta.

$\mathbf{\frac{1257}{2048}}$**:** Esta fracción tiene una expresión decimal finita aunque extensa: 0,61376953125. Al proponer analizarla luego de $\frac{39}{7}$ o $\frac{19}{6}$ esperamos que algunas alumnas o alumnos intenten ver un período en ella, ya que no pueden saber si su calculadora les "oculta" cifras o período. La división a mano permite controlar la finitud de la expresión decimal. También es posible recurrir a una calculadora de celular que muestre muchas cifras.

Quizás haya en el aula quienes solo puedan ver nueve cifras detrás de la coma. En ese caso, el número que les aparecerá en el visor será 0,6137695312 (o 13 si redondea). Esta circunstancia habilita a considerar una nueva cuestión: en algunas expresiones decimales finitas pero "largas", el visor de algunas calculadoras puede no mostrar todo el número decimal.

Estos casos permitirían volver a analizar qué sucede si el resto es 0 al hacer la cuenta a mano (en este caso, la cuenta finaliza). Poner en relación esta cuenta con las que hicieron en los casos de expresiones decimales periódicas permitiría comprender las diferencias entre ambos casos.

$\mathbf{\frac{6}{19}}$ **:** Elegimos como última fracción una que tiene una expresión decimal periódica con dieciocho cifras en el período. Para entonces, los y las estudiantes han empezado a "desconfiar" del visor de las diversas calculadoras –es una intención de la propuesta– y se espera que duden de si será finita o si tendrá un período. Emerge así, como cuestión de la clase que puede instalar cada docente, qué ocurre si con la calculadora no se puede visualizar un período. ¿Puede ser periódica? ¿Puede por el contrario ser finita? ¿Podrá ser infinita pero no periódica?

Se puede sostener la discusión por un tiempo. Si la clase tiene una cierta confrontación respecto de lo que puede ocurrir en esta división a mano –y sin entrar en la misma–, se podría preguntar si es factible obtener resto cero en la división. Se pretende así consensuar con la clase que, de ocurrir el resto cero, la cuenta se termina y el número tiene expresión decimal finita. Por el contrario, si el resto cero tampoco aparece en esta cuenta (tal como ocurrió con la fracción $\frac{39}{7}$), los restos (que ahora son dieciocho posibles) tendrían que repetirse.

En caso de que haya alumnos o alumnas que propongan hacer la cuenta a mano, sería interesante dedicarle un tiempo y analizarlo. No obstante, la presencia en clase de dispositivos que muestran muchas cifras podría derivar en el análisis de lo que el visor muestra para encontrar ese período: $\frac{6}{19}$ tiene una expresión decimal periódica con dieciocho cifras en su período.[5]

¿Tiene sentido que el período de la fracción $\frac{6}{19}$ tenga dieciocho cifras? ¿No podrá tener más de dieciocho cifras el período? Nuevamente, como los restos que no son 0 son dieciocho posibilidades, no es posible que el período tenga más de dieciocho cifras. Con esto finalizamos el análisis de la fracción $\frac{6}{19}$.

Proponemos, ahora, hacer una revisión de las cuentas a mano realizadas para $\frac{4}{11}$, $\frac{39}{7}$ y $\frac{19}{6}$. En el primer caso, se repetían los restos 4 y 7 dando las cifras

5. Si se cuenta con conectividad, el sitio Wolfram Alpha permite hacer el cálculo con una precisión de más de trescientas cifras decimales y señala el período de números periódicos.

3 y 6 del período. Los restos posibles en la división por 11 (distintos de 0) son diez. Aquí, sin embargo, como se repiten dos de ellos de manera alternada se obtiene un período de dos cifras. Lo mismo ocurre con $\frac{19}{6}$, donde si bien los restos posibles (distintos de 0) al dividir por 6 son cinco, el período tiene una sola cifra ya que se repite el resto 4.

En el caso de $\frac{39}{7}$, los restos posibles en la división por 7 (distintos de 0) son seis y fueron apareciendo todos, de modo que el período de la expresión decimal de $\frac{39}{7}$ tiene seis cifras.

## Cuestiones a desarrollar en el espacio colectivo (síntesis)

Pensar en conjunto las fracciones $\frac{39}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{19}{6}$ y $\frac{6}{19}$ nos permite empezar a armar generalizaciones sobre la **relación entre la cuenta de dividir, el divisor, los restos posibles y las cifras en el período.**

A modo de reflexión (no necesariamente para compartir con los y las estudiantes de este modo), podemos señalar que al tener una fracción, la división entre numerador y denominador permite encontrar la expresión decimal. Cada paso en la cuenta de dividir ofrece un cociente y un resto. Si el resto es igual a 0, entonces el proceso finaliza y la expresión decimal es finita. En cambio, si en todos los pasos los restos son distintos de 0, entonces el proceso continúa indefinidamente. Pero alguno de esos restos en cierto momento se debe repetir, pues los restos posibles en una división por un número entero son finitos y, por lo tanto, al cabo de una serie de pasos el proceso se repite periódicamente y se obtiene una expresión decimal periódica.

Si interesa profundizar o sostener un poco más esta cuestión, podemos proponer la fracción $\frac{12578}{1023}$, que tiene un período de treinta dígitos (resulta visible en el sitio de Wolfram Alpha):

$$12{,}29521016617790811339198435972629521016617790811339198435$$

En síntesis, las discusiones en el espacio colectivo pueden funcionar alrededor de las siguientes preguntas:

- ¿Qué se puede leer de manera directa de la calculadora y qué no?
- Cuando en la calculadora aparecen muchos dígitos detrás de la coma, ¿siempre significa que se obtuvo una expresión decimal periódica?
- ¿Hasta cuántas cifras podrá haber en el período de una fracción particular (si posee)?
- Si a partir del resultado de la calculadora se sospecha que la expresión decimal es periódica, ¿cómo puedo confirmarlo?

Con respecto a la última pregunta, la revisión de los casos analizados nos permite concluir que disponemos de herramientas como la cuenta a mano o dispositivos que permitan sobrepasar la cantidad de cifras decimales que podría tener un período (si estamos dividiendo por 19, necesitamos ver una expresión decimal de más de diecinueve dígitos, por ejemplo).

## Conclusiones de la actividad 2

- Si se tiene tantos lugares en el visor de la calculadora como dígitos de la expresión decimal de una fracción, no se puede afirmar ni que es finita ni que es periódica.
- Para ciertos números, como por ejemplo la expresión decimal de $\frac{39}{7}$ o $\frac{19}{6}$, se puede "ver" el período en la calculadora. Para otros no, como el caso de $\frac{6}{19}$ .
- Son diferentes la expresión decimal de $\frac{39}{7}$, que es periódica, y un número como 5,5714285, que es una aproximación de su expresión decimal. Lo mismo para el caso de la expresión decimal de $\frac{19}{6}$ y una aproximación de la misma.

- Realizando la división a mano podemos tener la certeza de la forma en la que aparecen los restos. Esos restos que se repiten anuncian la repetición de los dígitos en la expresión decimal del cociente.

## Momento de teoría en el aula: la relación entre expresiones decimales y fracciones

Al finalizar el desarrollo de estas dos actividades, se pueden comenzar a sistematizar asuntos en torno al vínculo entre fracción y expresiones decimales, y posibles argumentaciones a favor de su validez:

- Una fracción se puede pensar como una cuenta de dividir entre números enteros (numerador dividido denominador), y esa cuenta de dividir tiene por resultado una expresión decimal.
- La expresión decimal que se obtiene como resultado de una cuenta de dividir entre números enteros será o bien finita, o bien infinita, en cuyo caso será periódica.
- A su vez, toda expresión decimal finita o periódica se puede representar por una fracción.

Con relación a la última afirmación, consideramos necesario aclarar que, si bien las técnicas para realizar la conversión de expresión decimal a fracción no han sido retomadas explícitamente en estas actividades, las tareas escolares desarrolladas en años previos permiten evocarlas y llegar a este enunciado genérico.

## Actividades para profundizar

A continuación, dejamos otras actividades similares que pueden acompañar al estudio o profundización del trabajo desplegado en las actividades anteriores:

1) ¿Es cierto que 3,27 es la expresión decimal de la fracción $\frac{36}{11}$ ?
2) ¿Cuál es la expresión decimal para la fracción $\frac{19}{15}$? ¿Su expresión decimal es finita o periódica? ¿Cómo se puede saber?
3) ¿Es cierto que la última cifra decimal (a la derecha de la coma) de la expresión decimal de $\frac{13}{6}$ es un 7?

## SECCIÓN 2: LAS NOCIONES DE ORDEN Y DENSIDAD

Proponemos un abordaje de la densidad para avanzar y profundizar ideas sobre el orden y la comparación de los números racionales. Creemos que los alumnos y alumnas disponen de conocimientos muy variados sobre estos temas.

Estudiar la densidad en las diferentes formas de representar a un número racional trae una variedad de cuestiones. Una de ellas es el vínculo entre la noción de densidad y las concepciones del infinito. Por ejemplo, los números periódicos involucran en su escritura decimal una cuestión que toca las ideas que los y las estudiantes tienen ya elaboradas en torno al infinito. En efecto, hay quienes pueden pensar que entre dos expresiones decimales finitas hay infinitos números, pero entre $2,\widehat{3}$ y $2,\widehat{4}$ no hay números, "ya que esos números no terminan nunca". Creemos que la construcción de la noción de densidad se produce en vínculo con la construcción del infinito, por eso es necesario profundizar sobre estas cuestiones.

Nos interesa alentar a pensar los números de diferentes maneras (esto es, elegir y disponer de distintas representaciones) al resolver estos problemas: como fracciones, como expresiones decimales finitas y periódicas. Y quizás, cuando sea posible, considerar la conveniencia de unas u otras maneras.

Las actividades diseñadas incluyen:

- Proponer números racionales entre dos dados: acá nos interesa variar los números dados tanto en su escritura (decimal o fracción) como en el tipo de número (decimal finito o periódico), y también variar el tipo de número que se pide.

- Plantear y estudiar asuntos vinculados a la densidad, tales como la imposibilidad de encontrar "el siguiente inmediato de un número racional" o "el anterior de un número".
- Pensar en las infinitas alternativas para ubicar "números entre" apoyados en la diversidad de propuestas por parte de los alumnos y alumnas.

ACTIVIDAD 3

Encuentren, si es posible, cinco números con expresión decimal finita y cinco números con expresión decimal periódica entre los números dados en cada caso. Si creen que no es posible, expliquen por qué.

a) Entre 16,3 y 16,5

b) Entre 9,82 y 9,822

c) Entre $105{,}0\hat{3}$ y $105{,}0\hat{4}$

## Intención general de la actividad 3

Esta actividad procura movilizar las ideas de orden que los y las estudiantes tienen incorporada de su experiencia escolar a la luz de las representaciones decimales tanto finitas como periódicas. Una cuestión para analizar en el aula: **¿qué significa encontrar números "entre"?** Será necesario aclarar que encontrar números entre –por ejemplo– 16,3 y 16,5 es encontrar números mayores que 16,3 y menores que 16,5. En este sentido, los números entre otros dos números no pueden ser ninguno de ellos.

Proponemos armar la actividad en **dos momentos**, entregando inicialmente solo los incisos a) y b). Este armado permite gestionar el salto de dificultad que genera el tercer ítem al tratar con la infinitud que traen los números periódicos. Proponemos plantear el inciso c) después de compartir las producciones de los dos primeros ítems, de modo que el trabajo ya realizado pueda recuperarse en este inciso.

Dado que la calculadora es una herramienta presente en todas las actividades de la secuencia, nos interesa considerar qué tipo de uso harán los y las estudiantes, qué es lo que se habilita a través del uso de la calculadora y, también, qué se inhabilita.

En los primeros dos incisos está en juego considerar expresiones decimales con una cantidad de decimales mayor que las que tienen los números dados. Podemos pensar que esta acción no es inmediata para todos los alumnos y alumnas (quizás esto varíe dependiendo de las actividades desarrolladas en torno a los racionales en años anteriores). En el segundo ítem se agrega, además, que el número a proponer requiere superar las tres cifras decimales. Creemos que algunos alumnos pueden estar más habituados a concebir a los números decimales con dos o tres cifras y será necesario ampliar su repertorio de decimales. Si bien en las actividades anteriores seguramente aparecieron números de muchas cifras, puede resultar distinto analizar números dados a tener que proponerlos.

En el primer ítem, con una cifra solo tienen para proponer 16,4. Ahora bien, con más de una cifra podrían proponer, luego de la cifra del 3 o del 4, cualquier número; e incluso agregar cualquier cantidad de cifras. No se espera que la clase llegue a expresar esta generalidad, pero podría surgir una mayor cantidad de cifras a partir de las propuestas de los alumnos y las alumnas. Sí nos interesa la idea de que tiene que empezar con 16,3_ o con 16,4_ para que la cifra de los décimos sea igual o mayor que 16,3 pero menor que 16,5.[6]

En el caso de que haya estudiantes que no disponen del recurso de agregar cifras decimales, se puede sugerir la escritura 16,30 y 16,50 para empezar a darle sentido a estas ideas de que los números representados como 16,3_ y 16,4_ están entre 16,3 y 16,5 (aun sin decidir qué sigue a estas escrituras).

6. Con el signo "_" queremos indicar que el número puede tener más cifras decimales.

En el ítem b), a diferencia del anterior, la cantidad de cifras decimales de los números planteados no es la misma. Para algunas alumnas o alumnos esto puede llegar a ser una complicación porque implica el uso de una nueva relación: modificar la escritura de 9,82 a 9,820 para comparar con 9,822.

Un posible error en estos ítems suele apoyarse en la idea de mirar los números detrás de la coma como una totalidad, algo que tal vez se empezó a discutir al comparar números decimales. Por ejemplo, en el segundo ítem, comparar el 82 y el 822. Para un estudiante que esté apoyado en esta idea errónea, 9,817 podría ser una respuesta al problema (dependiendo del estado de conocimientos de la clase, quizás este puede ser un número que proponga analizar el o la docente). Si bien en las experiencias desarrolladas estas estrategias no surgieron en todas las aulas, sí fueron registradas en algunos casos.

Frente al pedido de expresiones decimales periódicas entre los números dados, en el ítem b) podrían surgir estrategias erróneas que propongan $9{,}8\widehat{2}$ como respuesta. Nuevamente, habrá que recuperar las reglas de comparación y su razón de ser. La búsqueda de números con expresiones decimales finitas puede servir de apoyo para pensar respuestas a esta pregunta.

## Las resoluciones en el espacio colectivo: una propuesta

Después de compartir y analizar las producciones de los dos primeros incisos, y en el caso eventual en el que no hubiera producciones de números periódicos, la docente o el docente podría proponer números con muchas cifras decimales para analizar si es posible ubicarlos entre 16,3 y 16,5. Por ejemplo, se puede preguntar a la clase si 16,38975640987569 estará entre 16,3 y 16,5.

Con esta intervención se busca interpelar a los y las estudiantes acerca de la posibilidad de que existan números entre 16,3 y 16,5 con muchas cifras (incluso infinitas) detrás de la coma. Del mismo modo, se puede proponer que busquen un número con diez cifras decimales entre 9,82 y 9,822.

Consideramos a este tipo de números que pueden proponerse –con muchas cifras, diez o más, detrás de la coma– como una forma de acercarse a la escritura de expresiones decimales infinitas de un modo concreto, a través de números con todas las cifras decimales a la vista. Usualmente, la escuela no posa su mirada sobre los números de este tipo y tampoco los indaga en relación con cuestiones propias de la matemática tales como el orden o la densidad.

En el ítem c), algunas y algunos estudiantes podrían pensar que no hay forma de encontrar números entre los dos dados (estarán asumiendo que el segundo número "es el siguiente" del primero). El análisis de los números que propongan otras compañeras o compañeros será un insumo para estudiar esa afirmación. Si toda el aula coincidiera en que no existe ningún número entre los dos propuestos, el docente o la docente les podrá proponer analizar un cierto número. Por ejemplo, 105,034.

## Conclusiones para registrar al finalizar la actividad 3

Las producciones de la clase pueden interpelarse a la luz de las estrategias utilizadas para la producción de números racionales tales como los pedidos. En tal sentido, se podrá registrar un conjunto de conclusiones entre las que destacamos:

- Para encontrar números decimales entre dos números decimales, se pueden agregar ceros detrás de la última cifra decimal no nula y compararlos.
- Si ya encontramos un número que cumple la desigualdad y tiene una expresión decimal finita, se puede agregar a esa expresión "cualquier tira de cifras" y sigue cumpliendo la misma desigualdad.

Al trabajar este problema en el espacio colectivo, el o la docente podrá preguntar a la clase –a la luz de todos los ejemplos analizados– *cuántos números pueden encontrarse* en cada uno de los incisos trabajados. En todos los casos, se espera acordar que es posible encontrar infinitos números. Algunas chicas o chicos quizás proponen que se pueden encontrar "muchos números". Será necesario considerar entonces que muchos no es lo mismo que infinitos.

## Momento de teoría en el aula: la densidad

A esta altura, se propone realizar un cierre teórico a cargo del docente o la docente, pero sostenido en todo el trabajo realizado con esta actividad. A modo de posibilidad, proponemos refrescar cómo en esta actividad, donde se proponía encontrar un número entre otros dos dados, descubrimos lo siguiente:

- Entre dos números racionales siempre se pueden encontrar otros números, tanto con expresiones decimales finitas como con expresiones decimales periódicas.
- Entre dos números racionales se pueden encontrar infinitos números.

Ahora sí, el docente podrá formular en la clase la propiedad de densidad: existe una propiedad de los números racionales que afirma que **entre dos números racionales diferentes, es posible encontrar otro número racional diferente a esos dos**. Esta propiedad se llama **propiedad de densidad**.

ACTIVIDAD 4

a) ¿Cuál es el mayor de todos los números de hasta dos cifras decimales que están entre 1 y 2? ¿Y cuál es el menor?
b) ¿Cuál es el mayor de todos los números de hasta tres cifras decimales que están entre 1 y 2? ¿Y cuál es el menor?
c) ¿Cuál es el mayor de todos los números racionales que están entre 1 y 2? ¿Y cuál es el menor?

## Intención general de la actividad 4

Este problema[7] promueve considerar la posibilidad de encontrar el número inmediato anterior a un número real concreto (en este caso el número 2) y el número consecutivo inmediato (en este caso para el número 1). La propiedad de densidad, con un despliegue ya iniciado en la actividad anterior, será el punto de apoyo para poner en discusión las propuestas que realicen los y las estudiantes.

Para ello hemos optado por abordar esta pregunta considerando la posibilidad de encontrar el primer y último elemento en un intervalo abierto. Más en particular, proponemos estudiar el conjunto de todos los racionales comprendidos entre los números 1 y 2, y buscar un primer y último elemento para este conjunto, bajo la restricción de que el número tenga hasta dos decimales, luego tres y, finalmente, cualquier cantidad de decimales. De este modo, los números de hasta dos cifras decimales se perciben como un conjunto finito de elementos cuando consideramos los que están encerrados entre dos números dados. También, y en parte a partir de esta cuestión, es posible comprender que los números de por ejemplo hasta cuatro cifras decimales son un conjunto finito del mismo modo que el anterior, pero en este caso se trata de un conjunto de más elementos (que, al mismo tiempo, contiene al conjunto anterior). Entender la finitud va de la mano con entender lo discreto de estos conjuntos.

Ahora bien, para los y las estudiantes, la pregunta por el primer elemento del conjunto de todos los números racionales entre 1 y 2 resulta más evidente de comprender que la pregunta por el último elemento. Efectivamente, cuando en el aula exploran en búsqueda del número menor, advierten que frente a cualquier candidato a primer elemento es posible encontrar otro número del

7. El análisis de este problema se profundiza en el artículo de Cedrón, Duarte, Herrera y Lamela (2021), “Representación y densidad en los reales: Análisis de experiencias de aula”, disponible en: <http://dges-cba.edu.ar/wp/wp-content/uploads/2021/11/Revista-EFI-Vol-7-N%C2%BA-12-completa-ISSN-ok-1.pdf>.

conjunto que resulta menor apelando al agregado conveniente de ceros en la expresión decimal, una tarea que siempre puede continuar. Así, se podría proponer 1,01 o bien 1,001, etc., generando un proceso con tantos pasos como se desee, lo cual brinda cierta estabilidad (o certeza) de que no es posible encontrar el primer elemento.

Por otra parte, cuando los y las estudiantes se abocan a la búsqueda de un último elemento del conjunto de los números entre 1 y 2 –o su equivalente, encontrar el número inmediatamente anterior a 2–, generan un conjunto de números decimales de expresión finita que parecen desembocar en un número aparentemente distinto a 2, el $1,\hat{9}$. Son varias las razones en las que se apoyan para distinguir estos dos números. En esta instancia hay una oportunidad desde la enseñanza para cuestionar esta diferenciación entre $1,\hat{9}$ y 2. Para ello podrá ponerse en juego la noción de densidad bajo la forma "entre dos números racionales distintos es posible encontrar otro número racional".

## Momento colectivo: el estudio de la igualdad $0,\hat{9} = 1$

Esta distinción que sostienen muchos estudiantes entre $1,\hat{9}$ y 2 –y también entre la imposibilidad de encontrar primer elemento y la posibilidad de encontrar último– se constituye en un punto de viraje de la actividad: se trata de entender qué número se podría encontrar entre $1,\hat{9}$ y 2.

Reconocemos que el problema de encontrar último elemento en el conjunto (1;2) no es equivalente al problema del primer elemento. En la búsqueda del primer elemento, frente a cualquier candidato es posible encontrar otro número del conjunto que resulta menor apelando a la inclusión de ceros en la expresión decimal. Así, propuesto 1,01 se podría considerar 1,001 y también 1,0001, etc., generando números cada vez más pequeños. En la búsqueda del último elemento, una estrategia análoga admite el agregado del dígito 9 en cada paso, produciendo de este modo números como 1,9999; 1,9999999; etc.

Esta sucesión de números parece desembocar en un número aparentemente distinto a 2, el $1,\widehat{9}$.

En las implementaciones desarrolladas, para comprender que no es posible ubicar un número entre $1,\widehat{9}$ y 2 fue necesario pasar por una igualdad equivalente pero más sencilla de manipular: $0,\widehat{9} = 1$. Queda en manos del docente pausar la actividad que ocupa a la clase y considerar esta nueva alternativa: encontrar números entre $0,\widehat{9}$ y 1. La ventaja de mirar esta dupla de números radica en la posibilidad, más cercana a los estudiantes, de convertir la escritura decimal $0,\widehat{9}$ en fracción.

Si bien la actividad genera gran controversia y en todas las experiencias hemos encontrado estudiantes dispuestos a encontrar inconsistencias en dicha igualdad, hay una oportunidad para estudiarla. La búsqueda de razones a favor y en contra de la igualdad entre $0,\widehat{9}$ y 1 permite a la clase de matemática entrar en una fase de debate intelectual donde las creencias y concepciones de cada estudiante acerca de las escrituras decimales de los números, junto con sus intuiciones acerca del infinito, generan un momento de intensa producción matemática en el aula.

De este modo, algunos estudiantes, apoyados en una igualdad que trae menos resistencia, sostendrán que dado que $\frac{1}{3}$ se escribe como $0,\widehat{3}$ , y que se puede multiplicar por tres a ambos miembros de la igualdad, se deduce que $0,\widehat{9} = 1$. Otros podrían leer a la fracción $\frac{1}{3}$ como una división y, apelando al doble juego de división y producto, indicar que dado que $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ es necesario admitir que $0,\widehat{3} \times 3 = 1$.

La aceptación de esta doble escritura es un momento de clivaje para la clase de matemática, que junto con ella tiene que revisar muchas ideas aceptadas escolarmente:

- $0,\widehat{9} = 1$ aunque las partes enteras de estos números son distintas.
- $0,\widehat{9}$ resulta un número natural, aunque tiene infinitos decimales luego de la coma.
- $0,\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1$, aunque ninguna cuenta de dividir permita encontrarse con $0,\widehat{9}$ como cociente.

El análisis de estas cuestiones alimenta un posicionamiento teórico por parte de los y las estudiantes. Esto será retomado a lo largo de la secuencia didáctica.

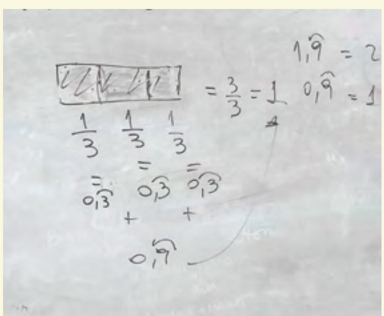
## Momento de teoría al cierre de la actividad 4

El análisis de la igualdad y la búsqueda del primer y último elemento constituyen una base para elaborar y registrar las siguientes afirmaciones:

- Cualquiera sea el número racional que consideremos, no hay un número racional inmediato mayor o siguiente. Del mismo modo tampoco existe un número inmediato anterior. Una consecuencia de esto es que no es posible encontrar el menor ni el mayor de los números racionales comprendidos estrictamente entre 1 y 2.
- Hay números que tienen doble escritura decimal, por ejemplo el número 1, que también se escribe como $0,\widehat{9}$.[8]

## Análisis de producciones del aula de la actividad 4

6




8. Cada docente considerará qué lugar puede tener una profundización de estas ideas para otros números.

En una de las implementaciones (imagen 6), una estudiante propuso explicar la igualdad estudiada apelando al uso de un dibujo para partir la unidad (un recurso frecuentemente utilizado en el nivel primario en la introducción a la noción de fracción). La estudiante dibuja un chocolate que está dividido en tres partes (que de manera implícita considera iguales), señalando que cada parte de ese chocolate es un tercio de chocolate. Luego, explica que cualquiera de esos tercios es también $0,\widehat{3}$ (ubicando esta escritura debajo de cada tercio). Entonces, considera en paralelo dos argumentos apoyándose en el esquema: por un lado, los tres tercios hacen $\frac{3}{3}$ del chocolate, y esto es el total del chocolate; por otro lado, propone sumar tres veces el número $0,\widehat{3}$ y obtiene como resultado $0,\widehat{9}$. Luego, reúne ambos argumentos y concluye que $0,\widehat{9} = 1$. Esta doble mirada puede verse en su explicación en el pizarrón. El argumento se apoya en una concepción de la fracción como parte de la unidad y, también, en una representación icónica familiar (el chocolate) para pensar esa relación. Resulta novedosa la utilización conjunta de una representación de partes de la unidad con expresiones decimales en lugar de solo fracciones.

## Actividad para profundizar

Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso justifiquen su decisión explicando en qué se apoyaron:

a) No existen números racionales entre $4,01\widehat{6}$ y $4,01\widehat{7}$.

b) Entre las fracciones $\frac{4}{1000}$ y $\frac{5}{1000}$ no hay números periódicos.

c) El número inmediatamente posterior a 31,67 es el $31,6\widehat{7}$.

d) Existen infinitos números decimales periódicos entre 20,38 y $20,3\widehat{8}$.

e) El número $1,\widehat{9}$ es igual a 2.

f) El siguiente de $2,\widehat{3}$ es 2,4.

g) Todos los números naturales tienen doble escritura decimal.

En los ítems a) al d) se recuperan ideas y estrategias desplegadas en los problemas de la actividad 3. Será una nueva oportunidad de que los alumnos pongan en juego esas ideas trabajadas.

En los ítems c), e) y f) se retoma lo trabajado en la actividad 4: la idea de que **no es posible encontrar el anterior y posterior inmediato de un número**. Si esa idea no fue trabajada en el problema anterior, será a propósito de estos ítems que se trabaje esta propiedad.

## SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se abordan aspectos como el vínculo entre una expresión decimal finita o periódica y la división entre números enteros; la utilización y la lectura que se hace del visor de la calculadora para la comprensión de los números en juego; y, finalmente, el estudio de la densidad de los racionales expresados en forma decimal, idea que se ve co-construida junto con la escritura de los números. Estas cuestiones serán punto de apoyo para la siguiente etapa.

Queremos distinguir entre la acción de analizar ejemplos de objetos matemáticos, tales como expresiones decimales que tienen muchas cifras detrás de la coma, y la tarea de producir, por ejemplo, expresiones decimales entre dos números dados. Construir números entre dos números dados (tanto finitos como periódicos) requiere dominar el valor posicional de cada cifra posterior a la coma. Aparecen así estrategias tales como incorporar números al desarrollo decimal (en caso de ser finita), agregando dígitos finitos o periódicos que cumplan condiciones que permitan ordenarlos.

CAPÍTULO 2

# Expresiones decimales infinitas

## LAS EXPRESIONES DECIMALES INFINITAS: UNA ZONA EN COMÚN ENTRE RACIONALES E IRRACIONALES

Aceptar los números irracionales, esto es, los desarrollos decimales sin fin y sin período, supone crecer en la racionalidad, valga el juego de palabras. La conceptualización de números racionales e irracionales –en tanto dos conjuntos infinitos, ordenados y con un lugar en la recta en algunos casos difícil de precisar– constituye una abstracción dada, entre otras cuestiones, por el pasaje del infinito potencial al actual.[1] Esta conceptualización supone aceptar un número que está dado por su desarrollo decimal infinito. Pensamos que el acceder a los desarrollos decimales infinitos (periódicos y no periódicos) abre a la reflexión, al cuestionamiento, a la abstracción matemática y, en cierto sentido, al pensamiento teórico. La secuencia –y en particular este capítulo– promueve la indagación por parte de los alumnos y alumnas de los desarrollos decimales de algunos números irracionales, tomando como punto de apoyo el trabajo desplegado a propósito de los desarrollos decimales periódicos, que

1. Infinito potencial hace referencia a un proceso que continúa indefinidamente. Infinito actual hace referencia a un proceso infinito "terminado", aunque pueda sonar contradictorio. Un ejemplo cercano es $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$ (la expresión de la derecha deja ver un proceso sin fin mientras que la de la izquierda es el proceso infinito terminado, cuestión que corresponde en análisis al paso al límite). El mencionado "pasaje del infinito potencial al actual" se refiere a la aceptación de la igualdad entre ellos.

incluyó el vínculo entre la división de dos números enteros y una expresión decimal finita o periódica.

Podemos pensar a las expresiones decimales infinitas como una zona que aúna los números racionales y los irracionales (aun sabiendo que se trata de conjuntos diferentes). Los números cuyo desarrollo decimal es infinito dan lugar a una reflexión de tipo teórica que los alumnos pueden tomar y explorar.

En ocasiones, algunas ideas y discursos que se construyen en las aulas en torno a los irracionales enfatizan el hecho de que no es posible anticipar las cifras en ninguna posición de las expresiones decimales de estos números. Indudablemente, esto caracteriza a algunos irracionales tales como $\sqrt{3}$ o $\pi$, y es de hecho una dificultad para tratar con estos números a partir de su expresión decimal. Ahora bien, este no es el caso de los números irracionales que tienen una ley de formación para su expresión decimal, como las que se trabajan en este capítulo: en dichos casos es posible anticipar qué número estará en una posición determinada de su expresión decimal basándose en la ley de formación. Proponemos en este capítulo la búsqueda y producción de leyes de formación, que se podrán utilizar en un primer momento para escribir algunos números irracionales. Es conveniente recordar que tener una ley de formación no se limita a ciertos números irracionales; de algún modo, las expresiones decimales periódicas también tienen una "ley de formación".

Nos interesa en este capítulo abordar las similitudes y diferencias entre una expresión decimal irracional dada a partir de una ley de formación y una expresión decimal periódica para avanzar en la conceptualización de los desarrollos decimales infinitos, como veremos en las actividades de este capítulo.

ACTIVIDAD 1

Los siguientes números tienen infinitas cifras decimales. Las cifras se agregan siguiendo una regla de formación:

i) 0,12345678987654321234567898765432…

Regla: “Después de la coma, se escriben en forma creciente los números naturales del 1 al 9, luego de forma decreciente, del 8 al 2, y se vuelve a empezar”.

ii) 0,12341235123612371238123912310123 11…

Regla: “Después de la coma, las tres primeras cifras decimales son 123. Luego, se ubica el 4. Vuelven a aparecer las cifras 123 y se intercala sucesivamente un número natural, a partir del 5”.

a) Para cada uno de los números anteriores, ¿cuáles son las diez cifras decimales que continúan?

b) ¿Los números en cuestión son periódicos? En caso de que lo sean, indiquen cuál es el período.

## Intención general de la actividad 1

Se presentan dos números con desarrollos decimales infinitos, cada uno con su regla de formación. Se trata de analizar y decidir si son o no periódicos y, de este modo, estudiar si se trata de números racionales. El trabajo que se inicia aquí propiciará luego la definición de números irracionales como aquellos cuya expresión decimal es infinita y no periódica.

## Ideas que pueden desplegarse para la resolución

El ítem a) invita a las y los estudiantes a inspeccionar las reglas de formación y entender qué consecuencias se derivan de su aplicación en la escritura de las expresiones decimales respectivas.

Sobre el ítem b), para el primer número, a partir de esa regla se obtiene una expresión decimal periódica aun cuando no hay indicación del símbolo de período. Reconocer este período permite recurrir a la escritura convencional para un número periódico, en este caso, $0,\overset{\frown}{1234567898765432}$.

En el segundo número se espera llegar, al menos de forma colectiva, a una explicación que ayude a entender que no hay manera de que haya un período. En el caso de que hubiera quienes propongan que sí lo hay, se puede pedir la expresión de ese número recurriendo a la escritura de los números periódicos. Esto es, pedirles que reconozcan el período y lo escriban bajo el "arquito". En el análisis de las posibles respuestas que propongan las y los estudiantes se espera reconocer que en cualquier sector que se elija para expresar el período, aparecerá algún número natural que no va a repetirse ni antes ni después (por ejemplo, si proponen que el período es 1234, el 4 no aparecerá en las cifras decimales posteriores).

Los y las estudiantes pueden identificar en ambas expresiones que "hay algo que se repite". En el caso del número

0,1234567898765432123456789876543211234…

es posible visualizar aquello que se repite y que es efectivamente el período: a partir de cierto momento, lo que se repite es una secuencia fija de cifras. En el segundo número, también podrán reconocer que una parte se reitera. Aunque esto no genera un período, permite anticipar cómo serán las cifras de este número.

ACTIVIDAD 2

Consideren los siguientes números, cada uno de ellos con infinitas cifras decimales:

a) 14,233223322332…
b) 32,141441444144441…
c) 5,83600836008360083600083…
d) 72,72907290072900072900007 2…

Indiquen cuáles de estos números tienen período y, en ese caso, escriban su expresión como número periódico (es decir, usando el arquito).

## Intención general de la actividad 2

Al comienzo de esta actividad, será conveniente propiciar un momento de oralidad entre toda la clase para identificar la ley de formación de cada número. En las experiencias desarrolladas, algunas docentes señalaron que “en estos números no se enuncia la regla de formación. Aparecen puntos suspensivos. Vamos a tomarnos un momento para ver en cada caso cuál sería la regla de formación”. Entendemos que para identificar las leyes de formación de cada número es necesario realizar una interpretación de la lectura de cada uno, lo que puede requerir un acuerdo. Luego, las leyes ya acordadas serán las que se usen para entender la naturaleza de los números.

Una cuestión para tener en cuenta en este diálogo inicial es que, para cada número dado, es posible interpretar que lo que sigue del número es una repetición de lo que se ve. Por ejemplo, en el ítem b), 32,141441444144441… sería el número $32,\overline{141441444144441}$. Si se usara en cada caso esta interpretación de los puntos suspensivos, se obtendría siempre números periódicos. En cambio, otra interpretación para la escritura del número dado en b) lleva a decir que no tiene período ya que su expresión decimal 32,141441444144441 4444414444441... continúa según la regla de formación del agregado de un 4 más luego de cada 1.

Nos interesa hacer visible esta doble interpretación y sus consecuencias en cada caso para así dar sentido a ciertas convenciones que implican el uso de puntos suspensivos y que muchas veces no se explicitan. Como consecuencia de este trabajo inicial, queremos también identificar que, en este caso, lo que se muestra del desarrollo de cada expresión decimal tiene que ser suficiente para ofrecer evidencias sobre la ley de formación.

Una vez que en el espacio colectivo se haya arribado a cuáles de estos números admiten una escritura con período y cuáles no, se podrá preguntar: *¿Cuáles de estos números pueden escribirse como fracción?* Esto permitirá recuperar la relación entre fracciones y expresiones decimales desplegada en el capítulo anterior.

Quizás haya estudiantes que duden acerca de la posibilidad o imposibilidad de escribir las expresiones decimales infinitas no periódicas como fracción. Una alternativa para abordar esta duda en la clase es razonar por el absurdo: si se pudiera hallar una fracción que represente una expresión decimal infinita sin período, al hacer la división que plantea esa fracción deberíamos obtener (tal como se sabe por lo trabajado en el capítulo anterior) una expresión decimal finita o infinita periódica. Por lo tanto, no es posible que las expresiones decimales infinitas no periódicas se puedan escribir como una fracción.

Una vez aclarado esto, será momento de reponer algunas cuestiones del orden de lo teórico e introducir definiciones.

## Momento de teoría en el aula: conceptualizar a los irracionales

Las actividades desarrolladas conforman una oportunidad para distinguir características de los números analizados e introducir una definición: los números irracionales. En esta instancia el docente o la docente podrá sentenciar:[2]

> *Estos números, que teniendo una expresión decimal infinita no tienen período, son números que no pueden escribirse como una fracción y, por lo tanto,* ***no son números racionales****. Recordemos que los números que pueden escribirse como una fracción tienen una expresión decimal que, o bien es finita, o bien es infinita con período.*
>
> *Entonces, ya que no pueden escribirse como fracción, o razón, estos números se denominan* ***irracionales****.*
>
> *Decimos entonces que los* ***números irracionales*** *son aquellos que, por un lado, no pueden escribirse como fracción y, por el otro, tienen una expresión decimal infinita sin período.*

2. Como en el capítulo anterior, escribiremos **en negrita** aquellas palabras o frases que deseamos destacar; y *en cursiva*, ciertas ideas pensadas para que los o las docentes compartan con la clase de forma oral o escribiéndolas en el pizarrón.

En este momento, en el que se define qué es un número irracional, es posible que los y las estudiantes recuerden que hay números que ya conocen como irracionales, tales como $\pi$ o $\sqrt{2}$. Por eso, este es un buen momento para preguntar en el aula: *¿Qué números irracionales conocen?* Será una oportunidad para recolectar todos los ejemplos de números irracionales que los y las estudiantes recuerden, compartir este conocimiento y anunciar que la clase continuará involucrada en el estudio de estos otros números.

El uso de la calculadora podría servir para visibilizar que estos nuevos números –aportados por la clase– no tienen, aparentemente, una regla de formación como la de los números analizados en las actividades anteriores. Ahora bien, regla de formación podría ser muy compleja y evidenciarse después de más de cien dígitos, por ejemplo, y por lo tanto no ser visible en la calculadora. La reflexión sobre estas cuestiones podrá ser motivada por preguntas acerca de estos números. Por ejemplo: "¿Podemos escribir las diez cifras decimales que siguen a las que muestra el visor?"; "¿Sabemos cómo continúa la expresión decimal de estos números?". Con relación a $\pi$, se podría preguntar: "¿Sería correcto decir que la expresión decimal de este número tiene repetida la expresión 1415926536 (o la que se pueda visualizar en el visor de la calculadora) en forma periódica? ¿Podemos asegurar, por el contrario, que esta secuencia de números no va a volver a encontrarse más en la expresión decimal de $\pi$?".[3]

La propuesta de distintas preguntas que ayuden a indagar cómo es la expresión decimal de estos otros irracionales permitirá comenzar a distinguir entre la certeza que aporta conocer una regla de formación y la incertidumbre que deja el visor de la calculadora.

3. En el sitio web *Im I in Pi*, <http://www.facade.com/legacy/amiinpi/>, el visitante ingresa la fecha de su nacimiento (a través de seis dígitos: uno o dos dígitos para el mes, uno o dos para el día y dos para el año) y se entera en qué posición de la expresión decimal del número $\pi$ se encuentran esas seis cifras. Comprendemos que se trata de una actividad lúdica que sorprende y genera la impresión de que el número $\pi$ tiene una gran variedad de cifras. Se trata de un desafío que incita a la sorpresa y, eventualmente, a hacerse preguntas cuyas explicaciones, por otra parte, son bien complejas.

## Acerca de los puntos suspensivos

Nos interesa reflexionar **entre docentes** acerca de un uso de los puntos suspensivos que deja en manos del lector la interpretación de qué es lo que ve y qué es lo que no se ve pero se puede intuir. Una alternativa para interpretar los puntos suspensivos es considerar que, al poner puntos suspensivos, lo que está a la vista se repite indefinidamente. Así el número $\frac{4}{11}$ podría escribirse como:

$$0{,}36\ldots \qquad 0{,}3636\ldots \qquad 0{,}363636\ldots$$

En estos casos, esos puntos suspensivos vienen a "comunicar" cierta regularidad que se traduce en un período. Esta lógica de escritura se interrumpe generando alguna confusión frente a números periódicos con una parte no periódica, como es el caso de 7,54333333… Si la lógica que se sigue es la de repetir lo que se muestra, estaríamos frente al número:

$$7{,}5433333354333333354333333\ldots = 7{,}\widehat{54333333}$$

Sin embargo, es usual encontrar que la escritura 7,54333366… corresponde a un número mixto en el que lo único que se repite es el 3. En general, estas formas de representación no son conversadas y entendemos que, tratándose de una convención, es necesario alojar en la clase el estatus de tales escrituras.

Finalmente, esta modalidad de presentar una cierta repetición puede obturar la interpretación frente al uso de puntos suspensivos en otros casos. Por ejemplo, frente a $\pi$:

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

Mientras que a la izquierda del signo igual señalamos a un irracional, a la derecha del signo igual podría interpretarse que representa a un racional con período 141592654.

La aparición de los números irracionales en los temas escolares trae una nueva posibilidad para la interpretación de una expresión decimal con puntos suspensivos. En este caso, los puntos suspensivos luego de una expresión que no muestra una repetición en las cifras se interpreta como una expresión decimal infinita y sin período.

Es por eso que consideramos oportuno favorecer una lectura y sentido compartido que permita establecer el modo en que se continúa ese número. Y así lo planteamos en el inicio de la actividad 2.

Explicitar en la clase el uso permitido y consensuado de los puntos suspensivos tiene la intención de ofrecer a los y las estudiantes una apoyatura para despejar las dificultades de interpretación de escrituras ante los problemas de interpretación de regularidades, que es el modo en el que estamos introduciendo los números irracionales.

ACTIVIDAD 3

Inventen reglas para obtener expresiones decimales de números racionales e irracionales. Indiquen el período de los números que lo tengan.

## Intención general de la actividad 3

Esta actividad pone a la clase a producir reglas de formación mientras que hasta aquí las habían analizado. Así, se involucra la exploración de diversos ejemplos. En ocasiones, las y los estudiantes se apoyan en ciertas reglas que aparecieron anteriormente (por ejemplo, la que produce el número 0,123412351236… de la primera actividad) y a través de alguna variación proponen un número similar. En otras instancias, pueden organizar expresiones más sofisticadas. De cualquier forma, esperamos que las construcciones se expliquen en forma escrita y que cada regla de formación expresada por escrito dé lugar inequívoco a una única expresión decimal.

Al momento de producir reglas de formación para ambos tipos de números se pondrán en evidencia las ideas que alojan los y las estudiantes acerca de qué es lo imprevisible (o diferente) y no repetitivo en una escritura decimal.

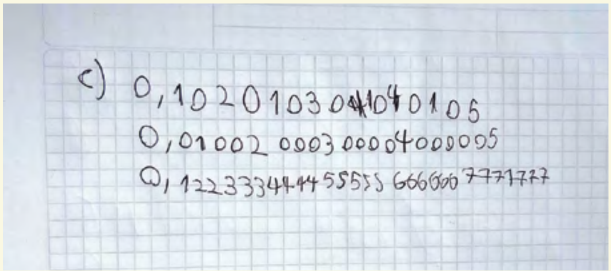
En caso de tener muchas reglas de formación producidas por pequeños grupos de estudiantes, se hará necesario considerar distintos modos de hacer colectivo y productivo este material con el objetivo de comprender qué se espera de una ley de formación. De este modo, la docente o el docente podrá elegir algunas producciones para analizar colectivamente. Una alternativa para colaborar en la explicitación de las convenciones a utilizar puede consistir en que el grupo productor de una ley de formación la enuncie oralmente mientras una estudiante ajena al grupo la anota en el pizarrón y luego la transcribe en una escritura decimal con el aporte de toda la clase. Este modo de escritura colectiva pone en evidencia la multiplicidad de interpretaciones posibles que puede contener el enunciado de una ley de formación. Alcanzará con analizar un par de ejemplos, ya que tomar todos los que se hayan inventado puede tornar engorrosa la actividad.

Los números que se inventen pueden contener una parte de la propia expresión decimal que no esté dentro de la “ley de formación” o dentro del período. Tal vez, las y los estudiantes pueden pensar que las expresiones decimales dadas por leyes de formación siempre tienen que incluir a las primeras cifras como parte de la ley, aun sabiendo que hay expresiones decimales periódicas mixtas que contienen una parte que no está dentro del período. Será momento de discutir esto en el espacio colectivo y proponer, si es necesario, algún ejemplo.

## Producciones de estudiantes sobre leyes de formación

Compartimos algunas producciones que dan cuenta del modo en el que las y los estudiantes conciben posibles regularidades para definir irracionales.

1



En la imagen 1, se exhiben tres números cuyas reglas quedan implícitas. Comprender las reglas de formación creadas nos permite acercarnos a la posible complejidad de esta tarea. Proponemos llevar adelante, desde nuestro lugar de docentes, la formulación de leyes de formación para el primer ejemplo. Este número tiene al menos dos formulaciones posibles para su parte decimal:

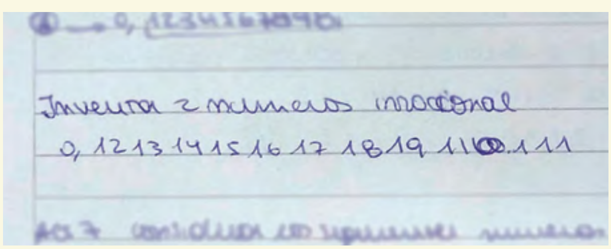
i) Se ubica el número 10 y a continuación se ubican múltiplos de 10 en forma intercalada: 20, 30, 40…

ii) Se escribe 102 por única vez, luego se repite 010 intercalando los números naturales a partir del 3.

En ambos casos, coincide tanto la parte visible del número como la que continuaría de acuerdo con cada una de las reglas.

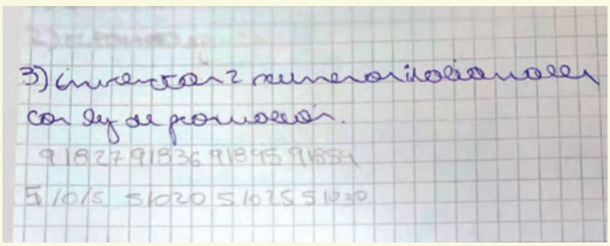
El tercer número resulta novedoso en relación con los presentados en las actividades. Contribuye a considerar nuevas familias de números irracionales y a justificar su irracionalidad.

2



El ejemplo de la imagen 2 nos interesa porque, siguiendo los primeros números de la expresión decimal, se podría pensar en una regla que ubica a los naturales a partir del 12. Sin embargo, las últimas cifras (110111) ponen en cuestión esta ley de formación (ya que en ese caso el número debería seguir como 202122…), requiriendo por lo tanto una nueva interpretación. Una ley de formación que ajuste a todo lo visible puede escribirse del siguiente modo: "Se escriben los naturales a partir del 2, intercalando el número 1 entre ellos". Cabe agregar, como una última observación, que allí la escritura omite los puntos suspensivos.

3




En el ejemplo de la imagen 3, aunque la escritura omite la parte entera, podemos interpretar las leyes de formación de las partes decimales de dos números:

i) 0,918279183691845918 54…
ii) 0,51015510205102551030…

En ambos casos se visualiza una organización sobre múltiplos de determinados números: la primera secuencia pasa por múltiplos de 9, siendo los dos primeros los que se repiten y el tercero el que varía:

9 18 27 9 18 36 9 18 45 9 18 54 … 918 el siguiente múltiplo de 9

Del mismo modo, con múltiplos de 5:

5 10 15 5 10 20 … 5 10 siguiente múltiplo de 5

ACTIVIDAD 4 (OPTATIVA)[4]

Consideren los siguientes números, cada uno con infinitas cifras decimales:

i) 0,101101101101101101101…

ii) 0,101001000100001000000…

iii) 0,1010010110100101101001 01…

iv) 0,1010010100010100000101…

a) Indiquen cuáles son racionales y cuáles son irracionales.

b) Ordenen la lista de números de menor a mayor.

c) "Inventen" un número irracional que pueda intercalarse entre los dos primeros números de la lista en el orden que establecieron en el inciso anterior.

## Intención general de la actividad 4

Esta actividad propone afianzar lo ya realizado: analizar leyes de formación y producirlas. Ofrece, sin embargo, la novedad de comparar decimales no periódicos, recuperando estrategias anteriormente desplegadas para el caso periódico.

Esperamos que los y las estudiantes encuentren al menor número, irracional, comparando cada una de las cifras decimales iniciales de todos los números en cuestión. Así, el número irracional menor será el segundo (0,101001000100001…), que puede aceptar como regla de formación "se escriben las potencias de 10 en forma sucesiva". Le sigue el cuarto número, un irracional (0,101001010001010000…) que se puede explicar como "se alternan las potencias sucesivas de 10 a partir de $10^2$ y el número 10, comenzando con el 10".

4. Esta actividad está tomada del libro de texto *Huellas [4]ES Matemática*, de editorial Estrada (Chorny, Casares y Salpeter, 2017: 14).

Luego viene el tercer número, un racional (0,101001011010010110100101…) cuyo período es 10100101. Finalmente, el mayor de todos es el primero, un número racional (0,1011011011011101…) en el que hay que distinguir una parte que no se repite (10) y, a continuación, un período (110).

La consigna c) pide inventar un número irracional para intercalar entre el segundo (0,101001000100001…) y el cuarto número (0,101001010001010000). Es necesario darse cuenta de que el nuevo número coincidirá con los otros dos en sus primeras siete cifras decimales. No obstante, la restricción de tener dos números cuyas cifras sean solo 0 o 1 hace que la atención no se limite a la octava cifra decimal: hay que considerar también, al menos, la novena cifra. Solo después de haberse asegurado estar entre los dos números, se podrá pensar en una ley de formación para asegurar el desarrollo decimal no periódico.

Cada docente podría invitar a la clase a utilizar dígitos distintos de 0 y de 1 a partir de un lugar conveniente para preservar el orden; es decir, para asegurar que el número irracional que encuentren sea mayor que el segundo número y menor que el cuarto.

Como ya hemos propuesto para la actividad anterior, creemos necesario decidir con anticipación cómo hacer colectivas las producciones, de forma que se puedan analizar en común durante la clase. Seguramente alcanzará con analizar un par de ejemplos producidos, ya que tomar todos los que se hayan inventado es innecesario y poco posible en la clase.

## SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Consideramos que el estudio de los irracionales, comenzando por el análisis de leyes de formación, permite disponer de una inagotable variedad de ejemplos y de este modo entender a los irracionales como un conjunto infinito y no tanto como unos ejemplos “raros”. Por otra parte, esta forma de abordar los irracionales los ubica en una cierta paridad con los racionales ya que se analizan leyes de formación que pueden producir indistintamente tanto a unos como a otros.

En estas actividades se convoca a los y las estudiantes a producir variaciones de organizaciones numéricas para la construcción de números. Las implementaciones desarrolladas ofrecen evidencia de haber estimulado la creatividad de los y las estudiantes.

En el próximo capítulo, este conjunto de irracionales se nutrirá con la familia de irracionales dados por las raíces cuadradas de números enteros que no son cuadrados de otro entero. El objetivo es poder abordar nuevas cuestiones sobre los irracionales como, por ejemplo, la ubicación de los números en la recta. Esto marcará una diferencia con los irracionales dados por una ley de formación, cuya ubicación en la recta solo puede darse en forma aproximada (en finitos pasos).

CAPÍTULO 3

# Nuevas familias de números irracionales

## AMPLIAR LA MIRADA SOBRE LA IRRACIONALIDAD

En este capítulo se presentarán otros números irracionales diferentes a los que se obtienen a partir de una ley de formación. Es posible que los y las estudiantes conozcan algunos como $\sqrt{2}$, la raíz de un número primo, $e$, $\pi$, el coseno de algún ángulo, etc. Sabemos que el conocimiento sobre estos números puede ser muy variado, aun cuando no se hayan preguntado sobre ellos cuestiones que consideramos esenciales como, por ejemplo, su representación en tanto escritura.

En el recorrido de este apartado se propondrá, al igual que en los capítulos anteriores, un trabajo en torno a las explicaciones y argumentaciones. Más en particular, será objeto de estudio un cierto tipo de demostración matemática. Esta propuesta puede ser exigente para algunos grupos de estudiantes. No obstante, sostenemos que contar con una alternativa de este tipo en la escuela secundaria permite generar un diálogo en la clase en torno a diversos aspectos del quehacer matemático. Por ejemplo, qué es una demostración, qué lugar tiene en la matemática como disciplina y qué lugar en la actividad de los matemáticos y las matemáticas. En definitiva, abordar estas cuestiones permite poner en evidencia a la matemática como una práctica social enmarcada culturalmente. Las demostraciones que se realizan se validan según reglas aceptadas por la comunidad matemática en cierto momento y su producción está condicionada por las concepciones de la sociedad y de la comunidad de la que emergen.[1]

Para iniciar, proponemos instalar la pregunta acerca de la racionalidad o irracionalidad de $\sqrt{3}$ . Consideramos necesario desarrollar una indagación que estará en vínculo con las ideas construidas en los capítulos anteriores: por un lado, la posibilidad de leer en el visor de la calculadora la expresión decimal de un número; y por otro, la escritura decimal –finita o periódica– de las fracciones.

Con miras a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ , será necesario hacer una “parada” para cargar “combustible matemático”. Así, abrimos una sección especial destinada al estudio de propiedades de enteros múltiplos de 3 y sus cuadrados, y sobre las variaciones del caso. Hemos considerado que, en ausencia de estas ideas, el abordaje de la demostración se constituye en un “hueso duro de roer”.

Finalmente, se abordará la demostración de la irracionalidad de este número y se propondrá a los y las estudiantes avanzar en torno a ella para dar cuenta de la irracionalidad de otros números del estilo “raíz de primo” o, también, “raíz de producto de primos”.

Decíamos en la introducción al documento que lo propuesto en este capítulo podría ser exigente. En ese sentido, cada docente decidirá y evaluará hasta dónde desplegar –y con qué intención– la totalidad o parte de esta propuesta en vínculo con los conocimientos y los modos de producir de su clase.

## SECCIÓN 1: LA ESCRITURA DECIMAL DE RAÍCES CUADRADAS DE PRIMOS

Al finalizar el capítulo anterior, se instaló la pregunta sobre “qué números irracionales conocen”. En algunas implementaciones, parte de la clase reconoció a

1. Para profundizar estas ideas, invitamos a leer Sadovsky (2005).

las raíces de números primos como irracionales. En otras, ocurrió que los y las estudiantes creían no haber tenido contacto con otros números irracionales. La actividad que sigue apunta a instalar preguntas acerca de la expresión decimal de algunos de estos números, para luego dar sentido al análisis en torno a si son o no racionales.

## Intención general de la actividad 1

Con el objetivo de hacer visible la imposibilidad de generar en forma completa la escritura decimal de un número irracional como $\sqrt{3}$, se organizará en etapas una búsqueda y análisis de expresiones decimales cuyo cuadrado no supera a 3. En cada etapa se lanza una consigna para buscar números de expresión decimal finita que cumplen con una determinada condición. Dichas condiciones aseguran la obtención de números racionales con una cantidad creciente de dígitos idénticos a los que forman la escritura decimal de $\sqrt{3}$.

Esta actividad se desarrolla con las calculadoras disponibles en el aula y puede adoptar un formato de juego donde en cada etapa hay un grupo de estudiantes que resulta ganador. También puede asumirse como una actividad colectiva donde los distintos grupos van entrando en diálogo. Volveremos a esto una vez desplegadas las etapas.

El docente o la docente propone a la clase en forma oral:

ACTIVIDAD 1 (PRIMERA PARTE)

Ahora vamos a buscar y considerar números de hasta dos cifras decimales que al elevarlos al cuadrado sean menores o iguales que 3, es decir, números cuyos cuadrados sean menores o iguales que 3.

Luego, se sugiere escribir en el pizarrón la propuesta dada oralmente:

Pensar en un número $r$ de hasta dos cifras decimales que cumpla $r^2 \leq 3$.

Pueden ofrecerse algunos números para que los alumnos consideren si cumplen con esa condición o no. Proponemos estos ejemplos:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,2 | 2 | 0,78 | 2,3 | 1,453 | 1,9 | 1,5 |

Teniendo en cuenta los asuntos tratados en el capítulo 1, se puede proponer una fracción como $\frac{4}{3}$ con la intención de controlar que no es admisible dada su expresión decimal (ya que no tiene dos cifras decimales). Incluso se podría proponer $\frac{5}{4}$, que sí tiene una expresión decimal de dos cifras y, además, elevada al cuadrado es menor que 3. Finalmente, se podría proponer una fracción como $\frac{7}{4}$, cuya expresión decimal tiene dos cifras decimales pero no cumple con que al cuadrado sea menor o igual que 3.

Este primer análisis permite a la clase entrar en la actividad y comprender que la condición de hasta dos decimales se aplica al número original sin importar cuántas cifras decimales tiene su cuadrado. Esperamos que las y los estudiantes propongan descartar:

2 2,3 1,9 1,543 (este último porque tiene más de dos cifras decimales).

Para avanzar con la actividad, el o la docente pedirá:

Buscar, si existe, el más grande de todos los números de hasta dos cifras decimales que cumplen con esa condición.

En las clases donde se implementó la secuencia, hemos observado dos tipos procedimientos: están quienes utilizan el resultado que ofrece la calculadora de la operación $\sqrt{3}$ y quienes no lo tienen en cuenta. En este segundo caso hay exploraciones más o menos controladas. Algunas exploraciones suponen que el número tiene que ser menor que 2 y mayor que 1 porque $2^2$ es 4, y $1^2$ es 1. En función de este primer recorte, utilizan expresiones decimales con parte entera 1. Pueden probar de manera azarosa y débilmente orientada por el orden en los racionales, esperando tener suerte y apelando a la calculadora como el modo de control principal. Una primera exploración en una cifra decimal ubica al candidato entre 1,7 y 1,8. En algunos casos utilizan el promedio de números. Esa sería una razón para elegir 1,75. Como el cuadrado de este número supera a 3, se buscan nuevos candidatos. Finalmente, la exploración permite comprobar que 1,73 todavía cumple la desigualdad mientras que 1,74 tiene un cuadrado mayor que 3. Estas observaciones validan que el número mayor de dos cifras decimales cuyo cuadrado es menor o igual a 3 es 1,73.

Para dar por terminada la búsqueda, el docente o la docente podrá inquirir a los alumnos y alumnas acerca de la razón para estar seguros de que 1,73 es el mayor de todos, esperando que surja en la clase indicar que cuando utilizan 1,74 "se pasan". Esta estrategia, que aquí sirve para saber que se ha encontrado el mayor de todos, luego se podrá trasladar a otras cantidades de cifras decimales. Una vez que se haya validado que no hay otro mayor, el docente o la docente sentencia:

> El número mayor de dos cifras decimales cuyo cuadrado es menor o igual a 3 es 1,73.

Si algún grupo propone $\sqrt{3}$ , el docente o la docente puede sancionar esta propuesta indicando que los números pedidos tienen hasta dos cifras decimales y preguntar, por ejemplo, si $\sqrt{3}$ tiene dos cifras decimales. Así, queda del lado de los y las estudiantes descartarlo como respuesta. Consideramos una buena estrategia el no ofrecer información en esta instancia sobre otras características de $\sqrt{3}$ para ser descartado.

ACTIVIDAD 1 (SEGUNDA PARTE)

Vamos a buscar ahora el mayor número $r$ de hasta cinco cifras decimales que cumpla con la misma desigualdad: $r^2 \leq 3$.

En esta etapa, los grupos de estudiantes ya podrían estar más organizados para explorar, comprender la actividad y pasar a la búsqueda. Es posible que haya distintos candidatos que se podrán compartir en el pizarrón. En cada caso, el control se realizará comparando candidatos, descartando los mayores de números que "ya se pasaron" (una forma breve de decir que su cuadrado es mayor que 3) y aceptando números cuyo cuadrado es menor que 3. Cuando haya aparecido el candidato en la clase, el docente o la docente podrá sentenciar:

El mayor número de cinco cifras cuyo cuadrado es menor o igual que 3 es 1,73205.

Algunas ideas que pueden circular en la clase en este momento de exploración refieren al orden en los racionales. Así, se podrá conjeturar que cualquier número que comience con 1,72 y se complete con tres dígitos cualesquiera tiene un cuadrado menor que tres. De este modo se hace referencia a un conjunto de números que cumplen con la condición mientras se busca al mayor de ellos. Por otro lado, no cualquier número que comience como 1,73_ y se complete con tres dígitos está dentro del conjunto de los números cuyo cuadrado es menor que 3. Apoyándose en los números que se propongan, cada docente podrá inquirir a las y los estudiantes acerca de por qué saben y cómo pueden estar seguros de que el 1,73205 resulta el mayor de todos, esperando que la clase encuentre que cuando utilizan 1,73206 "se pasan", es decir que ya no cumplen la condición. De este modo, se hace explícito el orden en este conjunto numérico y la posibilidad de encontrar un siguiente en el conjunto de los números de hasta cinco cifras decimales.

En algunas implementaciones hemos observado que en el pasaje de dos a cinco cifras parece producirse una desconexión. Algunos grupos de estudiantes se abocan a buscar números menores que los encontrados anteriormente, tales como 1,22222. Con esta estrategia pierden de vista la búsqueda del mayor número. Será un buen momento para recuperar las ideas de orden revisitadas en el capítulo 1.

Algunos estudiantes pueden estar utilizando el truncamiento de $\sqrt{3}$ de modo efectivo sin poder hacer explícito por qué sirve este truncamiento. En nuestras implementaciones estos estudiantes eran una minoría, la cual se iba engrosando con las distintas exploraciones. Ahora bien, si fuera el caso de que ya toda la clase está utilizando un truncamiento de $\sqrt{3}$ es conveniente saltar la tercera parte de la actividad y pasar directo a la cuarta etapa, la de análisis.

Esta actividad podría tener una tercera parte en función de los hallazgos de la clase. De este modo, se podría continuar explorando números de hasta siete, nueve o diez cifras decimales en sucesivas etapas.

### ACTIVIDAD 1 (TERCERA PARTE)

Vamos a buscar ahora el mayor número $r$ de hasta siete cifras decimales[2] que cumplan con la misma desigualdad: $r^2 \leq 3$.

El objetivo de esta parte es tensar la actividad operatoria en la que tiene que involucrarse la clase para que surja en algún grupo de estudiantes la estrategia más económica de tomar el valor que la calculadora ofrece para $\sqrt{3}$ y cortar el desarrollo decimal. Además, nos interesa alimentar la confianza en que este procedimiento puede continuar. También nos importa que se mantenga en la clase un cierto clima de entusiasmo e interés por estas búsquedas.

Los valores que cumplen la consigna en cada caso son:

2. Como ya se dijo, esta actividad podría seguir con la búsqueda de números de hasta nueve y diez cifras decimales.

- para siete cifras decimales **el mayor número desiete cifras decimales cuyo cuadrado es menor o igual que 3 es 1,7320508**.
- para nueve cifras decimales **el mayor número de nueve cifras decimales cuyo cuadrado es menor o igual que 3 es 1,732050807**.
- para diez cifras decimales **el mayor número de diez cifras decimales cuyo cuadrado es menor o igual que 3 es 1,7320508075**.

Creemos que en algún momento deja de resultar viable seguir jugando o explorando, ya que la mayoría de las calculadoras o celulares podrían no tener las suficientes cifras decimales. En este sentido, la tecnología disponible en la clase aporta o limita la actividad. En el caso de nueve cifras decimales, algunas calculadoras muestran un redondeo (imagen 1).

1


Cuando el resultado de esa operación se eleva al cuadrado, la calculadora muestra el número 3 y por lo tanto sería aceptado. Si, en cambio, ese mismo valor se ingresa a mano, el resultado es mayor que 3 según la misma calculadora (imagen 2).

2

Esto trae al aula algunas cuestiones que permiten avanzar sobre la lectura crítica de la calculadora (una idea ya desplegada en el capítulo 1). Al mismo tiempo, creemos que cuando el costo de operar se incrementa, también se alimenta el interés de la clase en poner atención en la inecuación con la intención de manipularla o transformarla, de forma tal de tener una respuesta más eficaz que la exploración –a esta altura ardua– con la calculadora.

En las implementaciones realizadas, hubo estudiantes que consideraron que para estar tan cerca de 3 como fuera posible, había que elegir el número que resuelve la igualdad ($r^2 = 3$). Su solución llevó a que consideraran el número $\sqrt{3}$. En otros casos, los y las docentes promovieron revisar la inecuación buscando sacar más información de allí. En la escuela hay mayor desarrollo de prácticas algebraicas sobre igualdades que sobre desigualdades. Eso, junto al hecho de operar y comprobar que los resultados están cada vez más próximos a 3, estimula a ubicar la atención sobre la igualdad $r^2 = 3$.

En el momento en el que aparece en el aula el número $\sqrt{3}$ y su truncamiento como candidato para avanzar en la actividad propuesta, la docente o el docente puede redireccionar la actividad fuertemente exploratoria a un momento de reflexión para advertir dos cuestiones:

a) Las primeras cifras decimales de $\sqrt{3}$ estuvieron apareciendo en cada exploración.
b) Si se siguiera con esta actividad (esto significa hacer un planteo hipotético, no real) de considerar qué cifras deberían proporcionar si se les pidieran, por ejemplo, veinte cifras decimales, se podría seguir –aparentemente– utilizando los decimales de $\sqrt{3}$ con truncamiento (no con el redondeo que algunas calculadoras podrían ofrecer).

Este momento de análisis permite pasar de la actividad de búsqueda de estos números racionales a preguntarse por las características de las cifras decimales de $\sqrt{3}$ y, al mismo tiempo, por las condiciones para encontrarlas.

Existen algunas aplicaciones de calculadoras que se pueden descargar en el teléfono celular y permiten, al deslizar el resultado en su visor, encontrar muchas cifras, tantas que en ocasiones no hemos llegado a su final. Pensamos que este modo de deslizar y que la calculadora siga dando dígitos contribuye a que los alumnos consideren que la calculadora muestra “infinitos” dígitos. Aun con la aparición de este tipo de dispositivos, no se invalida la pregunta acerca de la cantidad de cifras detrás de la coma o de un posible período para la expresión decimal de $\sqrt{3}$.

## Comentarios sobre las etapas de exploración de la actividad 1

Creemos que la actividad se puede realizar en una modalidad del orden de un juego o no. Incluso se puede iniciar explorando y, cuando ya está comprendida, se lanza un tiempo de juego buscando un ganador para aquel que propone el número más grande en alguna de las etapas de la actividad. Es importante que los y las estudiantes tengan presente que se está buscando el “mayor” número posible que, al elevarlo al cuadrado, no supera a tres. Si esto no queda claro, la actividad se descontrola en varias exploraciones diferentes.

También resulta necesario pensar en cómo gestionar la cantidad de respuestas que se formulan en cada etapa, tanto con la clase como un todo como durante una actividad de pequeños grupos. Para ello puede resultar útil entregar una hoja a cada grupo donde haya un lugar para el número que es candidato y su cuadrado. Luego, se pedirán esas hojas para comandar el análisis conjunto de números hallados.

Es posible que los y las estudiantes confundan las características pedidas a los números con las pedidas para sus cuadrados (cuál tiene que ser el mayor y cuál el menor), sin dominar la cuestión de la monotonía del cuadrado, lo que no constituye un interés de estudio en esta instancia. Es posible, entonces, que haya que recordar durante la actividad qué números deben cumplir las condiciones pedidas. Creemos que la monotonía de la función $f(x) = x^2$ (elevar al cuadrado) en el conjunto de los positivos se podría utilizar de modo implícito. No vemos necesario detenernos aquí para pensar en abstracto en por qué ocurre esto, ni tampoco consideramos necesario compartir estas ideas en la clase.

Si el o la docente decide entregar el enunciado por escrito (en papel), consideramos conveniente –para mantener el control de la actividad– entregar en forma separada el enunciado de cada etapa. También creemos conveniente que en el pizarrón esté escrita en forma permanente la inecuación, ya que los y las estudiantes necesitan abordarla como algo a transformar. Por otra parte, no es necesario que el o la docente compare los cuadrados de los números que se proponen, basta chequear que cada cuadrado es menor que 3.

Para definir cada consigna hemos tenido en cuenta y evitado las cifras decimales nulas, y así sortear la discusión acerca de las cifras significativas ($\sqrt{3}$= 1,73205080756887729352…). En algunas implementaciones observamos que no resulta evidente para todos los participantes qué resultado se logra en cada instancia. Por eso, creemos que cada uno de ellos debería quedar escrito en el pizarrón.

## Etapa de análisis

Una vez instalada la clase en un momento de reflexión acerca de las exploraciones realizadas y los números encontrados, se puede compartir un conjunto de preguntas acerca de $\sqrt{3}$:

ACTIVIDAD 1 (CUARTA PARTE)

a) ¿Cuáles son los dígitos que tiene la expresión decimal de $\sqrt{3}$? ¿Los conocemos?
b) ¿Qué tipo de número es $\sqrt{3}$? ¿Tiene muchas cifras decimales? ¿Son finitas o infinitas?
c) Si tiene infinitas cifras decimales: ¿podemos decir que tiene un período?, ¿podemos decir que nunca tendrá período?

Seguramente, frente a este conjunto de preguntas que el docente o la docente podrá ir poniendo en consideración, los y las estudiantes van a recurrir a la calculadora, aunque no le tendrán mucha confianza en función de las actividades anteriores con racionales. El o la docente podrá evocar la necesidad que ya han tenido de controlar los resultados que ofrece la calculadora. En estas circunstancias es posible que admitan que no saben qué es lo que sigue, más allá de las cifras decimales que les muestra la calculadora.

Algún alumno o alumna podría decir que no se puede escribir como fracción porque es irracional o porque no tiene período, según lo que están viendo en los visores. En tal caso, el o la docente podrá cuestionar esa certeza sobre la falta del período. ¿No será que ese número tiene un período muy grande, como algunos que ya vimos?

En las implementaciones realizadas, la posibilidad de navegar por internet debilitó un poco la instalación de esta última pregunta (el uso de celulares permite por ejemplo preguntar por el número en cuestión y recibir como respuesta de la web[3] que se trata de un irracional). Es necesario tener en cuenta esta alternativa. Por otra parte, la presencia de calculadoras con gran cantidad de decimales no debilita la pregunta por el tipo de número ya que la clase ha pasado por racionales con una cantidad muy grande de cifras decimales en el período.

A lo largo de la actividad, el pizarrón y lo que en él se comparte puede contribuir a mantener el foco en las sucesivas búsquedas. Así, proponemos dejar por escrito a lo largo de toda la actividad:

- La inecuación
- Los números ganadores de cada fase y su cuadrado.

La actividad –con foco en la exploración y en la indagación– se considera lograda cuando se instala la siguiente pregunta: “¿Qué tipo de número es $\sqrt{3}$?”.

3. El ya mencionado sitio Wolfram Alpha, por ejemplo, indica que $\sqrt{3}$ es irracional y muestra la expresión decimal: 1.7320508075688772935274463415058723669428052538103806280558069794519330169088000370811461867572485756756261414154067030299699450...

La clase puede manifestar diversas posiciones acerca de la expresión decimal de este número:

a) Seguro es infinita
b) Es finita, pero tiene millones de decimales
c) No sabemos
d) Es infinita y tiene período, pero no lo vemos
e) Es infinita y no tiene período
f) Es irracional
g) Es racional

En la clase podrán circular muchas hipótesis y cierta incertidumbre acerca de qué es lo que se puede decir con certeza acerca de este número, y apoyados en qué razones. **Proponemos instalar la pregunta: "¿Es posible que $\sqrt{3}$ sea racional?".** Este es un buen punto de partida para avanzar hacia la sección en la que se propone estudiar la demostración. Cada docente podrá decir también que ahora van a empezar un estudio sobre $\sqrt{3}$ para saber más de este número.

## SECCIÓN 2: UNA PARADA TÉCNICA EN EL CAMINO HACIA LA DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE LA RAÍZ DE UN NÚMERO PRIMO

Usualmente, cuando se decide introducir alguna demostración sobre la irracionalidad de números, se apela a la clásica demostración por el absurdo de $\sqrt{2}$. Podemos identificar en esta demostración dos ideas que necesariamente se despliegan en su desarrollo:

- Un número positivo es racional si y solo si puede escribirse como cociente de números naturales sin primos comunes.
- Un número natural es par si y solo si su cuadrado es par.

El análisis matemático-didáctico de la demostración nos permite comprender que con ideas similares pueden abordarse demostraciones sobre la irracionalidad de otras raíces cuadradas. Así, esta "clásica demostración" genera también demostraciones de la irracionalidad de raíces cuadradas de cualquier número primo. Del mismo modo podemos demostrar la irracionalidad de raíces cuadradas de productos de un número arbitrario de primos diferentes, pues el desarrollo respeta este mismo esquema.[4]

En este capítulo, tal como lo hemos anunciado, proponemos impulsar en el aula un conjunto de actividades alrededor de algunas de estas demostraciones, para que den lugar a:

- Comprender la lógica detrás de una demostración por el absurdo.
- Constituir a esta demostración particular en objeto de estudio mediante la reproducción de esta demostración por el absurdo para distintos ejemplos, lo que permitiría un espacio de reflexión de las similitudes y diferencias entre ellos.
- Argumentar y confirmar la irracionalidad de infinitos números.

Consideramos que esta propuesta ofrece la posibilidad de concebir –para la enseñanza– un "carácter productor" de la demostración que, desde nuestra perspectiva, resulta más potente que la presentación en forma aislada de una demostración. Ahora bien, la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ incluye la comprensión del siguiente conjunto de ideas:

- Todo número racional se escribe como fracción, y toda fracción es un número racional. Es decir, no hay modo de escribir irracionales como fracciones.

4. Más aún, las ideas que se despliegan en esa demostración también permiten demostrar la irracionalidad de raíces cúbicas de primos, de raíces cúbicas de productos de primos distintos y, adicionalmente en el caso de la raíz cúbica, podemos considerar productos de primos distintos elevados a una potencia $n = 1$ o $n = 2$. Es claro que el camino de otras posibles demostraciones no se detiene aquí, pues, por ejemplo, las raíces de cualquier índice de primos llevan la misma demostración.

- Hay muchas fracciones (todas equivalentes) que representan el mismo número, pero hay una sola fracción **irreducible** que representa a un número racional.
- En la fracción **irreducible** $\frac{m}{n}$, los números enteros $m$ y $n$ no tienen divisores primos en común.
- Un múltiplo de 3 es de la forma $3 \times k$, con $k$ entero.
- Un número entero es múltiplo de 3 si y solo si su cuadrado es múltiplo de 3.

Estas dos últimas ideas enlazan con cuestiones de divisibilidad que los y las estudiantes pudieron o no haber trabajado con anterioridad (o que quizás, no tengan del todo disponibles). Creemos viable y necesario que cada docente pueda comunicarle a los y las estudiantes la conveniencia de recuperar algunas nociones sobre **enteros y divisibilidad** que serán necesarias al momento de pensar qué tipo de número es $\sqrt{3}$. Por eso, consideramos oportuno detener el rumbo de la clase hacia la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ y –haciendo explícita a la clase esta necesidad– ofrecer actividades que darán oportunidad de estudiar características de algunos enteros y sus cuadrados.

ACTIVIDAD 2

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, sabiendo que todos los números considerados son naturales, y justifiquen sus decisiones:

a) Si un número es múltiplo de 3, entonces su cuadrado es múltiplo de 3.
b) Si un número no es múltiplo de 3, entonces su cuadrado no es múltiplo de 3.
c) Si un número es múltiplo de 4, entonces su cuadrado es múltiplo de 4.
d) Si un número no es múltiplo de 4, entonces su cuadrado no es múltiplo de 4.

## Intención general de la actividad 2

En esta actividad, la clase se aboca a considerar enunciados relativos a operaciones, a multiplicidad y a divisibilidad en el campo de los números enteros. Se estudian y validan ideas necesarias en la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ y de la raíz cuadrada de cualquier número primo, que se propondrán en las actividades 3 y 4.

En la demostración de la irracionalidad de raíces de números primos se pone en juego una propiedad del campo de la divisibilidad que en forma general podemos enunciar como:

> Un número natural es múltiplo de un primo si y solo si su cuadrado es múltiplo de ese primo.

En lo que sigue, realizamos una propuesta pensando en estudiantes que no han abordado antes esta idea. La forma en la que cada docente lo proponga en su clase dependerá del trabajo que se haya realizado anteriormente en el estudio de la divisibilidad y de propiedades generales en este campo.

## Resolución y despliegue en el espacio colectivo

Para abordar esta actividad, los y las estudiantes se apoyarán en alguna definición de "ser múltiplo".[5] Por ejemplo:

- Un **múltiplo** de un número se escribe como ese número por otro natural cualquiera.
- Si un número es **múltiplo** de otro, al dividir el múltiplo por el número el resto (en la división entera) nos da cero (el múltiplo es "divisible" por el número).

5. Podrían aparecer en la clase distintas ideas que resultan equivalentes: "ser divisible", "se puede dividir", "es múltiplo".

Pueden aparecer también otras ideas próximas a técnicas o procedimientos tales como que la **descomposición en factores primos** de un número nos permite saber de cuáles es múltiplo, o dicho de otro modo nos permite conocer sus divisores.

Para el ítem a), seguramente los y las estudiantes comiencen explorando algunos ejemplos y sostengan argumentos tales como:

- "54 es múltiplo de 3, porque $18 \times 3 = 54$", o bien, "54 dividido 3 es 18 exacto, tiene resto 0";
- "$54^2 = 2916$, y 2916 dividido 3 es 972 con resto 0", o también, "$2916 = 972 \times 3$".

Pensando en los argumentos generales que hacen verdadera esta afirmación, será interesante atender el modo de escritura de los ejemplos propuestos, pues podrían ser apoyo de argumentos más generales. Por ejemplo, si solo se considera que 54 es múltiplo de 3 teniendo en cuenta el resto 0 en la división, podemos proponer $54 = 3 \times 18$ para poner en evidencia cierta escritura que trasciende al ejemplo. A su vez, a partir de esta escritura es posible analizar que el cuadrado de 54 también es un múltiplo de 3 sin necesidad de recurrir a ese resultado ($54^2 = 2916$) ni a realizar la división de 2916 por 3. Es decir, mantener la traza de esta escritura al elevar al cuadrado a 54, esto es $54^2 = (3 \times 18)^2 = 3^2 \times 18^2 = 3\times(3 \times 18^2)$, permite leer más allá del ejemplo. Esta escritura podría ser puesta en juego por una alumna o alumno, o ser planteada por el o la docente.

Es posible que, a partir de un análisis similar al descrito, haya quienes se convenzan de la veracidad de la afirmación aun apoyándose solo en algunos ejemplos. Consideramos necesario avanzar hacia un abordaje general tal como "cualquier múltiplo de 3" o "todos los múltiplos de 3". Dependiendo de la experiencia de los y las estudiantes acerca de esta cuestión, será necesario sostener la pregunta:

¿Cómo puedo saber –y convencer a otro– que también es verdad para todos los números múltiplos de 3? ¿Cómo sé que es verdadera para números muy grandes múltiplos de 3?

Se puede proponer considerar el número 11111….1111 formado por la repetición del 1 treinta veces, que sabemos que es múltiplo de 3 porque la suma de los dígitos es 30 (que es múltiplo de 3). ¿Cómo sabemos que su cuadrado también es múltiplo de 3?

Estos ejemplos que cada docente puede ofrecer se plantean justamente con la intención de señalar la necesidad de trascender los ejemplos para asegurar la validez de una afirmación como esta:

A los múltiplos de 3 se los puede escribir como “3 por algo”, por ejemplo $3 \times r$, y al elevar al cuadrado se tiene $(3 \times r)^2 = 3^2 \times r^2 = 9 \times r^2$. Esto permite leer que son múltiplos de 9 y, por lo tanto, también lo son de 3, ya que $9 \times r^2 = 3 \times (3 \times r^2)$, es decir, es “3 por algo”.

Como conclusión: si consideramos un múltiplo de 3, su cuadrado es múltiplo de 3 y, además, ese cuadrado es también múltiplo de 9 siempre.

Se puede hacer este planteo con la escritura de $3 \times r$ en paralelo a algún ejemplo que hayan propuesto las y los estudiantes con la intención de reconocer a la letra en cada ejemplo. Retomamos, en nuestro caso, con el 54:

| | |
|---|---|
| $3 \times r$ | $54 = 3 \times 18$ |
| $(3 \times r)^2 = 9 \times r^2 = 3 \times (3 \times r^2)$ | $54^2 = (3 \times 18)^2 = 3^2 \times 18^2 = 9 \times 18^2 = 3 \times (3 \times 18^2)$ |

Si en el aula alguien quisiera pensar en reglas de la divisibilidad (“un número es múltiplo de 3 si sus cifras suman un múltiplo de 3”), se vería en la necesidad de pensar qué ocurre con esas cifras al elevar al cuadrado, lo que consideramos que lleva a un trabajo muy engorroso. No creemos necesario inhabilitar estos razonamientos, pero sí alentar a que se apoyen en otras ideas luego de algunos ensayos.

También –más informalmente– algún grupo de estudiantes puede proponer: “Si un número es **3 por algún otro número**, su cuadrado es hacer un producto de esta escritura dos veces, entonces quedará 3 por algún número, por 3 por algún número, y el 3 estará en ese cuadrado”. Esta expresión resulta más coloquial, pero denota una cierta comprensión del argumento. Llegados a este punto, se podrá dar por verdadera la afirmación.

En el ítem b) también es posible que los y las estudiantes exploren ejemplos para empezar (como en el caso anterior). Pensando en argumentos que pueden ser abordados en este momento de la escolaridad, consideramos que la siguiente idea puede ser un apoyo:

> Si consideramos cualquier número natural $n$ y su factorización en primos, el cuadrado de $n$, esto es $n^2$, tendrá en su factorización en primos a los mismos primos que $n$, elevados al cuadrado.

El análisis de un ejemplo puede ayudar a darle más forma a esta idea: $14 = 2 \times 7$ (que no tiene un 3 en su factorización en primos). Su cuadrado, $14^2 = 2^2 \times 7^2$ tendrá 2 y 7 en su descomposición en primos (pero no va a tener 3 en su factorización en primos). De manera general, si un número no es múltiplo de 3, no se puede escribir como $3 \times r$ y, por esta razón, sabemos que el 3 no aparece en su escritura como producto de primos, sino que aparecen otros primos. Entonces, al elevar al cuadrado tampoco aparecerá un 3, porque al elevar al cuadrado vuelven a verse los mismos primos, pero elevados al cuadrado.

Esta explicación se sustenta en conocimientos que seguramente las y los estudiantes no tengan formalmente establecidos pero que sí asuman de modo intuitivo. Nos referimos a la existencia y unicidad de la factorización en primos. Por otro lado, resaltamos el valor de poder establecer explicaciones generales cuando se apoyan en el análisis de un ejemplo y están acompañadas de un discurso que toma distancia del caso particular que registra.

## Primeras conclusiones a registrar

A modo de síntesis del análisis de los incisos a) y b), proponemos dejar por escrito en el pizarrón las primeras conclusiones:

> Mirando en conjunto estas dos primeras afirmaciones, y considerando cualquier número natural $n$, tenemos solo dos posibilidades: que sea múltiplo de 3 o que no lo sea.
>
> - Si $n$ es múltiplo de 3, entonces su cuadrado también lo es.
> - Si $n$ no es múltiplo de 3, entonces su cuadrado tampoco lo es.

El análisis para el ítem c) es similar al desplegado en el ítem a). A partir de ejemplos, será posible realizar una generalización y concluir que es verdadera. Finalmente, en el ítem d), a partir de una exploración con ejemplos, las y los estudiantes pueden concluir que la afirmación es falsa: los estudiantes pueden concluir que la afirmación es falsa porque pueden encontrar números que no son múltiplos de 4 pero sus cuadrados sí lo son (por ejemplo 10) aun cuando haya otros números no múltiplos de 4 cuyos cuadrados tampoco lo son. Quizás haya estudiantes que consideren que la afirmación del ítem d) es verdadera porque para algunos valores sí se cumple; en ese caso, será necesario consensuar que la afirmación es falsa. Cada docente puede comunicar que en matemática una afirmación que establece una cierta propiedad o característica para un conjunto de objetos tiene que ser verdadera en cada uno de esos objetos; en este caso, como hay números que no la cumplen, la afirmación no se cumple siempre y por lo tanto es falsa.

El análisis de los contraejemplos en el espacio colectivo permite comprender mejor el rol que tienen los factores primos de un número y su cuadrado al estudiar la divisibilidad por otro número. Si bien es importante dejar en claro que un contraejemplo es suficiente para negar la afirmación, la presencia de una variedad de contraejemplos podría servir para analizar la pregunta:

> ¿Cómo es posible saber, sin hacer las cuentas, que el cuadrado del número sí es múltiplo de 4 mientras que el número no lo es?

Por ejemplo, aquí podría apelarse de nuevo a dejar la traza de los cálculos involucrados:

$$14 = 2 \times 7 \text{ y } 14^2 = (2 \times 7)^2 = 2^2 \times 7^2 = 4 \times (7^2)$$

Luego, cada docente podrá preguntar en forma general:

> ¿Por qué hay algunos números no múltiplos de 4 que al elevarlos al cuadrado sí son múltiplos de 4?.

Esto permitirá analizar que, si en su descomposición en primos no hay un 4 pero sí hay un 2, al elevarlo al cuadrado se obtiene un factor 4. Es decir, hay números que al elevarlos al cuadrado dan un múltiplo de 4 y, sin embargo, esos números no son múltiplos de 4.[6]

Para la demostración sobre irracionalidad de $\sqrt{3}$, se necesitará tener disponible la siguiente afirmación:

> Si el cuadrado de un número es múltiplo de 3, entonces el número es múltiplo de 3.

6. En algunas aulas de la implementación, estos análisis dieron lugar a formular nuevas conjeturas como “si un número no es múltiplo de 2 (y por lo tanto tampoco es múltiplo de 4), entonces su cuadrado no es múltiplo de 4” o “si un número no es múltiplo de 4 y es impar, entonces su cuadrado no es múltiplo de 4”.

## Nuevas afirmaciones para profundizar el estudio

Con el fin de explicitar esa formulación, podrían plantearse en el espacio colectivo dos nuevas afirmaciones para analizar.

ACTIVIDAD 2 (CONTINUACIÓN)

e) Si el cuadrado de un número es múltiplo de 4, entonces el número es múltiplo de 4.

f) Si el cuadrado de un número es múltiplo de 3, entonces el número es múltiplo de 3.

Estas afirmaciones no son del todo nuevas luego del trabajo previo en esta actividad. Creemos que la clase podrá establecer que la e) es falsa mientras que la f) es verdadera recuperando las ideas trabajadas hasta aquí. Otra opción de gestión podría ser que cada docente proponga un análisis como el que sigue en el pizarrón:

> Considerando cualquier número natural $n$, habíamos acordado –luego de los incisos a) y b) de esta actividad– que tenemos solo dos posibilidades: que sea múltiplo de 3 o que no lo sea.
>
> - Si $n$ es múltiplo de 3, entonces su cuadrado también lo es.
> - Si $n$ no es múltiplo de 3, entonces su cuadrado tampoco lo es.

Por lo tanto, si tenemos un número natural $n$ cuyo cuadrado es múltiplo de 3, la única opción posible es que $n$ también sea múltiplo de 3. Para dar mayor énfasis a estas ideas nos ha resultado productivo en algunas implementaciones imaginar que los números naturales pueden organizarse en dos cajas: la caja de los múltiplos de 3 y las de los no múltiplos de 3. Si sacamos un número de la caja de los múltiplos de 3, el cuadrado de ese número está en esa misma caja. Si sacamos un número de la caja de los no múltiplos de 3, su cuadrado también está en la misma caja. Por lo tanto, cada número y su cuadrado pertenecen a la misma caja.

## Conclusiones a registrar finalizada la actividad 2

Los múltiplos de cualquier número $a$, al elevarlos al cuadrado, también son múltiplos de $a$ y también son múltiplos de $a^2$. En esta actividad, analizamos los casos $a = 3$ y $a = 4$.

¿Es cierta, entonces, la siguiente afirmación?

> "Si el cuadrado de un número es múltiplo de $a$, entonces el número es múltiplo de $a$."

A veces sí y a veces no, depende de $a$. Analizamos que si $a = 3$, sí se cumple; pero si $a = 4$, no.

En algunas aulas, podrían surgir conjeturas que van un poco más allá. Por ejemplo:

> Cuando $a$ es primo, si un número al cuadrado es múltiplo de $a$, entonces el número es múltiplo de $a$.

Consideramos que esta generalización –aunque muy conveniente para las ideas que se precisarán en las distintas demostraciones que serán propuestas– puede resultar muy exigente en este momento de la secuencia. Por eso, alentamos a dejar latente esta formulación en la medida en que no surja de los y las estudiantes. La formularemos recién en el momento en el que sea necesaria.

### SECCIÓN 3: HACIA LA DEMOSTRACIÓN

Dado que la última actividad desarrollada ha llevado a la clase a considerar problemas de divisibilidad entre enteros, será necesario reponer cuestiones analizadas: preguntas y conjeturas. Para el caso de los números racionales, será preciso recuperar la relación entre su escritura como fracción y su expresión decimal. Para el caso de los números irracionales, será conveniente recordar su expresión decimal infinita y carente de período. Esto permitirá recordar la pregunta pendiente de respuesta: ¿qué clase de número es $\sqrt{3}$?

ACTIVIDAD 3

## Intención general de la actividad 3

Esta actividad tiene un formato diferente a todas las que presentamos hasta ahora, organizadas a partir de una consigna para la clase. En efecto, estamos considerando un diálogo entre cada docente y sus estudiantes a propósito de preguntas o afirmaciones que permitan ir desplegando la demostración. Este desarrollo está fuertemente apoyado en un registro escrito en vínculo con algunas ideas que se explicitarán oralmente. Por eso, decidimos esbozar un recorrido posible tanto de las ideas en lo oral que cada docente puede ir desplegando, como también del necesario registro escrito en el pizarrón. Este registro escrito, a su vez, será insumo para la siguiente actividad.

## Desarrollo de la actividad 3

Retomando la pregunta **“¿es posible que $\sqrt{3}$ sea racional?”**, instalada al finalizar la primera sección, cada docente podría dar un espacio para pensar cómo desarrollar esta cuestión. Habrá estudiantes que quizás consideren algunos cocientes de enteros (claro que esto resulta una tarea sin fin). Frente a esta alternativa, el o la docente podría proponer escribir a $\sqrt{3}$ como una fracción genérica $\frac{m}{n}$, iniciando de este modo el camino de la demostración.[7]

7.A partir de aquí, en este capítulo escribiremos *en cursiva* aquellas ideas que creemos que cada docente puede comunicar de forma oral para desarrollar la demostración; y, con un fondo de color, aquellas cuestiones que creemos necesario que queden registradas y a la vista en el pizarrón.

A continuación, presentamos un modo posible de trabajo en la clase, entendiendo que es solo una alternativa. Proponemos alentar a los y las estudiantes a prestar toda la atención a las ideas que se van a escribir en el pizarrón (así como también señalamos qué afirmaciones consideramos indispensables ir registrando), ya que una vez llegado al final será necesario revisar la estructura y la lógica.

*Vamos a suponer que* $\sqrt{3}$ *es un número racional y vamos a analizar a partir de allí a qué conclusiones arribamos. ¿Qué podemos hacer si sabemos que es racional? Lo podemos escribir como una fracción. ¿Qué tipo de fracción podemos utilizar?*

Es necesario explicitar que no estamos en condiciones de decir cuál es la fracción, solo suponer que existe. Por eso la escribimos, de un modo genérico, con dos letras. Esperamos llegar a alguna conclusión sobre esos números representados por letras.

*Podemos elegir una fracción que esté simplificada todo lo posible; es decir, que no tenga factores en común. A esta fracción la llamamos "irreductible"* (hacer público este nombre es elección de cada docente).

A continuación, un posible registro en el pizarrón:

$\sqrt{3}$ es racional, entonces $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$

$m$ y $n$ son números naturales sin factores en común, $n \neq 0$

$\frac{m}{n}$ es una fracción irreducible

Cada docente podría continuar con la siguiente pregunta:

*¿Qué podemos hacer con la igualdad?*

Sabemos que puede ser ambigua o amplia para sus estudiantes y, aún más, que a partir de la pregunta podrían sugerir caminos que no permitan avanzar en la demostración. En caso de que se proponga la pregunta, sería conveniente dejar un tiempo para que los y las estudiantes exploren qué hacer con esta igualdad. Algunos pueden considerar multiplicar por distintos números. Esperamos que surja la idea de elevar al cuadrado ambos miembros y, si no, puede proponerlo el docente o la docente.

*Realicemos algunas operaciones, por ejemplo elevar al cuadrado ambos miembros, con la intención de que en la ecuación deje de aparecer este objeto raíz del que mucho no sabemos y aparezcan otros de los que sabemos algo más.*

$(\sqrt{3})^2 = (m/n)^2$

$3 = \frac{m^2}{n^2}$, así escribimos el 3 como un cociente de números

*Ahora, ¿qué nos dice esa igualdad? Así, tal vez no mucho; pero si multiplicamos por $n^2$, obtenemos:*

$3n^2 = m^2$ que es lo mismo que decir $m^2 = 3n^2$ *

Queremos en este momento invitar a los y las estudiantes a hacer una lectura e interpretación de la expresión sobre relaciones de divisibilidad. Para ello, se les podría preguntar: *¿Hay alguna información que podemos extraer de esa igualdad?* Nos interesa poder encontrar afirmaciones acerca de $m^2$ y no focalizar en interpretaciones sobre $n^2$.

*Resulta que así queda escrito* m *al cuadrado como 3 por un número, y ese número es entero porque es el cuadrado de un número entero, que es* n. *¿Qué nos dice esta escritura sobre el número* $\mathrm{m}^2$*? O bien, ¿qué consecuencias tiene esta escritura para el número* $\mathrm{m}^2$*?*

En este punto del desarrollo de esta demostración necesitamos arribar a la conclusión de que $m^2$ es múltiplo de 3 (esta conclusión se lee de manera bastante directa al tener “cerquita” la actividad 2 de la sección anterior).

> $m^2$ es múltiplo de 3

*A partir de esta afirmación, ¿qué podemos decir del número* m*?*

Recurriendo a los conocimientos sobre divisibilidad o a la actividad 2, se puede afirmar que $m$ también es múltiplo de 3.

> $m$ es múltiplo de 3

A partir de aceptar que $m$ es múltiplo de 3, el o la docente puede preguntar a la clase si esto da lugar a alguna escritura que haga evidente esta característica. Se espera poder explicitar que:

> $m$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow m = 3r$ (en esta expresión, $r$ es un número natural)

En este momento, el o la docente puede instalar una nueva pregunta:

*Ahora que ya avanzamos un poco más, que sabemos que* m *es múltiplo de 3 y de la forma* 3r*, ¿qué podemos decir de* $m^2$*? ¿Qué sucede si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad* m = 3r*?*

> $m^2 = 9r^2$

*¿Podemos saber algo más de lo que ya sabíamos antes? Antes decíamos que* $m^2$ *es múltiplo de 3. Pero la igualdad que acabamos de escribir nos da más información sobre* $m^2$.

Los y las estudiantes podrán deducir que:

$m^2$ es múltiplo de 9.

Sustituimos esta expresión de $m^2$ en * y obtenemos:

$$9r^2 = 3n^2$$

Dividimos por 3, para encontrar una expresión más simplificada y nos queda:

$$3r^2 = n^2$$

*¿Qué podemos leer de esta expresión?*

$n^2$ es múltiplo de 3

$n$ es múltiplo de 3.

Lo que sigue será el nudo de la demostración por el absurdo: reconocer la contradicción. Entendemos que esta parte estará fuertemente comandada por el discurso docente, que estará atento al reconocimiento de la contradicción en términos matemáticos.

Una posibilidad para gestionar esta parte de la clase es apelar a todo el desarrollo escrito en el pizarrón y recorrer con la clase todas las afirmaciones realizadas señalando:

- Con qué idea se inició
- Qué pasos se dieron
- A qué idea se arribó

Este "revisar" lo realizado ayuda a comprender que no hay nada visible que esté "mal hecho" o que sea incorrecto matemáticamente y que, suponiendo que la idea que fue punto de partida es correcta, todas las ideas que se obtuvieron a partir de ella también son correctas.

En este punto los y las estudiantes no necesariamente reconocerán alguna contradicción en todo lo desarrollado. Será parte del discurso docente reponer:

*¿Qué tenemos hasta acá? A partir de todo este desarrollo, llegamos a la conclusión que* m *y* n *son múltiplos de 3, es decir que tienen a 3 como factor común... pero habíamos dicho que* m *y* n *no tenían un factor común. Esto contradice la suposición inicial, ya que partimos de escribir a* $\sqrt{3}$ *como una fracción con números que no tenían primos en común y, por lo tanto, ambos no pueden ser múltiplos de 3.*


*Esto nos lleva a pensar que la hipótesis de la que partimos no es correcta, ya que nos conduce a algo contradictorio. ¿De dónde partimos?*

*Hemos dicho que* $\sqrt{3}$ *es un número racional, que se escribe como una fracción. De ese supuesto se deriva que dos números (numerador y denominador) no tienen primos en común y luego se deriva que ambos son múltiplos de 3. Entonces la suposición original "*$\sqrt{3}$ *es un número racional" debe ser falsa. O sea, es falso que* $\sqrt{3}$ *sea racional. Y, por lo tanto,* $\sqrt{3}$ *es irracional.*

Contradicción o absurdo:
Es falso y, por lo tanto, $\sqrt{3}$ es irracional.
Hemos demostrado que $\sqrt{3}$ es irracional. Por lo tanto, su expresión decimal es infinita no periódica.

Para avanzar en la propuesta necesitamos que en este momento los y las estudiantes registren en sus carpetas todos los pasos de la demostración que está en el pizarrón. Podría ser un registro digital como una foto, lo importante es que permita capturar todo el desarrollo del pizarrón para luego volcarlo a la carpeta, ya que este material se reutilizará (también se pueden considerar variantes para disponer de esta demostración en distintos formatos). Además, cada docente puede recapitular las ideas esenciales por las que se ha pasado y sus vínculos con distintos puntos del registro escrito de modo tal que los y las estudiantes tomen nota.

## Acerca de las demostraciones en matemática y en particular las demostraciones por el absurdo

Comentamos al inicio de este capítulo la intención de trabajar con las demostraciones como modo de aproximarnos a la matemática como disciplina y de buscar comprender el funcionamiento de sus reglas. En ese sentido, las demostraciones por el absurdo son un tipo de demostración aceptada y producida por la comunidad matemática.

Cada docente puede comentar, finalizada la demostración, que esta serie de encadenamientos de supuestos y consecuencias constituye una "demostración por el absurdo". En este tipo de demostraciones se postula como falso aquello que se quiere probar; es decir que se supone verdadero lo contrario a lo que se quiere demostrar y, tras una sucesión de encadenamientos deductivos, se llega a una contradicción.

Se puede dar un ejemplo sencillo en el que sabemos que siempre hay estudiantes con dudas acerca de la veracidad de una determinada afirmación. Por ejemplo, podemos considerar la afirmación: "$\frac{8}{0}$ no está definido". El hecho de que la división por cero no está permitida es a veces poco problematizada en la escuela. En consecuencia, los y las estudiantes tienen una idea de que la operación no es posible sin acceder al por qué.

En un caso así, el o la docente podría proponer:

*Supongamos que sí está definido* $\frac{8}{0}$ *y es igual a un número* n*, entonces podemos escribir la igualdad* $\frac{8}{0} = \mathrm{n}$.

Y luego, seguir razonando deductivamente con la clase:

*Entonces* $8 = \mathrm{n} \times 0$ *pero* $\mathrm{n} \times 0 = 0$ *para cualquier valor que sea* n *(incluido* $\mathrm{n} = 0$*).*

De este modo, se puede poner en evidencia que se llegó a una afirmación falsa, $8 = 0$, que provino de suponer que $\frac{8}{0}$ está definido.

Esta propuesta permite introducir a los y las estudiantes a una introspección sobre los modos de razonar en matemática. En este caso puntual sirve para ver cómo, partiendo de algo falso, se llega a conclusiones inverosímiles o inconsistentes. Distintos ejemplos de razonamientos que parten de cuestiones evidentemente falsas pueden derivar en conclusiones evidentemente falsas también. No obstante, necesitamos precisar que en la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de un número primo no es esto lo que ocurre, sino que el punto final contradice el punto de partida.

## Intención general de la actividad 4

Como mencionamos al inicio de este capítulo, la presentación de la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ en este momento tiene la intención –más general– de dar acceso a nuevos modos de generar conocimiento en la matemática a través de las demostraciones por el absurdo. A su vez, "hacer funcionar" esta demostración permite introducir a la clase en una nueva actividad: la posibilidad de que los y las estudiantes reutilicen esta demostración para demostrar la irracionalidad de otros números. Se abona a la idea de infinitud de una cierta familia de irracionales (aquellos que provienen de raíces cuadradas de números naturales que no son cuadrados exactos) y, de este modo, continuar avanzando en la comprensión de la infinitud del conjunto de los irracionales. Por lo tanto, en esta actividad se propondrá reelaborar la demostración realizada para $\sqrt{3}$ con nuevos casos como $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{2}$.

## Introducción a la actividad

Para llegar a esta actividad es necesario que las y los estudiantes tengan a mano un registro de la demostración de que $\sqrt{3}$ es irracional. Para ello, el o la docente puede proyectar la foto del desarrollo de la demostración realizada en el pizarrón anteriormente, compartirla en un grupo de WhatsApp o utilizar algún soporte digital que tenga la clase, como un aula virtual.

El inicio de esta actividad puede ocurrir a partir de una pregunta planteada por el o la docente en el espacio colectivo:

> *¿Habrá otras raíces de números naturales que también sean números irracionales? ¿Serán todas las raíces cuadradas de números naturales números irracionales?*

La idea es que empiece un intercambio entre docente y estudiantes en donde se propongan números de la familia "raíz cuadrada de un natural" que les parezcan irracionales. Cada docente puede proponer ejemplos como $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{13}$, $\sqrt{4}$; o $\sqrt{9}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$, etc. En este momento se puede dejar a modo de conjetura:

> *Habrá raíces que son números enteros y otras que son números irracionales.*

Es de esperar que si el o la docente propone considerar las siguientes raíces, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{2}$, los y las estudiantes sostengan que son números irracionales. Es el momento de lanzar la consigna:

ACTIVIDAD 4

Si consideramos que los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{2}$ son irracionales, será necesario que lo demostremos de manera similar a como lo hicimos con $\sqrt{3}$. Para ello será necesario tener a mano aquella demostración.

## Organización de la actividad

La clase se organiza en cuatro grupos de estudiantes y a cada grupo se le propone que, considerando las ideas de la demostración para $\sqrt{3}$, elaboren en forma análoga una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{2}$. Cada grupo se hará cargo de solo una de las raíces. Luego, en el espacio colectivo, compartirán con el resto sus demostraciones. De este modo, toda la clase demuestra que estos cuatro números son irracionales.

Si las condiciones del aula no permiten un trabajo en cuatro grupos, se puede proponer un trabajo en parejas o –eventualmente– individual, distribuyendo entre toda la clase las cuatro raíces.

## Ideas que pueden desplegarse para la resolución

A partir de apuntes o fotos del pizarrón de la actividad anterior, esperamos que las y los estudiantes puedan decidir cuál es el supuesto a enunciar y también que detecten en qué momento llegan a un absurdo. Es decir, los y las estudiantes necesitan reconocer ciertos pasos o mojones en la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ que pueden reproducir, por ejemplo, para demostrar que es un número irracional:

- Es necesario partir del **supuesto** de que $\sqrt{5}$ es **racional**.
- A partir de esta suposición tienen que escribir que $\sqrt{5} = \frac{s}{t}$ y que estos números naturales se pueden elegir **sin primos en común**.

- **Operar** sobre la igualdad **elevando al cuadrado** para quedar en una igualdad de números enteros $5t^2 = s^2$.
- Leer en esta expresión que hemos encontrado un **múltiplo de 5** que es $s^2$.
- Reutilizar una idea similar a la utilizada para tres: **"Si el cuadrado de un número es múltiplo de 5, entonces el número también lo es"**. La certeza de esta enunciación puede quedar ligada al desarrollo realizado en la actividad 2, donde se propuso un caso (para el 3) en donde esta afirmación es cierta, y un caso (para el 4) en donde no. La generalidad que se haya logrado en ese momento ("es cierta para cualquier número primo") permitirá mayor o menor confianza en la afirmación para 5 (en el último caso, quizás se requiera un momento de exploración y justificación de la misma).
- Deducir que ***s*** **es múltiplo de 5** y llevar esto de nuevo a la igualdad $5t^2 = s^2$ reescribiendo esa información en el lugar del cuadrado de $s$, es decir, escribir a $s$ como $5k$.
- Deducir que la nueva igualdad $5t^2 = 5^2 \times k^2$ también informa que ***t*** **es múltiplo de 5**.
- Llegar a la conclusión de que ambos, $s$ y $t$, son múltiplos de cinco, y reconocer esta afirmación como una **contradicción**.

El o la docente podrá ir interviniendo en los diversos grupos o parejas para destrabar eventualmente algunas escrituras y ayudar a precisar ideas.

## Momento colectivo

Una vez que cada grupo o pareja haya finalizado su demostración, se les puede pedir que hagan pasar al pizarrón a un o una representante para que la comparta con el resto de la clase. Si es posible, al final deberían poder verse las cuatro demostraciones juntas en el pizarrón.

Este momento colectivo de escritura de las demostraciones en el pizarrón no es solo un momento de "puesta en común" de lo realizado. También sirve para que cada docente trabaje sobre las escrituras, ayudando a precisarlas. Por ejemplo, a medida que un o una estudiante escribe en el pizarrón la demostración que hicieron, se puede ir haciendo sugerencias como *¿por qué escriben eso?* o *lo que están diciendo, escríbanlo también.*

Por otro lado, la intención es que en este momento colectivo con las producciones de cada grupo se vayan visualizando qué “paradas” tuvieron que hacer en función del número que estuvieron analizando. Esto se puede generar a partir de preguntas:

- *¿Todos escribieron la raíz del número como* $\frac{s}{t}$*?*
- *¿Todos elevaron al cuadrado?*
- *El grupo del pizarrón (*$\sqrt{5}$*) señaló que* ***“si el cuadrado de un número es múltiplo de 5, entonces el número también lo es”****. Y también llegaron a que* **s** ***es múltiplo de 5 y también*** **t** ***es múltiplo de 5****. ¿Tuvieron que usar estas ideas los demás grupos? ¿Llegaron a la misma conclusión o a conclusiones similares? Seguramente, aparecerán diferencias en cuanto a que llegaron a múltiplo de 7, de 11 o de 2.*

Al finalizar el análisis de las cuatro demostraciones, poniendo en evidencia las “paradas” necesarias de la demostración, se pueden dejar registrados esos pasos que todas comparten.

## Ideas para dejar registradas al final de la actividad

Si queremos demostrar que $\sqrt{n}$ , en donde $n$ es natural y primo, es un número irracional, tenemos que realizar una demostración que siga estos pasos:

- Suponer que $\sqrt{n}$ es **racional**.
- Escribir $\sqrt{n}$ como una fracción $\frac{s}{t}$ en donde $s$ y $t$ **no tienen primos en común**, es decir que es una **fracción irreducible**.

- Operar sobre la igualdad **elevando al cuadrado** para obtener una igualdad de números enteros.
- Leer en esta expresión que hemos encontrado **un múltiplo de *n*** que es $s^2$.
- Reutilizar una idea que ya usaron para el 3: **"Si el cuadrado de un número es múltiplo de *n*, entonces el número también lo es dado que *n* es primo"**.
- Deducir que ***s* es múltiplo de *n***.
- Deducir que ***t* es múltiplo de *n***.
- Llegar a la conclusión de que ambos, $s$ y $t$, son múltiplos de $n$ y reconocer esta afirmación como una **contradicción** con la suposición de que $\frac{s}{t}$ era una fracción irreducible. Por lo tanto, $s$ y $t$ no tienen primos en común.

Un desarrollo similar al realizado en la actividad 3 puede realizarse ahora para el estudio de la irracionalidad de la raíz del producto de dos primos.

ACTIVIDAD 5

Demostrar que $\sqrt{6}$ es un número irracional.

## Intención general de la actividad 5

A partir del trabajo desplegado en la actividad anterior, se invita a realizar una adaptación de esa demostración de otro orden: mientras que en la actividad anterior era necesario "adaptar" la demostración para las raíces cuadradas de otros primos, ahora se tiene la raíz cuadrada de un número que es el producto de dos primos. Será necesario estudiar cómo se modifica la demostración, qué es lo que permanece y lo que necesariamente cambia.

Se puede proponer un trabajo en pequeños grupos como primera instancia y luego compartir con toda la clase la producción de alguno de los grupos. El resto irá completando de modo tal que quede en el pizarrón una versión de la demostración consensuada por toda la clase. También puede ser cada docente quien escriba lo que sus estudiantes proponen.

## Ideas que pueden desplegarse para la resolución

Dependiendo del manejo de las propiedades aritméticas de los y las estudiantes, quizás haya quienes consideren que no es necesario probar esta afirmación como antes, ya que $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, indicando que como ya probaron que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son irracionales, entonces $\sqrt{6}$ lo será también.

Esto habilita al docente o la docente a preguntar:

*¿Siempre será irracional el producto de raíces que son irracionales?*

Proponemos dar un breve espacio de tiempo a la exploración y, eventualmente, ofrecer como contraejemplo $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9} = 3$.

Entrando ya en el armado de argumentos deductivos, tal como dijimos antes, es necesario realizar una modificación a la demostración para raíces de primos. Sin embargo, imaginamos que los y las estudiantes pueden intentar replicarla sin modificación:

- Suponer que $\sqrt{6}$ es **racional**.
- Escribir $\sqrt{6}$ como una fracción $\frac{s}{t}$ en donde $s$ y $t$ **no tienen primos en común**, es decir, es una **fracción irreducible**.
- **Operar** sobre la igualdad **elevando al cuadrado** para quedar en una igualdad de números enteros.
- Leer en esta expresión que hemos encontrado un **múltiplo de 6** que es $s^2$.
- Reutilizar una idea que ya se usó para 3: **"Si el cuadrado de un número es múltiplo de 6, entonces el número también lo es"**.

En actividades anteriores esta afirmación se ha validado para primos y se han visto contraejemplos para números no primos. Dado que 6 no es primo, los conocimientos de la clase no alcanzan para validar la afirmación. Proponemos entonces una modificación cuya validez se puede confirmar a partir de las ideas consensuadas.[8]

Al leer en la expresión $s^2$ que es **múltiplo de 6**, es necesario interpretar que también será múltiplo de 2 y de 3. Ahora sí es posible reutilizar la idea “si el cuadrado de un número es múltiplo de 2 (o de 3), entonces el número también lo es”. Finalmente, siendo múltiplo de 2 y de 3, entonces también es múltiplo de 6.

La demostración con el ajuste seguiría:

- Deducir que $s$ **es múltiplo de 2 y de 3 y, por lo tanto, de 6**.
- Deducir que $t$ **es múltiplo de 2 y de 3 y, por lo tanto, de 6**.
- Llegar a la conclusión de que ambos, $s$ y $t$, son múltiplos de 6; y reconocer a esta afirmación como una **contradicción** con la suposición de que $\frac{s}{t}$ era una fracción irreducible y que, por lo tanto, $s$ y $t$ no tienen primos en común.

## Ideas para dejar registradas al final de la actividad

A partir del trabajo desplegado con la demostración de $\sqrt{6}$ y otras similares, donde se apeló al producto de primos distintos (recordar el contraejemplo de la raíz del producto de $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$), se puede arribar a algunas generalizaciones:

- Las raíces de los números primos son irracionales.
- Las raíces del producto de números primos distintos son irracionales.
- Existen infinitos primos y, por lo tanto, podemos encontrar infinitos números irracionales que provienen de la raíz cuadrada de esos primos y/o del producto de primos distintos.

8. Notamos que la afirmación es verdadera. Es decir, “si el cuadrado de un número es múltiplo de 6, el número es múltiplo de 6”, y también lo será siempre que se considere un número que sea producto de dos primos distintos (también en otras situaciones). No obstante, los conocimientos de la clase aún no dan condiciones para apelar a esta validación. Por eso proponemos otra vía.

En esta última conclusión seguimos abonando a la idea que se comenzó a construir a partir del trabajo en el capítulo anterior con las expresiones decimales con ley de formación. En ambos capítulos, las expresiones decimales consideradas son infinitas y no periódicas. Ahora bien, a diferencia de esos números irracionales de los cuales podíamos tener alguna idea de cómo se produce su desarrollo infinito, en el caso de estos irracionales no hay una regla ni ley de formación en las expresiones decimales. En estos números irracionales que provienen de la raíz de un primo, el desarrollo decimal se percibe como algo impredecible y, en tal sentido, es factible que alguna parte de la clase los conciba como un hecho aleatorio. Esta concepción necesitará evolucionar en el tiempo didáctico, algo que tal vez ocurra fuera de la escuela secundaria.

## SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Este capítulo ha tenido en buena parte una impronta distinta al resto del documento por una razón: la inmersión de los y las estudiantes en la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ requiere, desde nuestro punto de vista, un comando por parte de cada docente que solo vemos posible a través de su exposición de las ideas de la demostración. Claro que esto ocurre, tal como lo hemos propuesto, en diálogo con las ideas (preguntas, observaciones, dudas, propuestas) que los y las estudiantes pueden elaborar durante la exposición de la demostración. No obstante, comprendemos que la organización de las afirmaciones que derivan en la producción del absurdo no puede dejarse en manos de los estudiantes sin la participación del docente. El costo de esta reubicación de los actores de la clase se ve compensado con la posibilidad de reutilizar la demostración para otros irracionales y así ofrecer a la clase el potencial de demostrar la irracionalidad de una familia de números tan grande como se quiera. Todo el capítulo es una apuesta hacia un posicionamiento teórico por parte de los y las estudiantes, tal vez un salto importante respecto de las prácticas usualmente establecidas para la escuela secundaria. Por eso es que hemos planteado, ya al inicio del capítulo, la necesidad de que cada docente considere críticamente la inclusión de esta propuesta (o de alguna parte) en el conjunto de actividades, siempre en vínculo con los conocimientos y los modos de producir de su clase.

Diseñamos un camino para llegar a la demostración que parte de darle vida en clase a la sana duda sobre la racionalidad o no de un número como $\sqrt{3}$. En las implementaciones, estudiantes de distintas edades y con distintos recorridos nos han sorprendido elaborando genuinas preguntas acerca de la escritura decimal de este número.

Hemos alimentado el recorrido planteando una actividad sobre enteros y divisibilidad que da buen sustento a las afirmaciones que se necesitan sostener durante la demostración. Esta decisión fue muy discutida con todo el equipo de docentes e investigadores, variando su ubicación y buscando el mejor momento para evitar la disrupción y la arbitrariedad.

Finalmente, hemos intentado ofrecer la descripción más completa posible de un escenario de clase donde se pueda alojar la demostración de un modo enriquecedor para los y las estudiantes, aceptando su complejidad pero también aprovechando ese instante de contacto con el motor de construcción de la matemática, el que la hace sólida y le permite perdurar en el tiempo.

CAPÍTULO 4

# Representación de irracionales en la recta numérica

## LA LUPA EN EL OBJETO MATEMÁTICO RECTA

En este capítulo abordamos la representación de los números reales en la recta numérica, que consideramos parte de la experiencia matemática de los y las estudiantes de toda la clase. Desde el comienzo de la escolaridad, la recta graduada (con un origen y un segmento unidad) se presenta como punto de apoyo para la representación de los números. Donde algunos distinguen una recta continua en la que van localizando números, otros perciben unos puntos aislados y alineados sobre esa misma recta. Ahora bien, la recta está presente desde el inicio y desde ese momento es un trazado continuo. La escuela, que de esta manera contribuye a visualizar una recta continua y la representación de los números en ella, necesita cuestionar esta percepción al estudiar los números irracionales. Los métodos que fueron en su momento utilizados para asignar un lugar en la recta a los números naturales (1, 2, 3,…), a los enteros (los naturales, sus opuestos y el cero) y a los racionales (en su representación fraccionaria o decimal), se vuelven insuficientes para decidir dónde ubicar un número como $\pi$, $e$ o $\sqrt{2}$. Al mismo tiempo, mientras que en los conjuntos numéricos mencionados el método de representación elegido resulta útil para todos los números, en el caso de los irracionales cada método disponible resulta no universalizable ya que funciona en un "pequeño" subconjunto.

Nos interesa abrir la posibilidad de pensar que cada número tiene un lugar "ideal" en la recta, tomando distancia de la representación efectiva sobre papel, así como también contemplar la posibilidad de que haya métodos para determinar ese lugar ideal que no dependen de instrumentos de medición.

En un primer momento, proponemos que las y los estudiantes, partiendo de sus concepciones diversas, representen algunos racionales e irracionales y, a partir de esto, puedan explicitar las siguientes ideas:

- Para ubicar a **todos** los racionales es posible apoyarse en un mismo método, es el caso del que proviene el teorema de Thales.
- Algunos irracionales pueden ubicarse a través de un protocolo nuevo, es el caso de ubicar raíces cuadradas.

En un segundo momento, ya enfocados en los irracionales, la clase podrá avanzar en la imposibilidad de ubicar con exactitud ciertos irracionales, como los dados por ley de formación.

ACTIVIDAD 1

a) ¿Cómo ubicarían en una misma recta numérica los números 0,3; 0,33; $0,\hat{3}$ y $\frac{1}{3}$?
b) De los números anteriores, ¿algunos ocupan el mismo punto de la recta numérica?

## Intención general de la actividad 1

El objetivo de esta actividad es que las y los estudiantes recuperen las técnicas de representación de los números racionales ya presentes en la clase. La recuperación de estas técnicas entrará en diálogo con la propuesta que pueda traer cada docente, retomando el teorema de Thales y las técnicas para representar números racionales que de él se desprenden.

Al iniciar esta actividad, y antes de entregar el enunciado, cada docente puede explicitar de manera oral qué se espera de esta actividad y de la clase, para avanzar en el conocimiento acerca de los irracionales:[1]

*Estuvimos viendo que hay otros números además de las fracciones. Los hemos llamado números irracionales porque no es posible escribirlos como una razón o fracción.*

*Sabemos también que tanto las fracciones como los números naturales y los enteros se ubican en la recta numérica. Ahora vamos a poner el foco en la recta numérica, recordando lo que ya sabemos de ella, avanzando en nuevas cuestiones y teniendo en cuenta también a estos números irracionales que hemos comenzado a estudiar.*

*Nos interesa pensar y producir procedimientos para ubicar a estos números: quisiéramos poder explicar cómo los ubicamos, qué pasos tenemos que realizar, qué necesitamos prever, qué podemos replicar entre la ubicación de un número y la de otro.*

## Las producciones y su tratamiento en el espacio colectivo

Esperamos que las y los estudiantes inicien la actividad construyendo una recta y allí ubiquen de alguna manera los números propuestos. Nos interesa que se plasme la idea de que los tres primeros números ocupan distintas posiciones, al menos en forma teórica, dejando en un segundo plano si las cuestiones prácticas (la medición y el trazado) la hacen visible o no. En cambio, $0,\widehat{3}$ y $\frac{1}{3}$ ocupan necesariamente el mismo lugar. Las actividades de los capítulos anteriores ofrecen elementos para poder distinguir los números 0,3; 0,33 y $0,\widehat{3}$. Esta distinción, junto con una idea ya aceptada por los y las estudiantes en su

1. Como en capítulos anteriores, escribiremos *en cursiva* ciertas ideas pensadas para que los o las docentes las compartan con la clase de forma oral o escribiéndolas en el pizarrón.

recorrido escolar sobre la ubicación de puntos distintos en distintos lugares de la recta, permite asegurar que estos números no ocupan el mismo lugar. Por su parte, el reconocimiento de que $0,\widehat{3}$ y $\frac{1}{3}$ son dos escrituras del mismo número lleva a considerar que ambos tienen la misma ubicación.

Es factible que los y las estudiantes se ubiquen intermitentemente entre la actividad concreta de trazar, medir y dividir (a ojo o intentando una precisión que los instrumentos no les dan), y la reflexión hipotética de qué es lo que se podría realizar asumiendo para ello un posicionamiento de orden teórico. Por ejemplo: trazar una recta, ubicar los números 0 y 1, medir entre 0 y 1 cuántos centímetros hay y dividirlos por 10 para así obtener la medida de un décimo, estaría en el orden de lo que entendemos como una actividad concreta. Por otro lado, apoyarse en la técnica que ofrece Thales (aun sin realizarla efectivamente) para convencerse de la posibilidad de encontrar la ubicación exacta de un décimo (o de otras partes de la unidad) está del lado de la actividad teórica.

El momento de discusión colectiva será una instancia adecuada para distinguir ambos posicionamientos. Consideramos que este tratamiento está en manos de cada docente. Notamos que, en el primer tipo de protocolo, la actividad de medición (que se realiza a través de un instrumento como la regla graduada) no asegura la exactitud de la ubicación del un décimo, mientras que en el segundo caso un estudiante que utiliza la medida a través de la técnica derivada de Thales está asegurando la precisión en su procedimiento.

Durante la elaboración de la actividad asumimos como probable que la ubicación en la recta pueda inicialmente pensarse como aproximada y que fuera necesario indicar –antes o después– que no es el propósito ofrecer una ubicación aproximada. Por el contrario, nos interesa ir hacia una ubicación teórica e ideal.

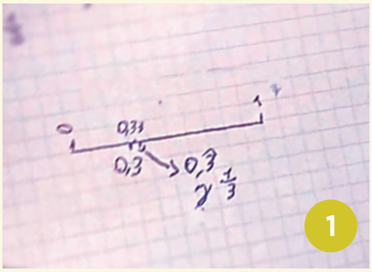
En las experiencias realizadas, una buena parte de la clase optó por medir y dividir longitudes que representan la unidad en partes iguales. Por ejemplo, elegir una medida para la distancia entre 0 y 1 que pueda fácilmente dividirse en diez partes iguales (por ejemplo 10 centímetros o 10 cuadraditos de la hoja cuadriculada); o bien, que pueda dividirse en tres partes iguales (3 cm por ejemplo). Otra acción observada fue la de ir de la parte al todo, eligiendo una medida (arbitraria) para $\frac{1}{3}$ y repetirla tres veces para obtener el 1. También se observó la estrategia de elegir un cuadradito de la hoja como un décimo, y que de este modo la unidad quede conformada por diez partes, lo que permite ubicar cómodamente 0,3. El pedido de ubicar este grupo de números del enunciado (y también, ya en la instancia colectiva, algunos otros) puso de relieve los límites de esta estrategia.

En esta dirección, nos interesa señalar que si se apoyan en una unidad cuya división en diez partes iguales es sencilla, es muy posible que se dificulte dividir en tres partes iguales apoyándose en la medida. Recíprocamente, si se tiene una unidad que se puede dividir en tercios, queda la tarea de dividir en diez partes iguales a ese segmento para ubicar el 0,3.

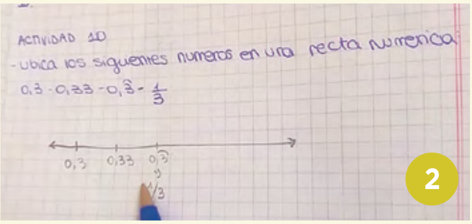
Una alternativa para sortear estas dificultades es considerar como unidad el múltiplo común menor entre los números 3, 10 y 100. Esto permite tomar la longitud que representa a $\frac{1}{300}$ y desde esa medida ubicar a todos los números propuestos. Esta estrategia no fue observada en el aula (aunque no descartamos que con el tiempo suficiente podría haber aparecido). Frente a ella, eventualmente nos interesaría señalar que la técnica limita la posibilidad de agregar nuevos números a ubicar.

En algunas clases surgieron preguntas y dudas acerca del rol de la medición. En esas discusiones, las y los docentes comunicaban un interés en dar una ubicación ideal y no una concreta (mediante el uso de reglas graduadas). Un posible punto de apoyo para que el docente aborde esta cuestión, concebida a partir del análisis de las distintas implementaciones, es plantear la necesidad de pensar técnicas para números con desarrollo decimal compuesto de muchas cifras, donde los instrumentos y la actividad de medición deriva en errores importantes comparados con los propios números. Este planteo permite dar un sentido, asociado en un principio a estos números, a concebir la tarea de ubicación de números en la recta más allá de la medida.

Las siguientes producciones de estudiantes ilustran estas cuestiones que hemos desplegado hasta aquí.




En la producción de la imagen 1, el alumno eligió un cuadrado de la hoja cuadriculada para marcar un décimo. A partir de esta marca ubica, en primer término, el número 0,3 con exactitud. En diálogo con el observador, explica que el número 0,33 se podría ubicar también con exactitud repitiendo el mismo procedimiento dentro del cuadrado ubicado entre 0,3 y 0,4 (notamos que el protocolo que el estudiante eligió va de la parte al todo, de modo que su procedimiento no se podría repetir). Finalmente, indica que el número $0,\hat{3}$ coincide con $\frac{1}{3}$ y va “un poco después”. Es decir que para este último caso obtiene una ubicación aproximada.




En la siguiente producción (imagen 2), el estudiante comienza ubicando $0,\hat{3}$, que reconoce como $\frac{1}{3}$. Esta ubicación no tiene en cuenta cuál es la unidad, se realiza en un lugar cualquiera de la hoja cuadriculada. A partir de ella, explica que el número 0,33 es menor y por lo tanto va a la izquierda, en un lugar que es aparentemente aproximado. Del mismo modo procede con 0,3 durante la siguiente etapa de la actividad. Tal como se puede notar en la imagen, advertimos que la distancia elegida para separar los tres números es de tres cuadrados de la hoja cuadriculada.

Entendemos que estas producciones son posibles en función del enunciado de la actividad, que permite que emerjan las concepciones de los y las estudiantes en relación con la ubicación exacta, hipotética e ideal de estos números racionales. La tematización de estas concepciones puede alimentar la problematización de la recta en cuanto objeto matemático. En estas circunstancias creemos necesario que cada docente recupere el propósito de la actividad, rechazando este tipo de ubicaciones aproximadas una vez que se pudo comprender sus límites. Cada docente puede comunicar, en este escenario de la clase, que la actividad invita a pensar la ubicación en la recta desde un lugar ideal y teórico, lo cual implica separarse de la tarea concreta de medir con instrumentos para considerar cómo ubicar idealmente estos números en la recta.

Una vez analizadas en el espacio colectivo estas ubicaciones aproximadas, cada docente podrá evocar el enunciado del teorema de Thales que considere más adecuado según la trayectoria de sus estudiantes. Así, se vincula la proporcionalidad de medidas a la ubicación exacta de partes de la unidad. Invitamos al lector a considerar este posible camino en el Anexo ubicado al final de este capítulo.

## Conclusiones de la actividad 1

Una vez que el protocolo para ubicar racionales ha sido analizado, se podrá dejar asentado a modo de síntesis:

- Si dos números son diferentes, se ubican en un lugar diferente en la recta.
- Hay un método para ubicar idealmente $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{10}$ en la recta a partir de conocer el segmento unidad. Este método permite ubicar en una misma recta todo tipo de racionales, basta para ello escribirlos como fracción.
- Distintas representaciones de un mismo número tienen la misma ubicación en la recta.

Se pueden trabajar otros ejemplos, con la intención de generalizar cierto procedimiento que permita ubicar de manera ideal, más allá de efectivamente, a los números racionales en la recta numérica. Por ejemplo:

ACTIVIDAD 1 (CONTINUACIÓN OPTATIVA)

Expliquen, sin hacerlo efectivamente, cómo se pueden ubicar en una recta 0,36; $0,\widehat{36}$ y $\frac{4}{11}$.

ACTIVIDAD 2

¿Es posible encontrar un lugar en la recta para el número $\sqrt{5}$?

a) Si piensan que sí, indiquen cómo harían escribiendo un procedimiento para determinar dicho lugar.

b) Si piensan que no, expliquen cuáles son las razones.

## Intención general de la actividad 2

Nos interesa comenzar la localización teórica de los irracionales en la recta a partir de los números que se escriben como raíces de números enteros que no son cuadrados. En particular, consideramos un caso modélico para estudiar esta cuestión, el número $\sqrt{5}$, y proponemos elaborar en conjunto con toda la clase cómo construir tal longitud a partir del teorema de Pitágoras.

Puede suceder que los y las estudiantes no tengan una idea clara para responder con certeza, y que en el mejor de los casos puedan señalar una ubicación aproximada indicando entre qué números se lo puede hallar. No obstante, la actividad anterior será un punto de apoyo para dirimir la cuestión de la ubicación aproximada. Debido a esto, consideramos que esta actividad se puede realizar desde un comienzo entre toda la clase, siguiendo las ideas que compartimos.

Los o las estudiantes podrían pensar que estos números (la familia de raíces cuadradas de enteros que no son cuadrados) no están en la recta, apoyados en la infinitud de cifras decimales sin período (es decir, en la representación decimal del número y en la imposibilidad de prever la conformación de ella). Frente a esta duda, cada docente podría convocar a sus estudiantes a considerar el objeto recta que tienen incorporado y naturalizado.

Para ello consideramos que algunas preguntas acerca de la recta pueden funcionar como disparadoras de esta cuestión:

- *¿Qué es lo que hay en la recta?*
- *¿De qué está formada la recta?*
- *¿Qué es la recta?*
- *¿Qué es lo que podemos encontrar en la recta?*

Son todas preguntas abiertas, no buscan llegar a una respuesta "correcta" y acabada. Más bien, el objetivo es recuperar los distintos tratamientos, las distintas imágenes e ideas que puedan haber elaborado los y las estudiantes a propósito de la recta numérica a lo largo de la escolaridad. Es posible que respuestas del tipo "la recta es una línea (recta) que trazamos para ubicar a los números" surjan con la misma convicción que otras como "la recta es un conjunto de puntos (alineados)". Dependerá de la trayectoria de los y las estudiantes, y del año en el que esta secuencia se implemente. Proponemos estas dos respuestas como formas de considerar concepciones en un caso más cercanas a los objetos concretos y, en otro, más cercanas a los objetos ideales. En parte, este capítulo tiene la intención de movilizar las concepciones de los y las estudiantes acerca del objeto matemático recta, admitiendo y también alojando su complejidad.

Instalada esta cuestión sobre la recta (a criterio de cada docente), proponemos avanzar hacia la actividad a partir de nuevas preguntas que permiten **vincular números y longitudes** con el objetivo de concluir que, de manera "ideal", para cada longitud (pensada como la longitud de un segmento a partir del origen) hay un número real que describe su medida; y dicho número se ubica en el otro extremo del segmento.

- *¿Es posible encontrar una longitud que mida* $\sqrt{5}$*?*

Con esta pregunta que proponemos formular a la clase se trata de alojar un interrogante acerca de "cuán completa" está la recta con todos los números que ya se han localizado en ella. Hasta ahora, los y las estudiantes han ubicado números racionales y se espera que confíen en que podrían ubicar cualquier racional. Para esto ha sido invocada la técnica de Thales. Esta posibilidad, junto con la idea ya fraguada de la densidad de los racionales, puede dar indicios de que la recta está completa, que no queda más espacio (salvo un poco, eventualmente, para algunos "números raros"). Las preguntas planteadas permiten cuestionar esta presunción.

Retomando la tarea, se podría avanzar hacia la posibilidad de construir "teóricamente" una longitud igual a $\sqrt{5}$. Para esto será necesario recuperar el enunciado de Pitágoras y a partir de él volver a preguntar:

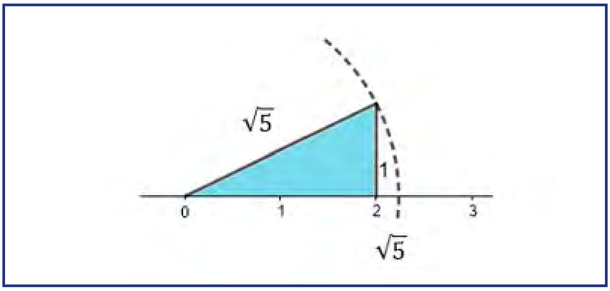
*Siendo el cuadrado de la hipotenusa igual a la suma del cuadrado de los catetos, ¿es posible que tal cuadrado sea 5? Es decir, ¿es posible que una hipotenusa tenga una longitud de $\sqrt{5}$?.*

Proponemos dar tiempo para una exploración de cuadrados que sumen 5. Efectivamente, considerar $5 = 4 + 1$ permite dibujar dicho triángulo, habilitando al docente a mostrar el protocolo de construcción del triángulo sobre la recta y luego el traslado de la medida de la hipotenusa para así ubicar a $\sqrt{5}$ en la recta.[2]

Una vez representado $\sqrt{5}$ a partir de $5 = 4 + 1$, como en la imagen 3, puede considerarse otra escritura para 5 como $3 + 2$. Esta elección, $5 = 3 + 2$, en vez de simplificar el problema lo complejiza (en este caso es necesario obtener longitudes iguales a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$), configurando un "nuevo" problema. En síntesis, la elección de la suma de 5 no es indistinta, pues tiene que ser una suma tal que simplifique el problema y no lo complejice.

2. Para el traslado de la medida de la hipotenusa sobre la recta pueden usarse en la clase tanto el compás como otros instrumentos caseros que permitan la misma función (por ejemplo, un hilo o una marca sobre un papel).

3




## Conclusiones de la actividad 2

$\sqrt{5}$ es una longitud (pues resulta la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo) y, como tal, se puede ubicar con precisión (idealmente) en la recta.

A continuación, presentamos un grupo de actividades (3, 4 y 5) que permiten reutilizar la técnica presentada y profundizar las cuestiones relativas a la representación en la recta de las raíces cuadradas de números enteros no cuadrados.

ACTIVIDAD 3

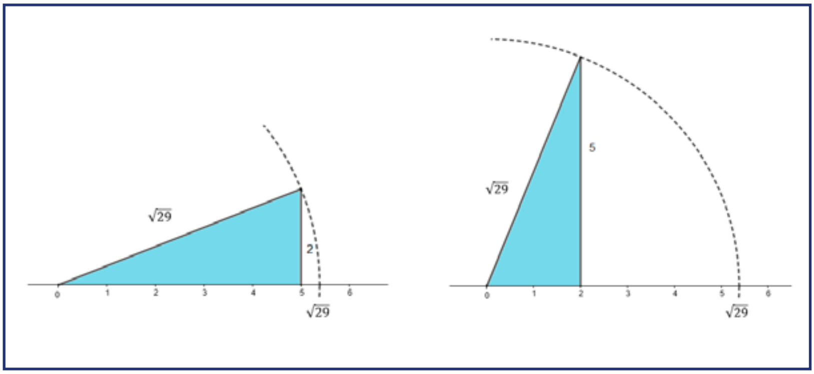
Teniendo como referencia el procedimiento realizado para ubicar $\sqrt{5}$ en la recta, ¿qué número se podría ubicar en la recta a partir de un triángulo rectángulo con catetos de medidas 5 y 2? ¿Cómo se ubicaría este número? Expliquen el procedimiento.

## Intención general de la actividad 3

Esta actividad permite hacer funcionar el método de construcción utilizado para $\sqrt{5}$ y se propone como intermediaria antes de abordar problemas en donde las y los estudiantes deberán elegir qué catetos pueden emplear para representar a una raíz cuadrada dada.

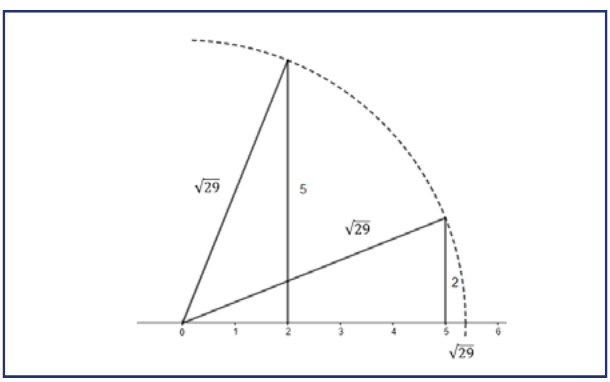
Cada docente podrá ofrecer un tiempo a los y las estudiantes para realizar una representación sobre una recta de esta nueva situación. Esperamos que en esa instancia se dibuje alguno de los dos triángulos: uno de ellos con un cateto sobre la recta de medida 5, u otro con un cateto sobre la recta de medida 2 (imagen 4).

4




A partir de la construcción del triángulo rectángulo de catetos 5 y 2, y considerando, al igual que se hizo para $\sqrt{5}$, la relación pitagórica, se obtiene para ese triángulo una hipotenusa de longitud igual a $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Una vez obtenida la longitud $\sqrt{29}$ es necesario avanzar sobre la pregunta acerca de cómo ubicar ese punto en la recta numérica. Esta longitud obtenida puede transportarse a la recta con empleo del compás u otros modos de medir alternativos que ya mencionamos. Se podrá observar que en ambos casos (los dos triángulos construidos), la hipotenusa toma la misma longitud $\sqrt{29}$, determinando un único punto en la recta (imagen 5).

5



ACTIVIDAD 4

a) ¿Qué dimensiones debe tener un triángulo rectángulo para que su hipotenusa tenga longitud $\sqrt{20}$?
b) ¿Y qué dimensiones debe tener para obtener la longitud $\sqrt{6}$?
c) Expliquen, para cada caso, cómo sería el procedimiento para ubicar esos números en la recta numérica.

## Intención general de la actividad 4

En esta actividad son las y los estudiantes quienes deben elegir qué catetos emplear para lograr las longitudes buscadas. Para el caso de $\sqrt{20}$, el 20 se puede construir con dos cuadrados perfectos, 16 y 4, lo que llevaría a tener catetos de longitudes 4 y 2. Tomando en cuenta el uso de Pitágoras que resultó provechoso para ubicar a $\sqrt{5}$, algunas y algunos estudiantes pueden proponer un cateto de longitud 1. En ese caso, el otro cateto es de longitud $\sqrt{19}$, lo que implica una nueva complejidad pues deberán contemplar en un paso auxiliar la forma de hallar un segmento de longitud $\sqrt{19}$ (algo de lo que no tienen certeza). Ahora será necesario considerar qué cuadrados emplear para formar al 19.

Durante la implementación de la propuesta, algunas y algunos estudiantes inicialmente confundían la medida necesaria del cateto con el cuadrado del cateto en cuestión. Para este último caso, proponían que los catetos tengan longitudes de 1 y 19. Frente a estas propuestas, será valioso el análisis de qué es lo que falla en esas resoluciones.

Con $\sqrt{6}$ no será posible construir a partir de dos cuadrados perfectos. Será necesario considerar un sumando como una raíz cuadrada no exacta. Por ejemplo, en la igualdad $h^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$ podrían considerar, por ejemplo, $(\sqrt{6})^2 = 6 = 1 + 5$ y decir que los catetos tienen longitudes 1 y $\sqrt{5}$, reutilizando la longitud $\sqrt{5}$ obtenida en la actividad 2. También podrían pensar en la descomposición $6 = 4 + 2$ para afirmar que los catetos son de longitud 2 y $\sqrt{2}$ respectivamente. Eventualmente, también es posible que los y las estudiantes propongan pensar a $6 = 3 + 3$ y el tratamiento sería el mismo, salvo que en este caso el triángulo es isósceles y por ello precisan una única medida o longitud.

Hemos observado que para algunas y algunos estudiantes esto se presenta como desafío, como una cuestión a repensar y una nueva oportunidad para considerar: "¿Hay un número que al cuadrado es 2?"; "¿Qué número es?". Consideramos que la actividad supone pensar a los números bajo un nuevo aspecto al concebirlos como longitudes. Y esto reabre nuevas interpretaciones.

ACTIVIDAD 5

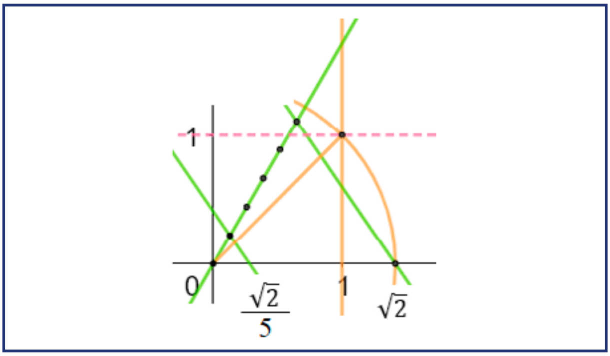
a) Ubiquen en una misma recta los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{18}$.
b) En la misma recta del ítem anterior, ubiquen $3 \times \sqrt{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

## Intención general de la actividad 5

En los casos del ítem a), los números elegidos permiten poner en escena nuevamente el uso de longitudes encontradas previamente para construir nuevas. Tal es el caso de $\sqrt{2}$ para la construcción de $\sqrt{3}$. Para construir $\sqrt{18}$, entre todas las alternativas cabe la posibilidad de usar catetos de longitudes ya construidas tales como $\sqrt{2}$ y 4. Otra posibilidad sería considerar dos catetos iguales de longitud 3. En la medida que la clase haya ido alojando diversidad de medidas, esperamos que las opciones que circulen sean variadas y se pueda pensar en cuáles son preferibles y por qué.

El ítem b) trae otras novedades ya que propone como números a ubicar en la recta las raíces cuadradas (de naturales no cuadrados) multiplicadas o divididas por un número natural. Será una oportunidad para ampliar el método abordado combinándolo con el utilizado para racionales (imagen 6).

6




Ahora bien, hasta este momento no fueron considerados números de este tipo. Por esta razón, sería interesante argumentar en la clase que estos números son también irracionales. El docente o la docente podría preguntar al trabajar esta cuestión en la clase:

- *¿$\frac{\sqrt{2}}{5}$ es racional o irracional?*
- *¿$3 \times \sqrt{2}$ es racional o irracional?*

Un argumento posible de tratar en la clase para el caso de $\frac{\sqrt{2}}{5}$ se puede construir a partir de un razonamiento por el absurdo que nos permita afirmar que $\frac{\sqrt{2}}{5}$ es irracional:

> *Supongamos que $\frac{\sqrt{2}}{5}$ es racional; si lo multiplicamos por 5, seguirá siendo racional. Pero $\frac{\sqrt{2}}{5} \times 5$ es $\sqrt{2}$ que no es racional. Entonces es un absurdo pensar que $\frac{\sqrt{2}}{5}$ es racional.*

De un modo análogo, puede analizarse que $3 \times \sqrt{2}$ es irracional.

Si se considera que están las condiciones dadas, se puede generalizar esta cuestión:

- *Si a un número irracional cualquiera se lo divide por un número entero, el resultado es irracional.*

- *Si a un número irracional cualquiera se lo multiplica por un número entero, el resultado es irracional.*

Por otro lado, en el ítem a) se ubica en la recta a $\sqrt{18}$ y en el ítem b) a $3 \times \sqrt{2}$, que son dos representaciones del mismo número. Considerando en conjunto ambos ítems, puede surgir en la clase la conjetura de que $\sqrt{18}$ y $3 \times \sqrt{2}$ ocupan el mismo lugar en la recta. El trabajo anterior, que fue poniendo en escena que solo las representaciones distintas de un mismo número son las que ocupan el mismo punto en la recta, permitirá abordar la pregunta: "¿$\sqrt{18}$ es igual a $3 \times \sqrt{2}$?". Si las y los estudiantes han tenido experiencia en el trabajo con propiedades de las raíces, se podría desarrollar la equivalencia $\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$ con apoyo en ellas.

A través del trabajo con estas tres actividades se espera:

- Discutir en el espacio colectivo que hay varias posibilidades de construcción utilizando distintas medidas, siempre con el mismo protocolo.
- Concluir que se pueden representar muchos irracionales de la forma raíz cuadrada de un número natural no cuadrado.
- Identificar que los irracionales ya construidos pueden reutilizarse en futuras construcciones.

## Conclusión general de las actividades 2 a 5

En algunos casos, sin conocer exactamente las cifras de la expresión decimal de un número irracional estamos en condiciones de ubicarlos exactamente en la recta, como en el caso de ubicar raíces cuadradas de números naturales no cuadrados.

El teorema de Thales permite ubicar a todos los números racionales y el teorema de Pitágoras ubicar a una familia infinita de números irracionales (los que son raíces cuadradas de números naturales no cuadrados).

A su vez, todos los números que son el resultado de multiplicar un racional cualquiera (salvo el cero) por una raíz de un número natural no cuadrado son números irracionales y tienen una ubicación exacta en la recta numérica. Utilizamos ambos procedimientos –el protocolo de Thales y el de Pitágoras– para ubicar esta última clase de números.

ACTIVIDAD 6

El número irracional que se construye siguiendo la secuencia 0,123456789101112… ¿ocupa un lugar en la recta numérica? Si creen que sí, indiquen cuál es ese lugar y cómo lo encuentran.

## Intención general de la actividad 6

En esta actividad se propone considerar a otros irracionales para los cuales no es posible encontrar método con regla y compás (que permite ubicarlo de manera exacta en la recta, tal y como se hizo en el caso de las raíces) pero que aun así tienen un lugar en la recta. La pregunta por la ubicación, que cada docente puede formular a la clase, instala un momento para pensar en la posible ubicación en la recta de este conjunto de irracionales. No esperamos que los y las estudiantes dispongan de un momento de trabajo grupal, ya que las cuestiones necesarias para responder a esta pregunta quedan por fuera de las alternativas de las que disponen. Más bien imaginamos a esta actividad como una oportunidad para que el o la docente ofrezca una explicación sobre este tipo de números e instale la idea de que todo número real representa una longitud y también encuentra un lugar en la recta numérica.

Para avanzar podríamos imaginar un modo de ubicar aproximadamente este número, estimando con tanta precisión como sea deseable un intervalo que lo contenga. Esta idea abona aún más la idea de la existencia de una longitud que mida ese número.

Si los y las estudiantes se preguntan por la posible ubicación de otros números, proponemos a cada docente explicitar unas ideas que, si bien resultan provisorias, organizan un estado de la situación con coherencia para la clase. En este sentido, se podría señalar que hay números para los que se conocen protocolos de representación, como los que hemos representado en la recta a través de Pitágoras y triángulos rectángulos, y otros números con algunos métodos un poco más sofisticados eventualmente. Pero también existen otros números para los que no se conoce protocolo, como es el caso de $\pi$, aunque podemos decir con confianza que $\pi$ es una longitud: la longitud de una circunferencia de diámetro 1.

## SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo, los y las estudiantes recuperan su autonomía en la resolución de problemas, y sus estrategias son un punto de partida para desarrollar los espacios colectivos. En todas las implementaciones que realizamos, el uso de regla y compás –elementos asociados a tareas de etapas anteriores de la escolaridad– aparece como una puerta de entrada a cuestiones de orden teórico. En efecto, la posibilidad o imposibilidad de tener una ubicación teórica y precisa de ciertos números en la recta constituye una problematización de la recta en cuanto objeto matemático. También hemos ofrecido objetos alternativos al compás (tales como un hilo o el borde de una hoja con marcas personales) en la comprensión de que el objetivo de estas actividades no pasa por el uso de estos instrumentos sino por las cuestiones que estas tareas permiten desarrollar.

Como mencionamos al inicio de este capítulo, se propone considerar el lugar “ideal” de todos los números en la recta numérica más allá de la representación efectiva. Los métodos propuestos permiten determinar ese lugar ideal aun para números con expresión decimal infinita como es el caso de $\frac{1}{3}$, vía el teorema de Thales, y el caso de $\sqrt{5}$ u otras raíces, apelando al teorema de Pitágoras. También fue planteada la imposibilidad de determinar los puntos de la recta que corresponden a ciertos números en una cantidad finita de pasos, por ejemplo los irracionales dados por reglas de formación.

Nos interesa destacar que los recursos desplegados para ubicar raíces cuadradas no enteras y números racionales constituyen prácticas que pueden vivir simplemente como técnicas. Sin embargo, también pueden utilizarse como punto de apoyo para la conceptualización de los reales a partir de una propuesta que invite a un posicionamiento teórico, como ha sido la intención en este capítulo.

# Anexo

## ACERCA DE THALES

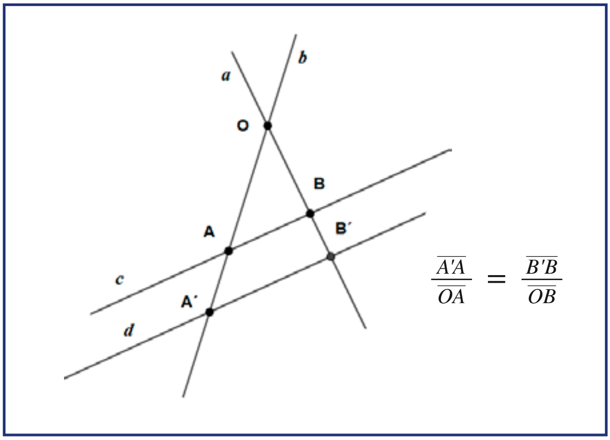
En el espacio colectivo, cada docente apelará a presentar o evocar (si ya ha sido trabajado antes) alguno de los enunciados de Thales, de acuerdo a las trayectorias de sus estudiantes. Consideramos viable y potente para la clase recuperar estas ideas que dan soporte y permiten comprender la técnica de la división de un intervalo en $n$ partes iguales.

Thales fue uno de los grandes geómetras griegos del siglo VI a. C. y formuló el siguiente enunciado, que lleva su nombre:

### Teorema de Thales

Si se trazan rectas $c$ y $d$ paralelas entre sí, atravesando a dos rectas transversales $a$ y $b$, se cumple que el cociente entre dos segmentos cualesquiera que estén sobre una de estas rectas transversales es igual al cociente entre los dos segmentos correspondientes de la otra recta transversal (imagen 7).

7



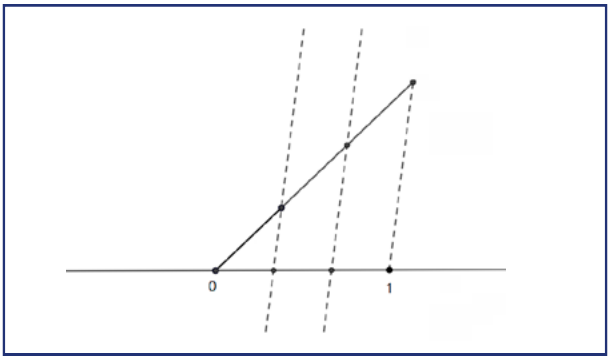

El teorema de Thales plantea una amplia variedad de proporciones. Creemos que recuperar esta es suficiente para comprender la técnica de división de un segmento en partes iguales. Cada docente podrá considerar la viabilidad de presentar otros enunciados con más relaciones.

A partir de este teorema, y ahora ubicados frente a una recta en la que queremos dividir la unidad en tres partes iguales, construimos una semirrecta auxiliar con inicio en el 0, desde donde marcamos tres segmentos consecutivos de igual longitud considerando a cada uno como "la unidad en la semirrecta auxiliar". Para asegurar la misma medida, utilizamos el compás. Luego unimos el extremo del último segmento con el 1 y trazamos paralelas al segmento que acabamos de trazar. Estas rectas pasan por cada uno de los extremos de los segmentos "unidad de la semirrecta auxiliar". La razón entre dos segmentos consecutivos de la recta auxiliar es siempre igual a 1, ya que son congruentes. Esto permite validar que cada una de esas rectas paralelas divide al segmento unidad de la recta original en tres partes iguales entre sí.[3]

3. En ocasiones, al considerar en el aula de secundario segmentos congruentes en la semirrecta auxiliar que determinan segmentos congruentes en la unidad que se desea dividir en partes iguales, podría ocurrir que los y las estudiantes interpreten que a su vez estos últimos también son congruentes a la "unidad de la semirrecta auxiliar". Y es posible que los dibujos en los que se apoyen abonen desde la visualización a esta idea. Será una cuestión que atender en la clase para aclarar estas ideas.

De este modo, tenemos un protocolo geométrico que nos permite dividir a un segmento en una cantidad de partes iguales. Lo podemos llamar “el protocolo de Thales” (imagen 8).

8




Poder dividir el segmento unidad de la recta en $n$ partes iguales es el punto de partida para ubicar cualquier fracción y, por lo tanto, cualquier racional en forma ideal y exacta en la recta. Por ejemplo, para ubicar la fracción $\frac{m}{n}$ basta repetir $m$ veces la longitud $\frac{1}{n}$ obtenida a partir de este procedimiento.[4]

## Método alternativo para la división de la unidad en tres –o en $n$– partes iguales

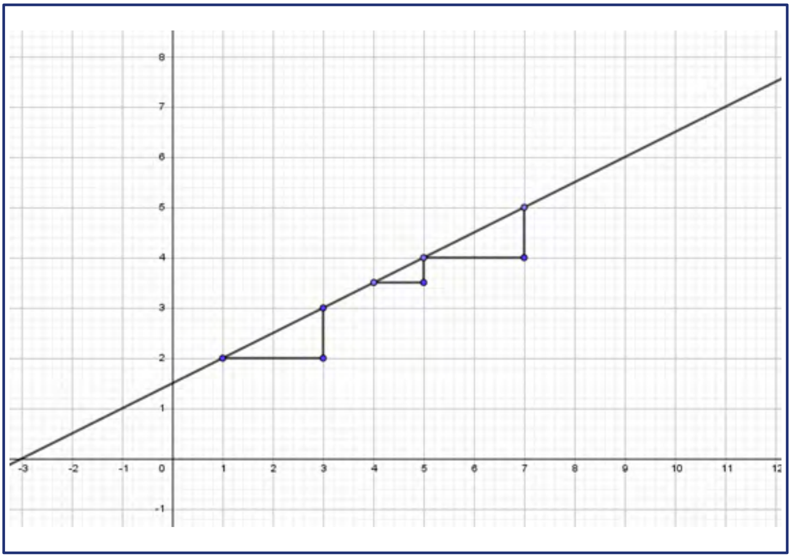
En algunas clases, el teorema de Thales puede ser desconocido o, también, puede resultar costosa su recuperación. En tales circunstancias, y considerando que las rectas, las funciones lineales o las ideas de variación uniforme en el modelo lineal pueden estar más a mano, proponemos una variación del método propuesto que se apoya en triángulos rectángulos.

Suponemos que los y las estudiantes saben que en una función lineal, los peldaños que se trazan al desplazarse de un punto a otro de la recta con

4. Cada racional podrá requerir distintas rectas auxiliares que, una vez utilizadas, se descartan.

movimientos horizontales y verticales paralelos a los ejes generan todos triángulos semejantes (imagen 9).

9

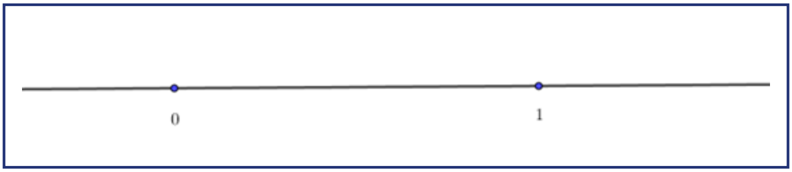


En caso de que la medida de la base sea la misma, los triángulos son congruentes. Cuando se sabe que las hipotenusas tienen la misma medida, entonces también se puede afirmar que los triángulos son congruentes gracias al criterio de congruencia ALA.

Bajo este supuesto, proponemos una construcción que dé los siguientes pasos:

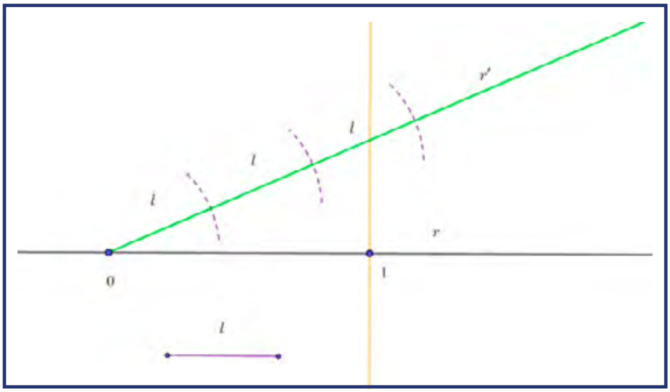
i) Dada una recta *r* se elige y se traza una longitud, que será la unidad (imagen 10). Dicha unidad será dividida en tres partes iguales.

10



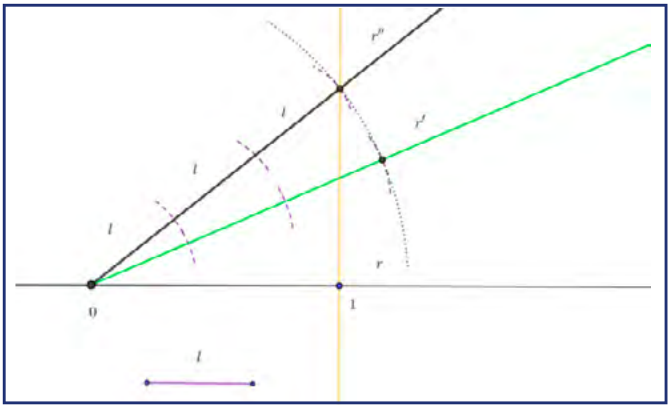

ii) Se traza una recta perpendicular a la recta *r*, pasando por el extremo derecho del segmento unidad (indicado con el 1) y una recta auxiliar (*r*') que pasa por el extremo izquierdo del segmento unidad, marcado con el 0. Sobre esta última recta ubicamos, como con Thales, tres medidas iguales (que en la imagen 11 llamamos *l*) en forma consecutiva, eligiendo la medida de forma tal que al ubicar la tercera supere la intersección de la recta auxiliar con la perpendicular trazada.

11



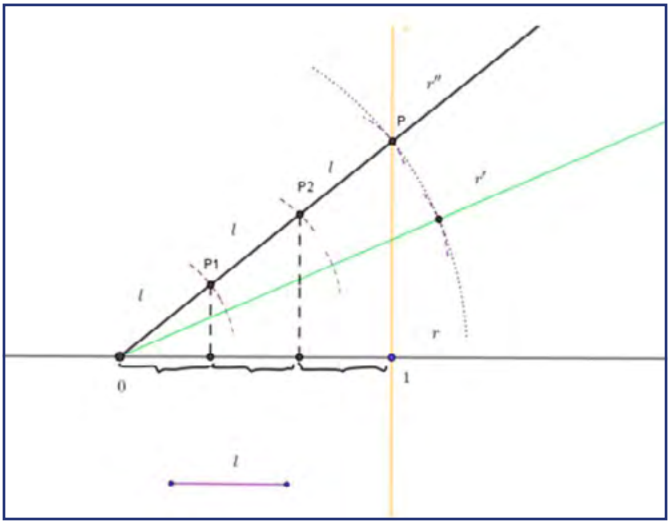

iii) Con un compás, se toma la medida del total de estos tres segmentos y con esa medida como radio y centro en 0, se traza un arco de circunferencia que intersecte la perpendicular. Uniendo el 0 y el punto de intersección, se construye una nueva semirrecta auxiliar (*r''*). Entre el 0 y el punto de intersección se tiene la misma longitud que en la primera semirrecta, y se pueden hacer las mismas divisiones en esta nueva semirrecta usando el segmento de longitud *l* (imagen 12).

12



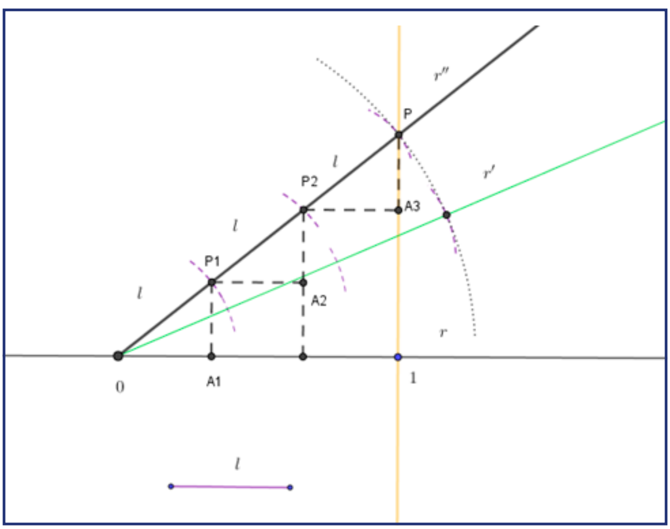
Trazando una recta perpendicular a la recta *r* por cada una de las dos divisiones restantes de *r''*, se obtienen las subdivisiones buscadas del segmento unidad (imagen 13).

13




La congruencia de los tres segmentos $\overline{0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P}$ permite asegurar la congruencia de los tres triángulos, que en la imagen 14 llamamos $\Delta 0A_1P_1$, $\Delta P_1A_2P_2$ y $\Delta P_2A_3P$. De este modo, se justifica la congruencia de los tres segmentos en el segmento unidad.

14



Es claro que en ambas técnicas hay una apoyatura en triángulos semejantes. Con este segundo método, es posible que la congruencia de los triángulos sea más sencilla de reconocer. Una vez concluida la construcción, puede volverse sobre el porqué del funcionamiento.[5]

5. Advertimos que una longitud pequeña para la medida / puede resultar insuficiente para que el arco de circunferencia que tiene por radio el triple de / interseque a la recta perpendicular al segmento que se quiere dividir.

CAPÍTULO 5

# La densidad

## ACERCA DE LA DENSIDAD Y UNA POSIBLE EXPERIENCIA PARA EL AULA

Llegamos al último capítulo de esta propuesta atravesando un despliegue de cuestiones e ideas matemáticas que podríamos sintetizar de este modo:

- la diversidad de las representaciones de números racionales e irracionales en términos de su escritura, considerando sus alcances y también sus límites;
- la certeza de la irracionalidad de cierto conjunto de números, como las raíces cuadradas de números primos o los irracionales con una ley de formación que asegura la no periodicidad;
- la posibilidad de ubicar en la recta, en forma exacta, cualquier número racional y algunos números irracionales;
- la capacidad de producir números irracionales a voluntad, los cuales son fáciles de crear pero no siempre se pueden ubicar con precisión en la recta;
- la densidad de los racionales entre los racionales.

Este recorrido nos permite plantear un tema final: la **densidad** de los números irracionales y con ella la densidad de los números reales. La densidad que se pondrá de manifiesto al incorporar a los irracionales jugará un papel importante para comprender la presencia de ambos tipos de números en la recta. En esta instancia nos proponemos mostrar que:

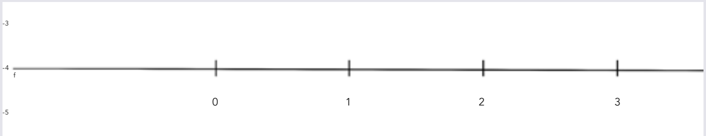
- entre dos irracionales podemos hallar otro irracional (iterar el proceso permite hallar tantos como se desee);
- entre dos racionales podemos hallar un irracional (iterar el proceso permite hallar tantos como se desee);
- entre dos irracionales podemos hallar un racional (iterar el proceso permite hallar tantos como se desee).

La comprensión de esta realidad nos confrontará una vez más con los procesos infinitos. Apelaremos a la concepción más activa del infinito potencial,[1] que es mejor aceptada por los y las estudiantes, para hacer jugar estas concepciones de densidad.

Con este propósito concebimos dos actividades: una donde son los y las estudiantes quienes "producen" racionales y/o irracionales entre dos números dados; otra en la que, a modo de cierre, se pregunta por la posibilidad de hacer esto de un modo genérico.

ACTIVIDAD 1

a) Ubiquen en la recta los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\frac{\sqrt{5}}{4}$.




b) Decidan si es posible ubicar (y si consideran que no es posible expliquen por qué) entre $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\sqrt{3}$:

1. Esta noción fue incluida en el capítulo 2.

- un número entero
- un número racional
- un número irracional

c) Decidan si es posible ubicar (y si consideran que no es posible expliquen por qué) entre 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$:
- un número entero
- un número racional
- un número irracional

d) Sobre la recta del ítem a) ubiquen –si consideran que es posible– un número de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$ (donde $n$ es un número natural) entre 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Si creen que no es posible, expliquen por qué. Si consideran que es posible, decidan si hay más de uno.

## Intención general de la actividad 1

Esta actividad propone elaborar la noción de la densidad de los números reales con apoyo en la representación de los números en la recta numérica. Consideramos conveniente compartir en el espacio colectivo de la clase las producciones de los ítems a), b) y c) antes de abordar el ítem d), ya que algunos acuerdos realizados hasta ese momento pueden enriquecer las ideas que circulen para este último inciso. Proponemos iniciar la actividad analizando colectivamente:

*¿Qué tipo de número es* $\frac{\sqrt{5}}{4}$*. ¿Es racional? ¿Irracional?*[2]

Las actividades del capítulo 4 resultan un apoyo para considerar que las particiones enteras de números irracionales (como las raíces cuadradas de números

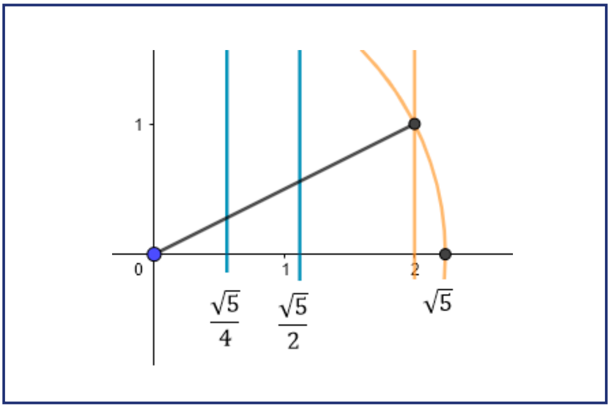
2. Como en capítulos anteriores, escribiremos *en cursiva* ciertas ideas pensadas para que los o las docentes las compartan con la clase de forma oral o escribiéndolas en el pizarrón.

naturales que no son cuadrados) son irracionales. Ahora es una oportunidad de revisar estas conclusiones.

También es posible escribir en el pizarrón el razonamiento por el absurdo que nos lleva a decir que $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es irracional: si suponemos que $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es racional y se lo multiplica por 4 (que es racional), el resultado es racional (porque el producto de racionales es racional). Pero $\frac{\sqrt{5}}{4} \times 4 = \sqrt{5}$, que no es racional. Entonces es un absurdo pensar que $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es racional. Se puede retomar el razonamiento por el absurdo como un tipo de procedimiento que sirve para seguir analizando la racionalidad o irracionalidad de ciertos números.

Con relación al ítem a), consideramos que la tarea de ubicación de raíces en la recta y el uso de Thales para la representación de racionales se reutilizarán ahora para el número $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Este número en particular puede ubicarse utilizando tanto el protocolo de Thales como la mediatriz (imagen 1), que permite encontrar la mitad y nuevamente la mitad de $\sqrt{5}$.

1




Avanzando ahora sobre el ítem b), consideramos que a través de los pasos que hayan dado para ubicar $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y luego $\frac{\sqrt{5}}{4}$ se podrá visualizar por qué $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es menor que 1 mientras que $\sqrt{3}$ es mayor. Esta respuesta podrá servir para el pedido de un racional, mientras que para el pedido de un irracional esperamos que las marcas realizadas sobre la recta durante las construcciones de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ habiliten a visualizar la presencia de $\frac{2\sqrt{5}}{4}$ y también de $\sqrt{2}$ (que fue apoyo para construir $\sqrt{3}$). Se asume como parte de la actividad explicar las respectivas relaciones de orden. Mientras que estas respuestas se apoyan en las construcciones sobre la recta, el uso de la calculadora puede ofrecer argumentos para respuestas apoyadas en lo numérico.

El dominio que han desarrollado con números decimales permite a los y las estudiantes decir, apoyados en la información que brinda la calculadora, que, por ejemplo, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es menor que 0,6 y $\sqrt{3}$ es mayor que 1,7. Estos números racionales les pueden servir para proponer números racionales o irracionales entre ellos y, por lo tanto, entre $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\sqrt{3}$. Además, en este caso, tienen entre estos números un número entero, el 1.

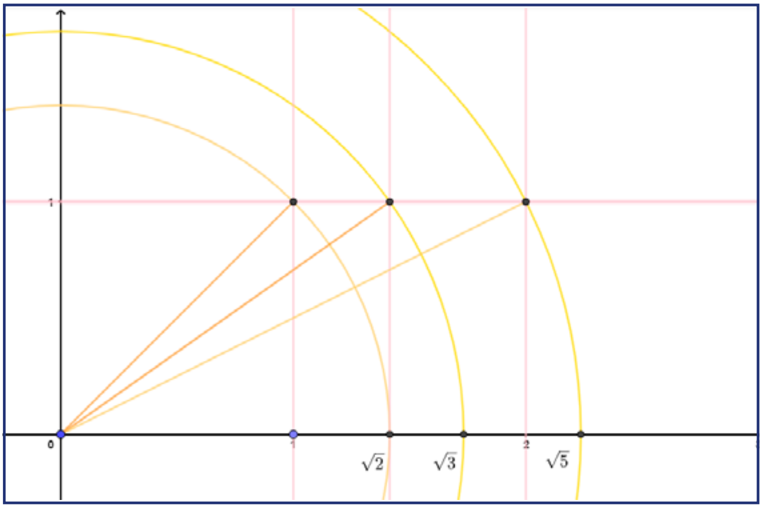
Respecto a los irracionales, pueden apoyarse –por ejemplo– en estos dos racionales 0,6 y 1,7 y a partir de ellos inventar irracionales dados por su ley de formación (tales como 0,6101001000100001…. o similares). También, a partir de la construcción realizada en el ítem a), podrían proponer $\sqrt{2}$ o $\frac{\sqrt{5}}{2}$. No esperamos que los y las estudiantes propongan raíces cuadradas de otros primos, aunque sí podrían apelar a $\frac{\sqrt{5}}{3}$ considerando que es un número que está entre $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Con relación al ítem c), consideramos que en el inciso anterior ya se ha visualizado que $\frac{\sqrt{5}}{4}$ es menor que 1 y por eso esperamos que haya certeza de la imposibilidad de ubicar un entero entre 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$. La calculadora podría ser una herramienta para hallar racionales, aunque la construcción también ofrece evidencia de que, por ejemplo, $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Puestos a considerar irracionales, hemos propuesto la construcción de $\frac{\sqrt{5}}{4}$ para tener disponible la alternativa de seguir dividiendo en mitades y así tener $\frac{\sqrt{5}}{n}$ donde $n = 8$, 16, 32, etc., obteniendo números cada vez más pequeños. Estos números, ya aceptados como irracionales, servirían para este fin. También imaginamos posible que otros denominadores puedan servir para este propósito. Es el caso de $\frac{\sqrt{5}}{5}$ u otros denominadores enteros y mayores que 4, para los que se podrán apoyar en el orden. Eventualmente, considerando la monotonía de las raíces (cuando esta idea de monotonía esté presente en la clase incluso en forma intuitiva), podrían proponer $\frac{\sqrt{3}}{4}$ o $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Finalmente, al igual que en el ítem anterior y apoyados en una aproximación decimal que ofrece la calculadora, es posible encontrar irracionales a partir de una ley de formación.

Nos interesa que la construcción y ubicación de los números pedidos en la actividad se realice efectivamente en una sola recta. Esto obedece a que el uso de Thales se podrá considerar en esta actividad como una herramienta de construcción de irracionales (recordemos que Thales está asociado a la construcción de racionales), ampliando así un repertorio de construcción de irracionales de este tipo.

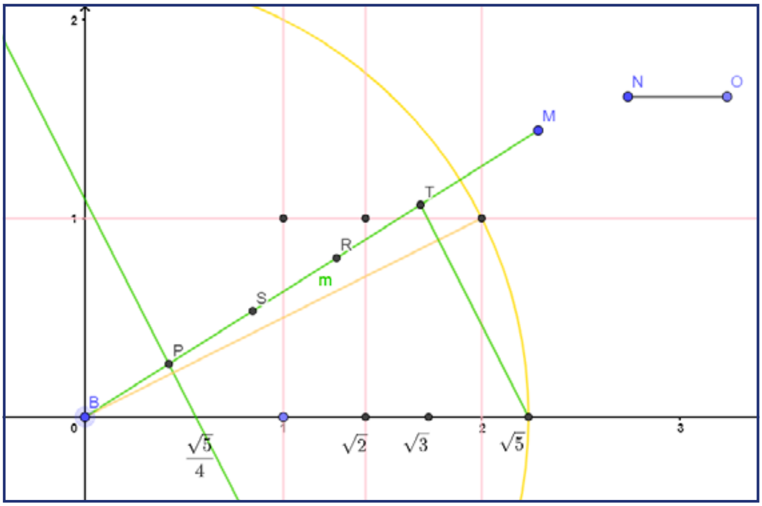
2




La construcción de estos tres irracionales en la recta (imagen 2) será el punto de apoyo para gran parte de la actividad pues la técnica de Thales servirá para ubicar "múltiplos racionales" (números de la forma $q\sqrt{2}$, $t\sqrt{3}$, $s\sqrt{5}$, con $q$, $t$ y $s$ racionales) de estos irracionales y considerar el ajuste necesario para que dichos múltiplos se encuentren entre los números que la actividad solicita. El objetivo es, en parte, disponer de tantos irracionales como sea necesario, comprendiendo que esto es factible.

Como se observa en la imagen 3, la semirrecta auxiliar que parte del origen de coordenadas y que pasa por M es la que se utiliza para construir $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Sobre

3




esa recta se ubican cuatro segmentos congruentes entre sí y congruentes al segmento $\overline{NO}$. Notamos que la misma semirrecta auxiliar podría servir para construir $\frac{\sqrt{3}}{4}$ y $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

## Cuestiones a desarrollar en el espacio colectivo

En un momento de la clase podrán recolectarse los ejemplos producidos por los y las estudiantes en los incisos b) y c) para considerar algunas cuestiones:

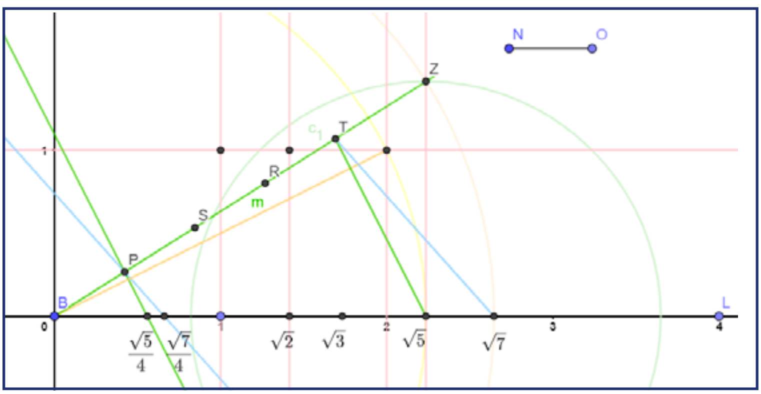
- Entre $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\sqrt{3}$ el único entero es el 1, mientras que entre 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$ no hay números enteros. Estas dos situaciones dan lugar a concluir que, dados números reales cualesquiera, no siempre es posible encontrar un número entero entre ellos.
- Para cada par de números propuestos en el problema (en un caso $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\sqrt{3}$, en el otro caso 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$) podemos encontrar tanto racionales como irracionales apelando a distintas estrategias.

- Aun sin conocer con exactitud la expresión decimal de $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ni de $\sqrt{3}$, es posible ubicar un número racional y un irracional entre ellos.

Luego de esta síntesis colectiva, los y las estudiantes retomarán el problema a través del inciso d). Para encontrar números de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$ pueden:

- Apoyados en mitades y sobre la recta, pueden construir $\sqrt{7}$, luego $\frac{\sqrt{7}}{2}$ y luego ir dividiendo por 2 hasta que en la construcción sobre la recta aparezca que $\frac{\sqrt{7}}{8}$ está entre 0 y $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
- A partir de la calculadora pueden estimar, empezando eventualmente con $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\frac{\sqrt{7}}{3}$, etc., y llegar a que $\frac{\sqrt{7}}{5}$ es menor que $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Esta estimación les permite considerar la cantidad de partes enteras de $\sqrt{7}$ que tienen que tomar y cómo utilizar Thales.
- Sobre la construcción anterior, en la que ya se cuenta con la ubicación de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, pueden ubicar a $\sqrt{7}$ y las divisiones de Thales en cuartos (imagen 4).

4




- Teniendo ubicado a $\frac{\sqrt{7}}{4}$ podrían ubicar a la mitad de ese número, es decir $\frac{\sqrt{7}}{8}$, que visualmente es menor a $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
- Al encontrar algún número de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$ (puede ser $\frac{\sqrt{7}}{5}$ o cualquiera menor), el o la docente puede proponer como pregunta a la clase analizar qué se obtiene con $n$ mayor que el que hayan propuesto, advirtiendo que todos esos números son más chicos que el elegido y mayores que 0. Se

puede así conjeturar que hay infinitos números de esta forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$, todos ubicados en un segmento acotado de la recta.

Cada docente podría preguntar a la clase si es posible imaginar otra familia de números irracionales con esta característica (nos referimos a números de la forma $\frac{\sqrt{m}}{n}$, con $m$ un entero no cuadrado y $n$ un natural). Regulando la actividad para que los y las estudiantes puedan recurrir a las ideas elaboradas y dimensionar la enorme cantidad de familias de este tipo, consideramos que la imagen de que los irracionales son números que se encuentran en cualquier parte de la recta se va consolidando.

## Conclusiones de la actividad 1

Disponer de esta familia de números y visualizar su ubicación en la recta nos permite registrar a modo de síntesis las siguientes afirmaciones:

- Siempre fue posible encontrar racionales e irracionales entre los números propuestos. En cambio, no pudimos encontrar enteros en algunos casos.
- Los números de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$ se ubican todos en forma decreciente hacia el 0 a medida que $n$ crece. Si bien todos ocupan distintos lugares, a medida que $n$ crece están cada vez más cerca entre ellos y también más próximos a 0.[3]
- Este conjunto de números de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$ es **infinito**.
- Otras raíces[4] permiten encontrar otras familias infinitas de irracionales con un comportamiento similar al de $\frac{\sqrt{7}}{n}$.

3. Entendemos que estas expresiones coloquiales pueden capturar la esencia matemática del fenómeno, es decir, la familia de números $\frac{\sqrt{7}}{n}$ considerada como una sucesión tiene un punto de acumulación en el 0. Esta consideración es precisa y rigurosa, pero no por ello transparente, ni sencilla de comunicar o de comprender. Preferimos cierta imprecisión en el lenguaje manteniendo el foco en la comprensión de la clase y su capacidad de expresar aquello que se observa.

4. Esta afirmación dependerá de que otras raíces hayan sido incorporadas al trabajo de la clase.

## Observaciones finales

Cada docente podrá considerar presentar a sus estudiantes algunas técnicas algebraicas necesarias para transformar desigualdades que permitan llegar a conclusiones similares a las que se han alcanzado a partir de las construcciones desarrolladas por los y las estudiantes.

Por ejemplo, si encerramos el 5 entre dos cuadrados exactos, luego $\sqrt{5}$ quedará entre dos enteros:

$$\textit{como } 4 < 5 < 9, \textit{ entonces } 2 < \sqrt{5} < 3.$$

Tomar esta desigualdad y dividirla por 4 permite decir que $\frac{2}{4} < \frac{\sqrt{5}}{4} < \frac{3}{4}$. Estas manipulaciones, aunque puedan quedar desconectadas de la ubicación de los números en la recta, sirven para dialogar con lo que se está visualizando en la recta. Otras manipulaciones posibles:

$$\textit{como } 1 < \sqrt{5}, \textit{ entonces } \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Las construcciones de esta actividad podrían desarrollarse utilizando el GeoGebra. La vista algebraica permite poner en diálogo el aspecto numérico y el geométrico.

### ACTIVIDAD 2

Consideren estas afirmaciones y decidan si son verdaderas o falsas. Justifiquen sus respuestas:

a) Entre 1,1 y 1,2 hay una cantidad finita de números racionales.

b) Entre $3,\hat{4}$ y 3,5 no hay números racionales.

c) Entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ podemos ubicar al menos dos racionales y dos irracionales.

d) Entre 1,41 y $\sqrt{2}$ existe una cantidad infinita de números racionales.

e) Entre 1,41 y $\sqrt{2}$ existe una cantidad finita de números irracionales.

f) Entre 1,01 y 1,02 hay una cantidad infinita de números irracionales.

## Intención general de la actividad 2

Se trata de una actividad de síntesis. Se espera que los y las estudiantes puedan hacer uso de todo lo que han desarrollado hasta acá para argumentar sobre el valor de verdad de estos enunciados.

El ítem a) retoma actividades desarrolladas en el capítulo 1, donde se analizó y acordó la posibilidad de encontrar infinitos números racionales entre dos racionales dados, como consecuencia de la propiedad de densidad definida en ese momento: entre dos racionales se encuentra un racional. Por lo tanto, para afirmar que esta proposición es falsa, los y las estudiantes pueden apoyarse directamente en la consecuencia de la propiedad de densidad y realizar un enunciado más general. También podrían recurrir a explicaciones apoyadas en esos números concretos proponiendo, por ejemplo, que los números que comienzan con 1,1 y luego siguen con otras cifras decimales son mayores que 1,1 y menores que 1,2. Este procedimiento permite encontrar infinitos números decimales entre los números dados.

El ítem b) procura que los y las estudiantes comprendan que las igualdades del tipo $1,\widehat{9} = 2$ no se cumplen con períodos distintos del 9. En este sentido, esperamos que se comprenda que la situación analizada en el capítulo 1 acerca de la doble representación del 2 puede trasladarse a otros números con expresión decimal finita pero siempre apelando a la escritura con "nueve periódico". La idea es que aparezcan racionales entre $3,\widehat{4}$ y 3,5 a través del dominio de la escritura decimal.

Para proponer racionales e irracionales entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ consideramos que tanto la calculadora como las construcciones realizadas sobre la recta en la actividad anterior serán recursos que permitirán a los y las estudiantes confirmar la posibilidad de hallar dos y más racionales[5] e irracionales.

5. Pedir dos racionales es un modo de invitar a pensar en otra cantidad finita de racionales y por esta vía entender que en realidad estamos frente a infinitos racionales.

Los incisos d), e) y f) afirman la existencia de infinitos números de distinto tipo. En estos casos esperamos que la recursividad pueda ser motor de explicaciones apoyadas en la calculadora y en la recta junto con la actividad anterior. Para el ítem f) anticipamos que debería ser sencillo construir distintos irracionales entre 1,01 y 1,02 aun cuando algunos y algunas estudiantes puedan considerar que no haya infinitos.

## Cuestiones a desarrollar en el análisis colectivo

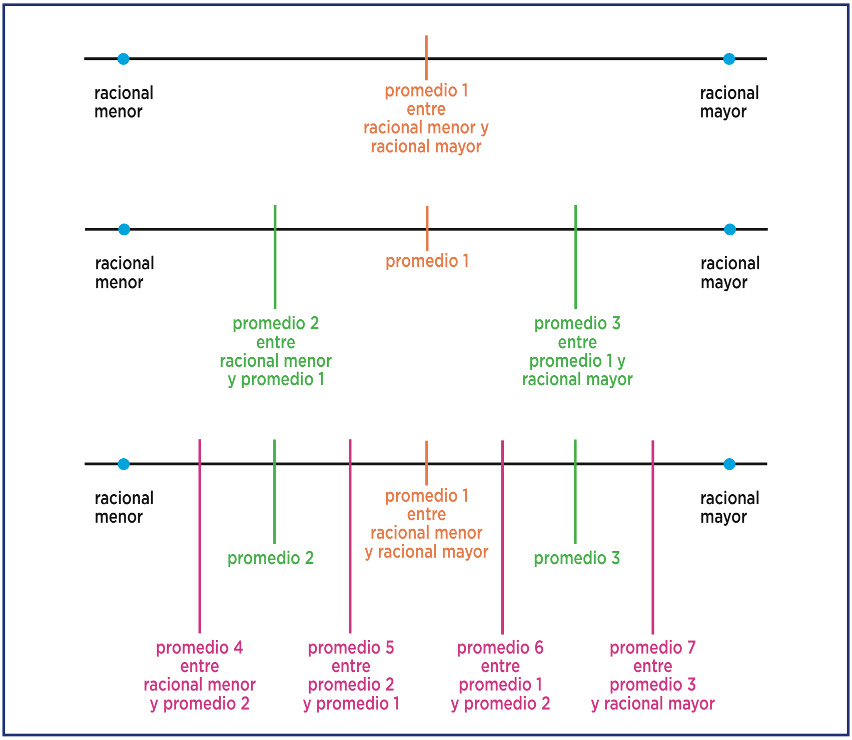
Una vez compartidas las respuestas halladas por los y las estudiantes, y los argumentos que las sostienen, el docente o la docente le puede proponer a toda la clase que analice las siguientes afirmaciones:

ACTIVIDAD 2 (CONTINUACIÓN)

g) Entre dos racionales cualesquiera es posible ubicar al menos dos racionales.

h) Dados dos números racionales cualesquiera, es posible ubicar entre ellos infinitos números racionales.

Estas nuevas afirmaciones configuran una generalización de las ideas y conocimientos desplegados en el capítulo 1 y en los ítems a) y b) de esta actividad. Cada docente puede proponer algunos ejemplos que funcionen como ejemplos genéricos, apelando a números “raros”. Por ejemplo, puede preguntar si entre $2,\widehat{5}$ y $2,\widehat{6}$ se pueden encontrar dos racionales o infinitos racionales. También puede recurrir a la idea de que el promedio es un número entre dos números dados; y que el promedio de dos racionales siempre es racional, pues sumar racionales da por resultado un racional (y dividirlos por 2, también). Esta idea de encontrar el racional que está en el medio (el promedio) puede sustentarse en la recta numérica del siguiente modo:




A continuación, proponemos las últimas dos afirmaciones a ser estudiadas:

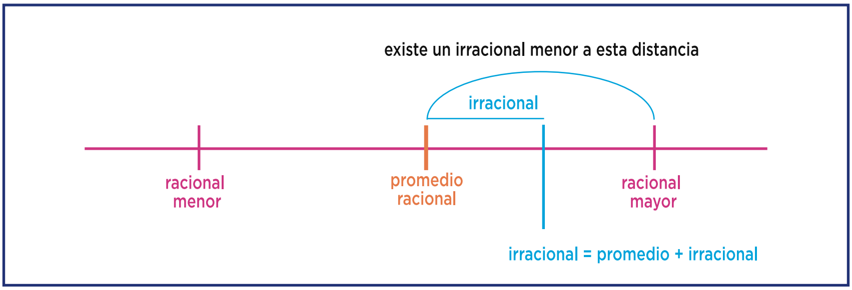
ACTIVIDAD 2 (CONTINUACIÓN)

i) Entre dos racionales cualesquiera no podemos ubicar un número irracional.

j) Entre dos irracionales cualesquiera podemos ubicar un número irracional.

Para analizar la primera afirmación es posible recuperar lo realizado en el ítem c), al construir irracionales (a partir de leyes de formación) entre dos números irracionales dados. Esta estrategia permitiría dar algún sentido a la construcción de un irracional a partir de leyes de formación (solo que ahora, deberá estar entre dos racionales). Pero en este momento queremos apelar a explicaciones que permitan una mayor generalidad y separarnos de los ejemplos o casos particulares. ¿Por qué entre dos racionales se puede ubicar un irracional? Esta cuestión se puede analizar por casos. Un argumento (matemático) podría ser:

- Entre dos racionales distintos, encuentro un racional (por ejemplo, el promedio, que es racional).
- Ese promedio racional y el racional mayor son a su vez números distintos; esto es, hay una distancia entre ellos.
- Es posible encontrar un irracional menor que esa distancia (los números de la forma $\frac{\sqrt{7}}{n}$, analizados en la actividad 1, apoyan esta afirmación).
- Si se suma al promedio ese número irracional menor que esa distancia, se obtiene otro número irracional (racional + irracional = irracional) que es menor que el mayor racional.[6]

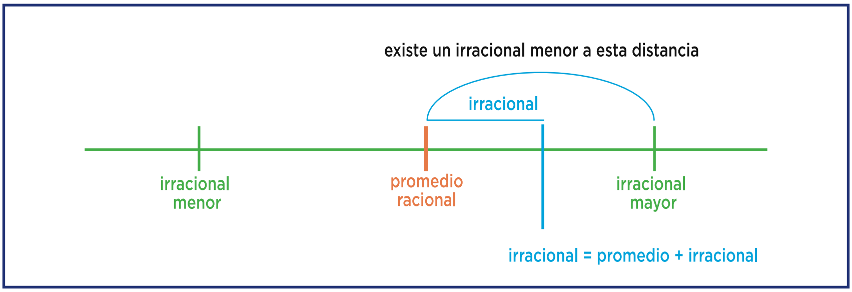



Para analizar la segunda afirmación, podemos desarrollar un razonamiento similar al que acabamos de mostrar, indicando:

- Entre dos irracionales encuentro el promedio, que puede ser racional o irracional.

6. Aceptar que la suma de un racional y un irracional debe arrojar por resultado un número irracional podría no ser inmediato. En este caso proponemos seguir un razonamiento por el absurdo, tal como fue hecho en otras ocasiones.

- Si es irracional, ya está.
- Si es racional, se puede hacer lo mismo que antes: entre ese promedio racional y el irracional mayor hay una distancia.
- Es posible encontrar un irracional menor que esa distancia.
- Si se suma al promedio ese número irracional menor que esa distancia, se obtiene otro número irracional (racional + irracional = irracional) que es menor que el mayor irracional.




## Conclusiones de la actividad

Finalizada esta actividad, se puede enunciar la propiedad de **densidad** para los **irracionales**.

> Decimos que los irracionales son densos ya que entre dos irracionales siempre podemos encontrar un irracional.

También hemos encontrado racionales entre irracionales; e irracionales entre racionales, por lo tanto podemos decir que:

> Entre dos números reales cualesquiera podemos encontrar siempre otro número real, racional o irracional.

## SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Las actividades de este capítulo apuntan a consolidar la noción de densidad (anteriormente trabajada para los números racionales) de cara a encontrar racionales e irracionales entre dos números reales cualesquiera y así concluir, de modo general, que entre dos reales hay un real (en realidad tantos como se desee, dada la posibilidad de iterar los procesos). Del mismo modo que en los capítulos anteriores, las actividades invitan a los alumnos a desplegar argumentos: en algunos casos apoyados en la representación de puntos en la recta numérica, en otros en la representación decimal y el orden en la numeración posicional. Después de pasar por las actividades, se espera que sea claro para los alumnos que no solo los racionales son infinitos, también los irracionales: es posible encontrarlos en cualquier segmento de la recta numérica, por más pequeño que sea.

EPÍLOGO

# A modo de cierre

Como expresamos en el inicio de este documento, la secuencia de enseñanza que hemos compartido es fruto de una indagación realizada en forma conjunta entre docentes e investigadoras que conformamos un equipo para estudiar condiciones didácticas e institucionales que permitan realizar en el aula de la escuela secundaria una experiencia de estudio en torno a los números reales cuya conceptualización movilice las nociones de orden, densidad y continuo considerando las cuestiones de la representación de los números, la recta numérica en cuanto objeto matemático y la producción de teoría en el aula.

Dar inicio a esta secuencia a través de los racionales nos permite retomar concepciones de los y las estudiantes acerca de distintas cuestiones: las diferentes formas de representación de estos números; las técnicas de división entera y su relación con las escrituras decimales de los racionales; las condiciones bajo las cuales es preciso considerar una representación exacta o aproximada de un número; la necesidad de preguntarse acerca de los procesos que realiza la calculadora; y, como telón de fondo, los procesos infinitos en matemática.

Si bien el documento no ofrece un espacio importante para las actividades con fracciones (y ello se debe a que consideramos que las fracciones son trabajadas y retrabajadas en forma abundante a lo largo de la escolaridad), estas son las que permiten reconocer la escritura decimal que los racionales tienen. Movilizar las creencias que los y las estudiantes tienen sobre los números racionales, las características de su representación decimal y sus escrituras posibles constituyó un punto de partida potente para organizar el aula en un modo de indagación, exploración y producción de conjeturas. Las técnicas de manipulación de expresiones (decimales y fraccionarias) mediaron concepciones en evolución tales como la idea de siguiente de un racional.

Las reglas de formación de expresiones decimales constituyen una oportunidad didáctica para considerar en paridad de condiciones las escrituras decimales de racionales y de irracionales, hecho que nos alentó a realizar modificaciones en la organización de actividades que se vivieron en el aula antes de presentarlas en este documento. El análisis desarrollado entre docentes e investigadoras culminó en decisiones conjuntas de rearmado y cambios *a posteriori* de la implementación. Esta situación es una señal de evolución de un grupo humano donde cada integrante se permite ofrecer su perspectiva y reflexionar junto a otros en un clima de confianza y respeto intelectual.

La demostración de la irracoinalidad de las raíces de números primos –con toda su complejidad– nos interesa por la ocasión que brinda para adentrarse en los modos de producción de la matemática. Aún nos sigue pareciendo un desafío, una invitación, un estímulo y también una provocación para mirar más de cerca las reglas de elaboración de teoría en este campo. Para que la demostración viva en el aula como respuesta a una pregunta genuina, hemos construido una situación de exploración de números que deriva en la pregunta (que se constituye como real para los y las estudiantes) sobre las características de un número como $\sqrt{3}$. Es a través de este problema, ciertamente intramatemático, que consideramos lograda una génesis artificial de una cuestión/noción a ser estudiada. Sostenemos que el aula de matemática precisa engendrar preguntas desde la perspectiva de quienes aprenden.

En vínculo con esta cuestión de la elaboración de experiencias que promuevan un escenario de indagación, en cada capítulo hemos concebido preguntas que los y las docentes podrán ofrecer en sus clases, potenciando la exploración comandada por alguna búsqueda. También privilegiamos momentos de síntesis donde los y las estudiantes se involucren en la formulación de conclusiones, unas más cercanas que otras, pero siempre en vínculo con las producciones logradas en cada actividad. Estas conclusiones acerca de los números y también acerca de los procedimientos son reutilizadas en el avance de la secuencia.

A lo largo de toda la secuencia se propició la incorporación de la calculadora como un generador de duda productiva, de cuestionamiento fértil, tomando distancia de una simple lectura directa del visor. Este uso de la calculadora se ofrece como entrada a la reflexión sobre la diferencia entre desarrollos decimales finitos e infinitos, así como entre lo aproximado y lo exacto, lo cual permite el avance hacia un pensamiento teórico por parte de los y las estudiantes.

La propuesta no menciona la evaluación de estos aprendizajes. Es una deuda que esperamos subsanar en futuras experiencias y para lo cual esperamos recibir aportes de quienes se interesen e implementen esta secuencia. No obstante, cabe mencionar que una vez finalizada la implementación de esta secuencia se realizó una evaluación cuyo análisis formará parte de una publicación que será compartida en breve.

Hemos mencionado al inicio que estos problemas fueron desarrollados en aulas con estudiantes de 15, 16 y 17 años, situaciones en las cuales hemos encontrado algunos logros compartidos por todas las implementaciones y algunas singularidades. En efecto, habiendo desarrollado las distintas experiencias en algunos casos a comienzos de año y en otros al final, nos ha parecido mejor recibida por los y las estudiantes en el comienzo de año. Creemos que la oportunidad de estudiar en profundidad y con detalle a los números reales demanda una posición investigativa particular, la cual desarrollada hacia fin de año parece requerir cambios de contrato o, también, reacomodar expectativas acerca de lo que se espera de estudiantes y docentes. La demostración de la irracionalidad de primos es mejor transitada por estudiantes de más edad y las actividades de densidad son disparadoras de reacciones similares a través de todas las edades. Por su parte, la doble escritura de algunos números provoca perplejidad y rechazo de un modo bien homogéneo en todas las aulas. Sin duda, la igualdad $0,\widehat{9} = 1$ obliga a revisar ideas aceptadas durante la escolaridad de muchos años acerca de los números y su escritura. Las concepciones del infinito en matemática –ya sea las que emergen frente a la noción de densidad como de aquellas que se visibilizan a raíz de la irracionalidad de algunos números – evolucionan a lo largo de la secuencia. En este sentido consideramos que las actividades promueven un posicionamiento teórico en todo aquel que se involucra con la propuesta.

Es nuestro deseo que esta propuesta de enseñanza contribuya a que los números reales sean comprendidos como una zona propicia para la construcción de teoría en el aula, una oportunidad para vivir la producción de matemática como un proyecto colectivo y también una alternativa para que el razonamiento, la racionalidad, el debate y la búsqueda de la verdad se constituyan en un horizonte compartido entre estudiantes y docentes.

# Bibliografía


Arcavi, Abraham e Isoda, Masami

2007 "Learning to listen: From historical sources to classroom practice", en *Educational Studies in Mathematics*, nº 66, pp. 111–129.

Arsac, Gilbert y Mante, Michel

1997 "Situations d'initiation au raisonnement déductif", en *Educational Studies in Mathematics,* nº 33, pp. 21-43.

Artigue, Michèle

1988 "Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui", en *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9(3), pp. 281-308.

2011 "L'ingénierie didactique comme thème d'étude", en Margolinas, Claire *et al.* (eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, vol.1, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 15-25.

Balacheff, Nicolas

2000 "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas", Bogotá, Una Empresa Docente. Disponible en: <https://hal.science/hal-00520133/document>.

Barallobres, Gustavo

2004 "La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre", en *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol. 24 (2/3), pp. 285-328.

Bergé, Analía

2016 “Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l’apprentissage du système des nombres réels”, en Nardi, Elena; Winsløw, Carl y Hausberger, Thomas (eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics. Indrum 2016. March 31 April 1-2*, Montpellier, Université de Montpellier, pp. 33-42. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/>.

2010 “Students’ perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers”, en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 41(2), pp. 217-227.

Bergé, Analía; Cedrón, Mara; Duarte, Betina; Herrera, Romina y Lamela, Cecilia

2018 “De la resolución de problemas a la construcción de teoría en el aula: puentes posibles en el campo de los reales”, comunicación presentada en la Reunión de Educación Matemática (REM)-UMA, Universidad Nacional de La Plata.

2019 “La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares”, en *Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*, 8 al 10 de mayo, Ensenada, Universidad Nacional de La Plata. Disponible en: <https://memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11886/ev.11886.pdf>.

Bergé, Analía y Duarte, Betina

2016 “Déployer un raisonnement mathématique au secondaire: problèmes ouverts, formulation de conjectures et gestion de la clase”, en *Bulletin Association Mathématique du Québec*, vol. LVI (4), pp. 44-66.

Bergé, Analía y Sessa, Carmen

2003 “Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica”, en *Revista Relime*, vol.6 (3), pp. 163-197.

Bloch, Isabelle; Chiocca, Catherine-Marie; Job, Pierre y Schneider, Maggy

2007 "Du numérique aux limites: quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse?", en *Perspectives en Didactique des Mathématiques* [CD-ROM], Burdeos, IUFM d'Aquitaine.

Bronner, Alain

1997 *Etude didactique des nombres réels: idecimalité et racine carrée*, tesis doctoral, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Brousseau, Guy

1997 *Theory of didactical situations in mathematics*, Dortrech, Kluwer.

Castela, Corine

1997 *La droite des réels en seconde: point d'appui disponible ou enjeux clandestin?*, Ruan, IREM de Rouen, Université de Rouen.

Cedrón, Mara; Duarte, Betina; Herrera, Romina y Lamela, Cecilia

2021 "Representación y Densidad en los reales: análisis de experiencias de aula", en *Educación, Formación e Investigación*, Córdoba, Ministerio de Educación, Gobierno de la Provincia de Córdoba, vol. 7, nº 12, pp. 109-124. Disponible en: <http://dges-cba.edu.ar/wp/index.php/revista-efi/>.

Charlot, Bernard

1976 "Les contenus non-mathématiques dans l'enseignement des mathématiques", en *Bulletin de l'IREM de Nantes*, nº 7, pp. 3-8.

Chorny, Fernando; Casares, Pablo y Salpeter, Claudio

2017 *Huellas [4]. ES Matemática*, Buenos Aires, Estrada.

Cifuentes, Marcela; Ferrero, Martha y Montoro, Virginia

2012 “Una experiencia de taller sobre números reales con ingresantes a la universidad”, en Veiga, Daniela (ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática*, Buenos Aires, Soarem, pp. 54-61.

Duarte, Betina

2011 *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática: la función exponencial, el razonamiento matemático y la intervención docente en la escuela media*, tesis de doctorado, Universidad de San Andrés, Buenos Aires. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10908/18511>.

Durand-Guerrier, Viviane

2018 “La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres”, en *Actes de la CORFEM, Nîmes 13-14 juin 2016*.

2016 “Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students”, en *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, nº 2, pp. 338-361.

Durand-Guerrier, Viviane y Vergnac, Martine

2013 “Les réels à la transition secondaire-supérieur, du discret au continu – quelle élaboration?”, en *La réforme des programmes du lycée et alors? Actes du colloque IREM*, pp. 135-147.

Duval, Raymond

2016 “El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba”, en Duval, Raymond y Saénz-Ludlow, Adalira (eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*, Bogotá, Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, pp. 95-126.

Klein, Felix

2006 *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis*, Madrid, Nivola Libros.

Licera, Mabel

2017 *Economía y ecología de los números reales en la enseñanza secundaria y la formación del profesorado*, tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Pallascio, Richard

2005 "Les situations-problèmes: un concept central du nouveau programme de mathématique", en *Vie pédagogique*, nº 136, pp. 32-35.

Panizza, Mabel

2005 *Razonar y Conocer*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne

2011 "L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formaion des enseignants", en Margolinas, Claire *et al.* (eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, vol.1, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 29-56.

Romero Albadalejo, Isabel

1997 *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*, Granada, Editorial Comares.

Sadovsky, Patricia

2005 *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Sadovsky, Patricia *et al.*

2015 "Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores", en Pereyra, Ana *et al.* (eds), *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense*, Buenos Aires, UNIPE: Editorial Universitaria, pp. 223-252. Disponible en: <https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/investigaciones/pr%C3%A1cticas-pedag%C3%B3gicas-y-pol%C3%ADticas-educativas-detail>

Scaglia, Sara Beatriz

2000 *Dos conflictos al representar números reales en la recta numérica*, tesis doctoral, Universidad de Granada.

Sierpinska, Anna; Bobos, Georgeana y Pruncut, Andreea

2011 "Teaching absolute value inequalities to mature students", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 78, nº 3, pp. 275-305.

Sierpinska, Anna

1987 "Humanities students and epistemological obstacles related to limits", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, pp. 371-397. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/BF00240986>.

Sirotic, Natasa y Zazkis, Andrina

2007 "Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge", en *Educational Studies in Mathematics,* vol. 65, nº 1, pp. 49-76.

Vergnac, Martine

2013 *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives*, tesis de maestría, Université Montpellier II.

Vergnac, Martine y Durand-Guerrier, Viviane

2014 "Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université: un objet problématique", en *Petit x*, nº 96, pp. 7-28.

Vivier, Laurent

2015 *Sur la route des réels, points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*, trabajo para Habilitation à diriger les recherches (HDR), Université Paris Diderot – Paris 7.

Voskoglou, Michael y Kosyvas, Georgios

2012 "Analyzing students' difficulties in understanding real numbers", en *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 1, nº 3, pp. 301-336.

Zachariades, Theodossios; Christou, Constantinos y Pitta-Pantazi, Demetra

2013 "Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 82, pp. 5-22.

# Sobre las autoras y los autores

**CAROLINA BENITO** es profesora de Matemática e Informática Educativa por la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMdP). Se desempeña como jefa de trabajos prácticos en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) y la Universidad Nacional Arturo Jauretche (UNAJ), donde co-coordina la materia Matemática Inicial. Es miembro del equipo de la Unidad de Evaluación Integral de la Calidad y Equidad Educativa de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y es parte de proyectos de investigación en la UNAJ y la UNIPE. Participó de congresos nacionales e internacionales en enseñanza de la matemática. Es coautora de artículos y documentos relacionados con la enseñanza de la matemática.

**ANALÍA BERGÉ** es doctora en el área de Didáctica de la Matemática. Argentina de origen y egresada de la Universidad de Buenos Aires (UBA), es profesora titular e investigadora en la Universidad del Quebec en Rimouski (UQAR, Canadá) desde 2011. Es autora y coautora de libros de texto y de artículos científicos y profesionales en revistas internacionales. Participó entre 2018 y 2022 como miembro del equipo del proyecto de investigación Picto 0022-2017, cuyo desarrollo sentó las bases para esta publicación.

**MARA CEDRÓN** es profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA). Se desempeña como docente en formación inicial y continua de profesores de matemática en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) y en el Instituto Superior de Formación Docente Nº 41. Ha participado en diversos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática (UBA, UNIPE). Es coautora de artículos de investigación y de materiales de apoyo para la enseñanza. Desde

2018 integra el equipo de investigación que dirige Betina Duarte, cuyo objeto de estudio es la enseñanza y el aprendizaje de los números reales.

**BETINA DUARTE** es doctora en Educación (Universidad de San Andrés, Argentina) y licenciada en Matemática (UBA). Realiza docencia e investigación en el Departamento de Ciencias y Tecnología en la UNIPE. Sus áreas de interés se vinculan al problema de la validación y demostración, el rol docente en escenarios de producción oral de la clase y la incorporación de la tecnología en la enseñanza de la matemática. Actualmente investiga problemas didácticos relativos al aprendizaje de los números reales en la enseñanza secundaria y superior. Es coautora de libros de texto y documentos curriculares de enseñanza de la matemática.

**ROMINA HERRERA** es profesora de Física y Matemática recibida en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Se desempeñó como profesora de matemática en escuelas secundarias, facultades, institutos de formación docente y en formación docente permanente. Formó parte del proyecto de investigación "De la resolución de problemas hacia la construcción de teoría en el aula. Puentes posibles en el campo de los Números Reales". Es coautora de textos escolares y de libros y artículos relacionados con la enseñanza de la matemática.

**CECILIA LAMELA** es magíster en Educación: Pedagogías Críticas y Problemáticas Socioeducativas y profesora de Educación Media y Superior en Enseñanza de la Matemática (UBA). Se desempeña como profesora adjunta en la UNIPE, donde coordina el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Ha participado en diversos proyectos de investigación en enseñanza de la matemática y publicado en revistas con referato. Participó de congresos nacionales e internacionales en enseñanza de la matemática. Es coautora de libros de texto y de documentos curriculares.

**CECILIA MONTES DE OCA** es especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE) y profesora en Disciplinas Industriales con especialidad en Matemática y Matemática Aplicada (INSPT-UTN). Se desempeña como jefa de trabajos prácticos en el Profesorado de Matemática de la UNIPE y dicta clases de matemática en escuelas secundarias. Desde el 2019 integra el equipo de investigación dirigido por Betina Duarte, cuyo objetivo es la enseñanza y el aprendizaje de los números reales.

**GRACIELA MORALES** es docente de Matemática en Escuela Secundaria y coordinadora del área de Matemática del Colegio de la Ciudad. Participó de congresos nacionales e internacionales en enseñanza de la matemática y en proyectos de investigación de la Universidad de Buenos Aires (UBA).

**MAURO REY** es profesor de Matemática recibido en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Se desempeña como profesor de matemática en la Escuela Superior de Comercio "Carlos Pellegrini" y en el Instituto Libre de Segunda Enseñanza (ILSE). Es coautor de textos escolares de matemática.

unipe editorial universitaria | HERRAMIENTAS SERIE MATEMÁTICA

OEI

Desde el inicio de la escolaridad, la recta se propone como un punto de apoyo para la representación de números. Allí se encuentran, más o menos escondidos, todos los números reales. Ahora bien, comprender las características de estos números implica abordar un territorio vasto. Como signo de esta complejidad alcanza con mencionar que al finalizar el secundario muchas y muchos estudiantes consideran que los números irracionales son raros y escasos. Este libro, producto de un trabajo colectivo de escritura, investigación y experimentación en aulas a cargo de docentes universitarios y del nivel secundario, plantea situaciones didácticas que obligan a revisar cuestiones ya casi naturalizadas en la enseñanza. ¿Cómo sabemos fehacientemente que estamos frente a un racional? ¿Qué información nos aporta cada una de las representaciones posibles de un número? ¿Cómo se comportan las calculadoras al tratar con números decimales? Tras recuperar ciertas cuestiones generales sobre los racionales, las expresiones decimales infinitas, las diferentes familias de irracionales y su representación en la recta numérica, esta secuencia didáctica avanza hacia aspectos de mayor complejidad como la noción de densidad en los reales. La meta es la producción de teoría acerca de los números reales en el aula del secundario y la posibilidad de mirar a estos números con fascinación y entusiasmo.

ISBN 978-987-3805-79-0

9 789873 805790



editorial.unipe.edu.ar